Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 2. С. 141–202.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.38
MSC 2010: 37J60, 37J35

Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, И. А. Бизяев

В работе исследуется динамика систем, описывающих качение без проскальзывания и верчения (rubber-rolling) различных твердых тел по плоской и сферической поверхности. Показано, что в зависимости от геометрии поверхности тела и его распределения масс возникает иерархия возможных типов динамического поведения. Найдены новые интегрируемые случаи и случаи существования инвариантной меры. Кроме того, на примере этих систем продемонстрировано, что существование нескольких нетривиальных инволюций в обратимых диссипативных системах приводит к почти гамильтонову поведению.

Получено 12 марта 2013 года
После доработки 8 мая 2013 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления», АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.1248.2011), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.7734.2013), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение № 14.B37.21.1935). Работа И. А. Бизяева выполнена при поддержке гранта фонда Д. Зимина «Династия».

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Институт компьютерных исследований;
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Институт компьютерных исследований;
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Ключевые слова: неголономная связь, тензорные инварианты, первый интеграл, инвариантная мера, интегрируемость, конформно-гамильтонова система, резиновое качение, обратимость, инволюция

Содержание

Введение

Эта работа является развитием наших исследований по динамике катящихся тел (см. [41, 42], опубликованы в 2002 году). В указанных работах рассматривалась классическая неголономная модель качения без проскальзывания произвольного твердого тела по неподвижной плоскости или сфере. Последнее ограничение было связано с тем, что только в этих двух случаях уравнения движения можно свести к системе из шести уравнений, по структуре близких к классическим уравнениям Эйлера – Пуассона.

Здесь мы рассмотрим аналогичную задачу о качении твердого тела по плоскости и сфере (ограничение продиктовано теми же соображениями), но в рамках другой (также неголономной) модели. В этой модели, кроме равенства нулю скорости точки контакта, предполагается, что проекция угловой скорости на нормаль к неподвижной поверхности также равна нулю. Для такой динамической модели в дальнейшем мы будем употреблять тождественную терминологию — качение без проскальзывания и верчения (прокручивания) или резиновое качение (соответственно, резинового тела). Первое название является слишком длинным, а второе (предложенное Дж. Койлером и К. Эйлерсом в [50]), хотя и является более образным и отражает, что резиновое покрытие тела реально препятствует верчению, вызывает раздражение у инженеров. Отметим, что в ряде связанных работ по теории управления и робототехнике используется именно модель резинового качения (см., например, [7, 8, 62]). Модель резинового качения, по-видимому, менее реалистично описывает взаимодействие соприкасающихся твердых тел, обусловленное многими факторами, связанными с трением на площадке контакта между телами, которое, кстати говоря, является крайне мало изученным в задаче динамики.

Первые исследования качения тел без верчения восходят к классикам современной механики: эта модель была предложена Ж. Адамаром (1895 год) в [55] и развита А. Бегеном (1929 год) [40]. Работы [40, 55] посвящены кинематическим вопросам, их изложение с современных позиций можно найти в [18]. Динамические проблемы, связанные с резиновым качением твердого тела, разобраны в работах [5, 14, 46, 47, 50, 53, 57]. Здесь мы систематизируем эти исследования, используя общую идею иерархии динамического поведения, предложенную в [41, 42]. (Эта идея восходит к работам С. А. Чаплыгина и В. В. Козлова [26], отметивших ключевую роль различных тензорных инвариантов при анализе поведения динамических систем.)

Основной идеей иерархии динамического поведения неголономных систем является систематическое изучение конкретных систем, связанных с качением твердых тел друг по другу (в идеальной неголономной постановке). Наиболее простой задачей, демонстрирующей основные динамические эффекты, здесь является качение твердого тела по плоскости и поверхности сферы, при этом уравнения движения имеют замечательную структуру, близкую к классическим уравнениям Эйлера – Пуассона. Возникающие при этом динамические системы обобщают хорошо изученные гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Следует также отметить, что качение без проскальзывания (и различные его плоские аналоги типа движения саней или конька) является пока единственной теоретической моделью реализации неголономных связей (см., например, [24]).

При изучении указанной системы обнаруживается, что в зависимости от наличия определенного набора тензорных инвариантов (инвариантной меры, первых интегралов, пуассоновой структуры и пр.) мы получаем различные классы систем, имеющих собственный теоретический интерес и обобщающих гамильтоновы системы. Для одних обобщений гамильтонов подход можно модифицировать, для других — возникают принципиальные затруднения и, соответственно, новые динамические эффекты. Такая точка зрения на неголономные системы существенно отличается от общепринятой, в которой пытаются сформулировать общие свойства для неголономных систем, заданных лагранжианом и формальным набором неинтегрируемых связей. С нашей точки зрения, такой подход, приводящий к созданию неголономных теорий устойчивости, редукции и пр. для общих неголономных систем, не является эффективным. Как правило, он приводит к слишком специфическим условиям на неголономные слагаемые в уравнениях, которые на практике, как правило, не встречаются. Эта ситуация родственна сложившейся в формализме составления уравнений неголономной механики (см. [14]), когда наличие множества их различных форм представляет, как правило, чисто теоретический интерес и мало помогает при получении уравнений для конкретных систем.

В приложении к данной работе приведены основные сведения из динамики обратимых систем, что существенно дополняет иерархию, основанную на изучении тензорных инвариантов. Дело в том, что при наличии некоторых дискретных симметрий, обусловленных геометрией поверхности и распределением масс в катящемся теле, уравнения движения могут допускать различные наборы инволюций, которые оказывают большое влияние на динамику. Особо отметим, что рассматриваемые в работе неголономные системы дают наиболее естественные примеры различных типов обратимых потоков, тогда как большинство исследований по обратимым системам рассматривает систематически только формальные дискретные отображения [67]. После приложений сформулированы вопросы, как относящиеся к нерешенным задачам, связанным с качением, так и имеющие общий теоретический характер и относящиеся к общим трехмерным (четырехмерным) обратимым потокам (соответственно, двумерным и трехмерным отображениям), допускающим определенный набор тензорных инвариантов. Эти вопросы тесно связаны с существованием инвариантной меры, гамильтонизацией неголономных систем, а также со строением областей регулярности и стохастического поведения, в которых могут одновременно наблюдаться явления, типичные как для гамильтоновых, так и для диссипативных систем. (Отметим, что недавно в динамике неголономной модели кельтского камня было доказано существование странного аттрактора лоренцевского типа [22].)

В заключение отметим, что модель резинового качения твердого тела по плоскости и сфере по сравнению с классической моделью качения без проскальзывания, разобранной в [41], имеет значительное преимущество в том, что исследование сводится к анализу двумерного отображения (по сравнению с трехмерным в [41]). Для таких отображений наиболее развиты аналитические и численные методы, как для симплектического, так и для диссипативного. Рассмотрение динамики однородного шара, катящегося по поверхности, аналогичное [42], для резинового качения излишне, так как уравнения движения оказываются изоморфными задаче о движении точки по идеальной поверхности (а система является гамильтоновой).

Необходимо отметить, что развитие теории неголономных систем в последние десять лет было в бóльшей мере сосредоточено на формалистических построениях, не имеющих никакого отношения к реальным вопросам прикладной науки, возникающим в последнее время в связи с потребностями мобильной робототехники (движение многих современных роботов требует создания управления при наличии неголономных связей).

В работе [8] указаны сложности, к которым приводит теоретический анализ управляемости, выполненный на основе неголономной модели, без учета трения качения и верчения. В любом случае, для развития прикладных исследований, а также для новых достижений в теории необходимо исследовать новые сложные неголономные задачи [5, 8, 12, 14, 16–

18, 31] как с регулярным (интегрируемым), так и с хаотическим поведением. В работе для описания динамики мы используем компьютерные методы нахождения тензорных инвариантов как основанные на системе аналитических вычислений, так и полученные при помощи точечных отображений Пуанкаре, продолжения периодических орбит и бифуркационного анализа. Несмотря на то, что рассмотренные в работе системы являются модельными, мы уверены, что аналогичные закономерности наблюдаются и для других обширных классов неголономных систем (движение неголономных платформ и их обобщений).

1. Качение твердого тела без скольжения и верчения: уравнения движения, первые интегралы, динамическое поведение

1.1. Качение тела по плоскости

Уравнения движения. Рассмотрим задачу о качении твердого тела по горизонтальной плоскости при условии, что в точке контакта отсутствует одновременно проскальзывание и верчение [14, 18, 62]. Для краткости в дальнейшем для этой модели также будем употреблять термины *резиновое качение* (rubber rolling) и *качение резинового тела* (rolling rubber body). Конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$, где первый сомножитель описывает положение точки контакта на плоскости, а второй — ориентацию тела. Определим две системы координат (см. рис. 1):

неподвижная $OXYZ$ — начало располагается в некоторой точке плоскости, а ось OZ перпендикулярна плоскости,

подвижная $Cxyz$ — начало C совпадает с центром масс тела, а оси направлены вдоль главных осей инерции тела.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ — орты неподвижного пространства (то есть единичные векторы осей $OXYZ$), спроецированные на подвижные оси $Cxyz$, $\boldsymbol{R}_P = (x, y)$ — координаты точки контакта на плоскости. Если определить ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3),$$

то пара $(\boldsymbol{R}_P, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^2 \times SO(3)$ однозначно определяет положение тела.

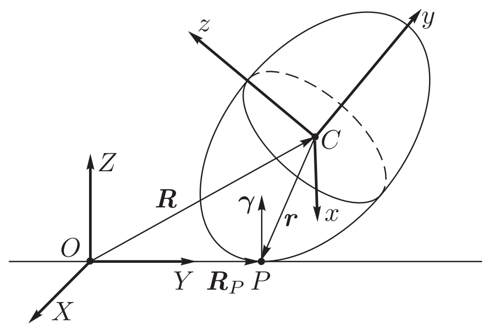


Рис. 1. Тело на плоскости.

Замечание. Здесь и далее полужирным курсивом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$, ... мы обозначаем векторы, а их скалярное и векторное произведение, соответственно, записываем в виде $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Знак $\otimes$ обозначает тензорное произведение, то есть в матричной форме $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \|a_i b_j\|$. Полужирным прямым шрифтом обозначаются матрицы: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... Укажем также одно полезное тождество, используемое в дальнейшем, однако редко упоминаемое в литературе:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}) \times (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — угловая скорость и скорость центра масс тела, спроецированные на подвижные оси $Cxyz$. *Здесь и далее (если не оговорено обратное) все векторы проецируются на подвижные оси.* Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта означает, что скорость тела в этой точке обращается в нуль:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор из центра C масс тела в точку контакта P. Отсутствие верчения означает, что проекция угловой скорости на нормаль к плоскости обращается в нуль:

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{1.2}$$

Запишем уравнения движения с неопределенными множителями в квазискоростях[1]:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\lambda} + \lambda_o \boldsymbol{\gamma}, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, λ_o — неопределенные множители, описывающие реакцию связей (1.1), (1.2), $\boldsymbol{F}_C$, $\boldsymbol{M}_C$ — внешние сила и момент сил относительно центра масс, приложенные к телу.

Из первого уравнения (1.3) и связи (1.1) находим

$$\boldsymbol{\lambda} = m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{F}_C.$$

Подставляя найденное $\boldsymbol{\lambda}$ во второе уравнение (1.3) и записывая кинематические соотношения для вращения тела и движения точки контакта, получим *систему уравнений, описывающих качение твердого тела по плоскости без проскальзывания и верчения*, в виде

$$\begin{gathered}
\widetilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{M}_P + \lambda_o \boldsymbol{\gamma}, \\
\lambda_o = -\frac{\left(\widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{M}_P\right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\
\dot{x} = (\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{r}}), \quad \dot{y} = (\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{r}}),
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2\mathbf{E} - m\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}$ — тензор инерции относительно точки контакта, $\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{F}_C \times \boldsymbol{r}$ — момент внешних сил относительно точки контакта. Кроме того, полученные уравнения необходимо дополнить алгебраическими соотношениями, связывающими нормаль $\boldsymbol{\gamma}$ с вектором $\boldsymbol{r}$ при помощи гауссовой проекции:

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \tag{1.5}$$

где $f(\boldsymbol{r}) = 0$ — уравнение, задающее поверхность тела, $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial r_1}, \dfrac{\partial f}{\partial r_2}, \dfrac{\partial f}{\partial r_3}\right)$. В случае выпуклого тела это уравнение однозначно разрешимо, так что будем полагать $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})$.

[1] В обзоре [14] они были названы нами уравнениями Ферререа, однако, как было затем замечено нам А. С. Сумбатовым, Ферререс не использовал неопределенные множители. К такого сорта уравнениям, видимо, впервые пришел Уиттекер [71] (см. также [52])

Замечание. Уравнения (1.4) допускают очевидные геометрические интегралы, выражающие условие ортогональности матрицы $\mathbf{Q}$:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

Здесь мы будем рассматривать случай, когда внешние силы потенциальны с потенциалом, зависящим только от $\boldsymbol{\gamma}$, то есть $U = U(\boldsymbol{\gamma})$, так что $\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$. В этом случае отделяются уравнения, описывающие эволюцию векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\widetilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda_o \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1.6}$$

Так, например, при качении тела в поле тяжести по горизонтальной плоскости

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = -ma_g\big(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})\big),$$

где m — масса тела, a_g — ускорение свободного падения.

Приведенная система (1.6) аналогична уравнениям Эйлера–Пуассона и их обобщениям в динамике твердого тела [10]. По известным решениям $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ этой системы закон изменения остальных переменных $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, x, y получается согласно (1.4) при помощи квадратур, поэтому свойства системы (1.6) во многом определяют свойства динамики общей системы. В дальнейшем, как правило, мы исследуем динамику только приведенной системы (1.6).

Замечание. Уравнения для $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ отделяются не только для потенциальных сил, но и при произвольном $\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_P(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})$. Тем не менее, получившаяся система, как правило, не допускает интеграл энергии, поэтому здесь мы подобный случай рассматривать не будем.

Тело с ротором. При добавлении равномерно вращающегося уравновешенного ротора (подробности введения ротора см. [10, 41]) уравнения движения для векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ также отделяются и принимают вид

$$\widetilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{S}) \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \lambda_o \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.7}$$

$$\lambda_o = -\frac{\left(\widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, (\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{S}) \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \tag{1.8}$$

где $\boldsymbol{S}$ — постоянный трехмерный вектор гиростатического момента.

Первые интегралы системы. Система (1.6) обладает двумя общими интегралами

$$F_0 = \boldsymbol{\gamma}^2, \quad F_1 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{1.9}$$

причем их постоянные определяются в соответствии с физическим смыслом однозначно: $F_0 = 1$, $F_1 = 0$. На уровне $F_1 = 0$ система (1.6) допускает также интеграл энергии

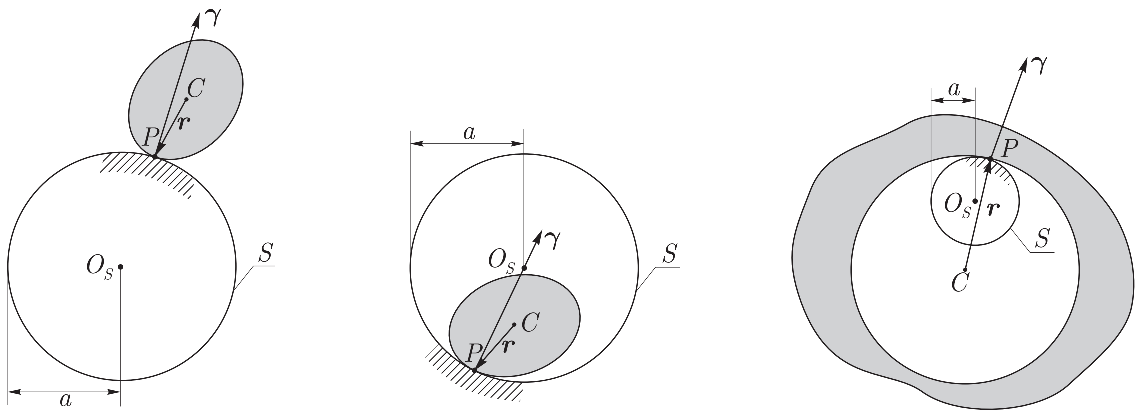
$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}). \tag{1.10}$$

Таким образом, для интегрируемости системы уравнений (1.6) по теореме Эйлера–Якоби [3, 26] не хватает еще одного дополнительного интеграла и инвариантной меры.

Для системы (1.8), соответствующей качению тела с ротором, интегралы (1.9), (1.10) также сохраняются.

1.2. Качение тела по сфере

Уравнения движения. Рассмотрим теперь случай, когда опорная поверхность, по которой катится тело, — сфера S^2 радиуса a. При этом возможны три варианта обката, изображенные на рисунке 2. Конфигурационное пространство системы $\mathcal{M} = S^2 \times SO(3)$, где первый сомножитель отвечает возможному положению точки контакта P, а второй — ориентации тела.



(a) $\gamma = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}, k = \dfrac{1}{a}$ (b) $\gamma = -\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}, k = -\dfrac{1}{a}$ (c) $\gamma = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}, k = \dfrac{1}{a}$

Рис. 2. Возможные варианты качения тела по неподвижной сферической поверхности.

Как и в предыдущем случае, выберем жестко связанную с подвижным телом систему координат $Cxyz$ с началом в центре масс тела; в дальнейшем все векторы предполагаются заданными в этих осях. Определим единичный вектор нормали в точке контакта $\boldsymbol{\gamma}$, направленный в сторону катящегося тела, и ортогональную матрицу $\mathbf{Q}$, задающую ориентацию тела, в которой по столбцам стоят координаты неподвижных ортов в подвижных осях. Пара $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{M}$ полностью определяет положение системы.

Пусть, как и выше, $\boldsymbol{r}$ — вектор из центра масс в точку контакта, а $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ — угловая скорость и скорость центра C масс тела, тогда условия отсутствия проскальзывания и верчения имеют вид

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{1.11}$$

Здесь вектор нормали $\boldsymbol{\gamma}$ также связан с $\boldsymbol{r}$ посредством соотношения

$$\boldsymbol{\gamma} = \pm\frac{\nabla f(\boldsymbol{r})}{|\nabla f(\boldsymbol{r})|},$$

где $f(\boldsymbol{r}) = 0$ — уравнение, задающее катящуюся поверхность тела, а знак выбирается в зависимости от варианта обката (см. рис. 2). Обращая это соотношение на уровне $f(\boldsymbol{r}) = 0$, можно получить явную зависимость $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})$.

Уравнения движения этой системы также могут быть получены при помощи метода неопределенных множителей (см. предыдущий раздел), они имеют вид

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \big(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}\big) \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \lambda_k\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{M}_P, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} + k\dot{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{Q}, \\ \widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2\mathbf{E} - m\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}, \quad \lambda_k = -\frac{\big(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{M}_P, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\big) + k(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{r}})}{\big(\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\big)},\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $\mathbf{I}$, m — тензор инерции и масса тела, $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\boldsymbol{M}_P$ — момент внешних сил относительно точки контакта, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ — кососимметричная матрица угловой скорости, компоненты которой задаются соотношением $\widetilde{\omega}_{ij} = \varepsilon_{ijl}\omega_l$, $k = \pm\frac{1}{a}$ — кривизна опорной поверхности, вычисляемая с учетом знака (см. рис. 2).

В случае, когда момент внешних сил $\boldsymbol{M}_P$ зависит только от нормали $\boldsymbol{\gamma}$, уравнения, описывающие эволюцию $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, отделяются:

$$\widetilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{M}_P + \lambda_k \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}), \tag{1.13}$$

где λ_k определен выше (1.12), $\mathbf{\Gamma}$ — матрица с элементами $\Gamma_{ij} = \delta_{ij} - k\,\dfrac{\partial r_i}{\partial \gamma_j}$.

Для тела, ограниченного произвольной поверхностью, матрица $\mathbf{\Gamma}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}.$$

Обобщением момента потенциальных внешних сил в данном случае является

$$\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{\gamma} \times \left((\mathbf{\Gamma}^{-1})^{\mathrm{T}} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right).$$

Как и в случае плоскости, если не оговорено противное, в дальнейшем, описывая качение по сфере, мы обсуждаем систему (1.13).

Замечание. В случае поля тяжести потенциальная энергия тела задается как

$$U(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Q}) = -ma_g\big(\boldsymbol{e}_z, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma})\big),$$

где $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ — орт вертикали в неподвижных осях. В этом случае и потенциал, и момент $\boldsymbol{M}_P$ *не могут* быть выражены только через компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$, поэтому при движении в поле тяжести редукция к системе (1.13) невозможна. В связи с этим для задач качения по сфере система (1.13) носит в большей степени модельный характер — менее искусственные постановки задачи, приводящие к тем же уравнениям, имеются в [6].

Замечание. По аналогии с плоскостью (см. (1.7)), уравнения (1.13) допускают практическое обобщение.

Первые интегралы. Система уравнений (1.13), как и в случае плоскости, обладает парой общих интегралов:

$$F_0 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_1 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0; \tag{1.14}$$

кроме того, в случае потенциальных внешних сил на уровне $F_1 = 0$ сохраняется энергия:

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}). \tag{1.15}$$

1.3. Отображение Пуанкаре и иерархия динамики

Отображение Пуанкаре. Во многих случаях для численного анализа и иллюстрации поведения траекторий систем (1.6) и (1.13) удобно использовать метод сечений Пуанкаре (в данном случае сечение оказывается двумерным), поэтому здесь мы подробнее опишем его построение для рассматриваемых систем. Отметим, что в задачах о «классическом» качении с верчением сечение Пуанкаре аналогичных систем является трехмерным [41, 42], а значит, более сложным для анализа.

Прежде всего ограничим данные системы на четырехмерное многообразие уровня общих интегралов

$$\mathcal{M}^4 = \left\{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \mid \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0\right\} \tag{1.16}$$

и получим четырехмерный поток с интегралом энергии $\widetilde{E} = E|_{\mathcal{M}^4}$. При численных исследованиях для параметризации этого многообразия в работе мы будем использовать специальные переменные (L, G, l, g), аналогичные переменным Андуайе, которые систематически применяются для этих целей в динамике твердого тела [10]. В данном случае имеем

$$\begin{gathered}\omega_1 = \sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad \omega_2 = \sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad \omega_3 = L,\\ \gamma_1 = \frac{L}{G}\cos g \sin l + \sin g \cos l, \quad \gamma_2 = \frac{L}{G}\cos g \cos l - \sin g \sin l, \quad \gamma_3 = -\sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}}\cos g,\end{gathered} \tag{1.17}$$

где $l, g \in [0, 2\pi)$ — угловые переменные, а L, G удовлетворяют очевидному неравенству

$$-1 \leqslant \frac{L}{G} \leqslant 1.$$

Затем зафиксируем уровень энергии $\widetilde{E}(L, G, l, g) = h$, тем самым получим однопараметрическое семейство трехмерных потоков на многообразиях

$$\mathcal{M}^3_h = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^4 \mid \widetilde{E}(\boldsymbol{x}) = h\},$$

и в качестве секущей для этого потока выберем многообразие, задаваемое соотношением

$$g = g_0 = \mathrm{const}.$$

Численно интегрируя рассматриваемые системы и находя пересечения траекторий с заданным сечением, окончательно получим двухпараметрическое семейство точечных двумерных отображений:

$$\begin{gathered}\Phi_{h,g_0}\colon \mathcal{M}^2_{h,g_0} \to \mathcal{M}^2_{h,g_0},\\ \mathcal{M}^2_{h,g_0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^4 \mid \widetilde{E}(\boldsymbol{x}) = h, g(\boldsymbol{x}) = g_0\}.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Это многообразие мы будем параметризовать парой переменных $l \bmod 2\pi$ и $\frac{L}{G}$ $\left(\left|\frac{L}{G}\right| \leqslant 1\right)$ так, что пара $\left(l, \frac{L}{G}\right)$ задает точку на двумерной единичной сфере S^2 (см. рис. 3–8).

Замечание. Параметр g_0 в некоторых случаях является существенным при определении отображения Пуанкаре, так как для одного потока отображения для двух различных сечений $g(\boldsymbol{x}) = g_0$ и $g(\boldsymbol{x}) = g_0'$ могут различаться. Так происходит, например, в случае, когда одно из сечений пересекает периодическую орбиту, а другое — нет.

Траекторная эквивалентность. Заметим, что при $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ системы (1.6) и (1.13) являются инвариантными относительно замены времени и угловых скоростей вида

$$t \to \lambda t, \quad \boldsymbol{\omega} \to \lambda^{-1}\boldsymbol{\omega}, \quad \lambda = \mathrm{const}.$$

При этом значение энергии системы $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) = h$ преобразуется по закону

$$h \to \lambda^{-2}h.$$

Отсюда заключаем, что

> *при* $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ *потоки систем* (1.6), (1.13) *на всех уровнях энергии* $E(\boldsymbol{x}) = h$ *траекторно эквивалентны друг другу.*

Следовательно, в этом случае отображения (1.17) при всех значениях h тождественны друг другу.

Аналогично, для системы (1.6) при движении в поле тяжести $\big($т. е. $U(\boldsymbol{\gamma}) = -ma_g\big(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})\big)\big)$ получим, что уравнения движения инвариантны относительно замены

$$t \to \lambda t, \quad \boldsymbol{\omega} \to \lambda^{-1}\boldsymbol{\omega}, \quad a_g \to \lambda^{-2}a_g.$$

Значение энергии $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}) = h$ также преобразуется к виду

$$h \to \lambda^{-2}h.$$

Следовательно, справедливо

Предложение 1.1. *При* $U(\boldsymbol{\gamma}) = -ma_g\big(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})\big)$ *потоки системы* (1.6) *при значениях параметров* h, a_g, *удовлетворяющих условию*

$$\frac{h}{a_g} = \mathrm{const},$$

траекторно эквивалентны друг другу.

Иерархия динамического поведения. Для рассматриваемой системы полный набор (тензорных) инвариантов может включать в себя дополнительно инвариантную меру и еще один первый интеграл. В зависимости от сочетаний этих дополнительных законов сохранения возникает иерархия возможных типов динамического поведения (для случая обычного качения см. [41, 42]). Опишем ее схематически, опуская детали, для краткости обозначая инвариантную меру через μ, а дополнительный интеграл через F_2; соответствующие сечения Пуанкаре изображены на рисунках 3–8.

$\exists F_2, \mu$. Система интегрируема по обобщенной теореме Эйлера–Якоби (см., например, [3]); неособые инвариантные многообразия — торы, все траектории регулярны и являются либо квазипериодическими, либо периодическими обмотками инвариантных торов. В окрестности торов система конформно-гамильтонова. Характерный вид сечения Пуанкаре в этом случае приведен на рисунке 3, из которого видно, что фазовый портрет расслаивается на инвариантные кривые и неподвижные точки.

$\exists F_2$, $\nexists \mu$. Фазовое пространство расслоено на двумерные многообразия, в известном примере — двумерные торы. Все траектории регулярны, но на инвариантных многообразиях (торах) могут существовать предельные циклы. При этом соответствующее отображение Пуанкаре (см. рис. 4) по внешнему виду практически не отличается от аналогичного отображения интегрируемой гамильтоновой системы. Единственное различие состоит в том, что наряду с семейством торов, заполненных квазипериодическими обмотками, существуют торы, на которых имеются предельные циклы (в данном случае видны предельные циклы периода 4 и 6); один из примеров был разобран в [5].

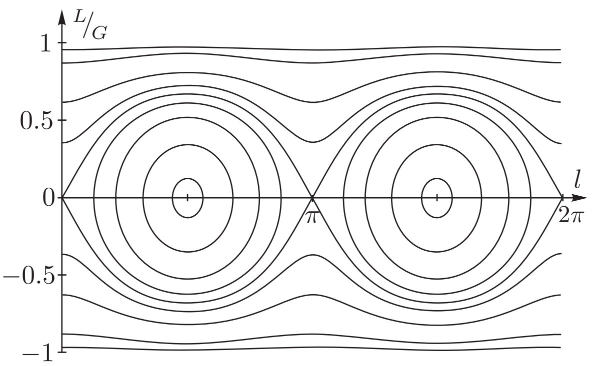


Рис. 3. Сечение Пуанкаре при $h = 10$, $g_0 = 0$ в задаче о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости ($I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, $m = 1$, $R = 3$, см. раздел 3.4).

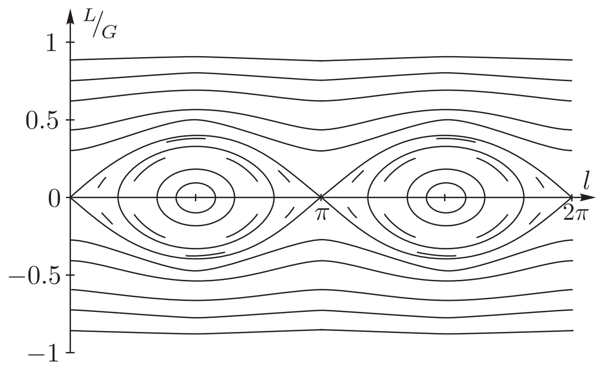


Рис. 4. Сечение Пуанкаре при $h = 1$, $g_0 = \pi$ в задаче о качении неуравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости без поля тяжести ($I_1 = 2.6$, $I_2 = 1.2$, $I_3 = 1.8$, $m = 1$, $R = 3$, $\boldsymbol{c} = (0, 0, 2.9)$, см. раздел 3.5). Разрывные кривые соответствуют траекториям на торах с предельными циклами.

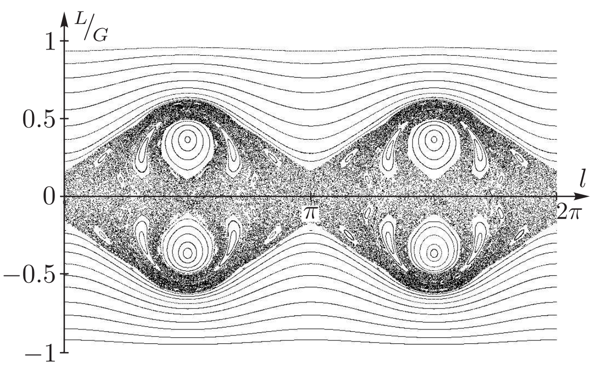


Рис. 5. Сечение Пуанкаре при $h = 100$, $g_0 = \pi$ в задаче о качении эллипсоида со специальным распределением масс по плоскости в поле тяжести ($I_1 = 40$, $I_2 = 64$, $I_3 = 100$, $m = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_g = 9.8$, см. раздел 3.3).

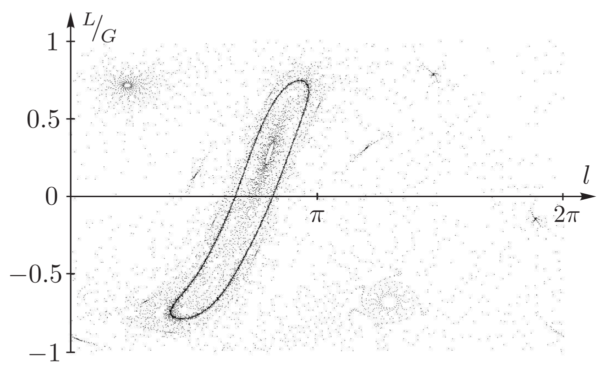


Рис. 6. Сечение Пуанкаре $h = 4$, $g_0 = {}^{\pi}\!/_2$ в задаче о качении неуравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по плоскости ($I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, $m = 1$, $R = 3$, $\boldsymbol{c} = (2, 2, 3)$, $\boldsymbol{S} = (1, -0.35, 0)$, см. раздел 3.5).

$\nexists F_2, \exists\mu$. Свойства траекторий системы аналогичны свойствам траекторий в неинтегрируемых двухстепенных гамильтоновых системах (хотя закон движения по траекториям отличается). Сосуществуют инвариантные КАМ-торы и стохастические слои вблизи неустойчивых периодических решений. Характерное сечение Пуанкаре в этом случае приведено на рисунке 5. По своим свойствам оно не отличается от сечения неинтегрируемой гамильтоновой системы. Так, наличие (консервативного) стохастического слоя свидетельствует об отсутствии дополнительного первого интеграла.

$\nexists F_2, \mu$. На поверхности уровня интеграла энергии $\mathcal{M}_h^3$ возникает достаточно общая диссипативная система. Поведение траекторий может быть как регулярным с простыми аттракторами (неподвижные точки, предельные циклы, торы), так и допускать типичный «диссипативный хаос», характеризующийся наличием квазиаттракторов, стран-

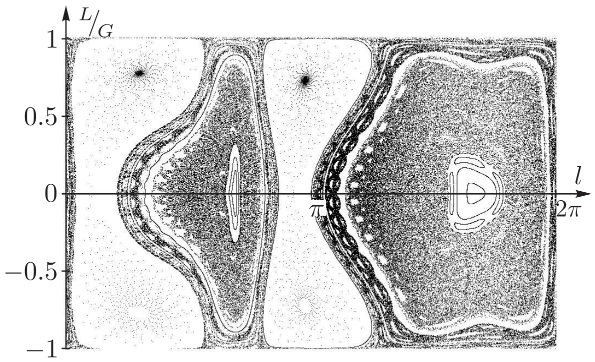


Рис. 7. Сечение Пуанкаре $h = 50$, $g_0 = {}^{\pi}\!/_2$ в задаче о качении неуравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости в поле тяжести ($I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, $m = 1$, $R = 3$, $\boldsymbol{c} = (1, 1.4, 0)$, $a_g = 9.8$, см. раздел 3.5).

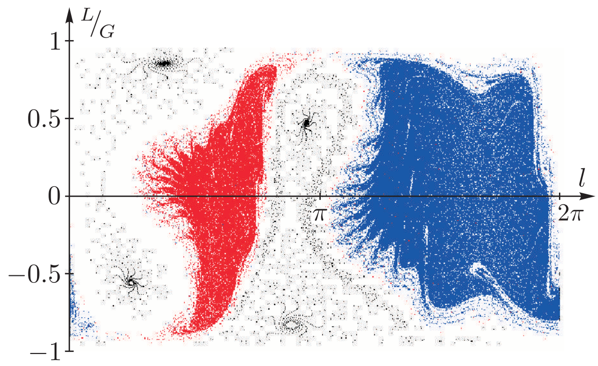


Рис. 8. Сечение Пуанкаре $h = 50$, $g_0 = {}^{\pi}\!/_2$ в задаче о качении неуравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости в поле тяжести ($I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$, $m = 1$, $R = 3$, $\boldsymbol{c} = (1, 1.5, 0.5)$, $a_g = 9.8$, см. разделы 3.5, A.3).

ных аттракторов лоренцевского типа и т. п. (литература в этой области очень обширна, укажем, например, [30, 54, 70]). Некоторые возможные сечения Пуанкаре в этом случае приведены на рисунках 6–8. На этих рисунках наибольшее сгущение точек (практически черные области) соответствует простым аттракторам — неподвижным точкам, циклам, предельной кривой; более светлые сгущения на больших площадях соответствуют стохастическим слоям (рис. 7), странному аттрактору (слева на рис. 8) и странному репеллеру (справа на рис. 8, он получен при интегрировании в обратном направлении по времени). Кроме того, на рисунке 7 видны инвариантные КАМ-кривые, которые охватывают консервативные неподвижные точки и циклы. Аттракторы и репеллеры на этих сечениях преобразуются друг в друга посредством инволюции обращения скоростей (см. подробнее приложение).

Результаты существования F_2 и μ мы приводим в виде таблиц, в которых отражены геометрические и динамические свойства тел (такое описание неголономных систем впервые было предложено в [41, 42]). Это позволяет не только наиболее наглядно представить всю иерархию динамики при качении тела по плоскости, но и зачастую предсказать новые результаты для «белых пятен» в этих таблицах (большинство результатов из этих таблиц содержится в [14]). Серый цвет в таблицах соответствует существованию данного тензорного инварианта при соответствующих геометрических и динамических ограничениях; те случаи, для которых в клетках отсутствует дата их нахождения, здесь приведены впервые.

Помимо первых интегралов и инвариантной меры, система может обладать другими тензорными инвариантами [27]: например, полями симметрий, пуассоновой структурой и т. п. В некоторых случаях эти тензорные инварианты возможны только после соответствующей замены времени (в частности, конформно-гамильтоновы системы после замены времени допускают пуассонову структуру).

Для систем (1.6), (1.13), как будет показано ниже, **существование инвариантной меры эквивалентно возможности представления в конформно-гамильтоновой форме**.

Таблица 1. Иерархия динамики при качении без верчения тела по плоскости

тензор инерции	динамически несимметричный случай $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$				осевая динамическая симметрия $I_1 = I_2,\ U = U(\gamma_3)$	полная динамическая симметрия $I_1 = I_2 = I_3 = \mu$
поверхность тела	шар		эллипсоид		тело вращения	произвольная
геометрические и динамические ограничения	центр масс совпадает с геометрическим центром	центр масс не совпадает с геометрическим центром	геометрические и динамические оси совпадают $\mathbf{I}_k = m \det \mathbf{B}(\alpha + a_k^{-2}) \times (\beta + a_k^2)^{-1}$, $k = 1, 2, 3$		геометрические и динамические оси совпадают и содержат центр масс	—
			$\mathbf{I} \neq m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}$	$\mathbf{I} = m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}$		
мера	$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2}$ Борисов, Мамаев, 2005	не существует	$\big(\chi_b + (\alpha\beta - 1)\det\mathbf{B}\big)^{1/2} \times$ $\times\big((\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^2(\Delta_b + \beta\boldsymbol{r}^2) -$ $-\det\mathbf{B}\big)(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^{-2} f^{-1}(\beta)$		$g_1(\gamma_3)^{1/2} g_2(\gamma_3)$ Борисов, Мамаев, 2008	$(\mu + m\boldsymbol{r}^2)(\mu + m(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^2)^{1/2}$
дополнительный интеграл	$(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma})$ Борисов, Мамаев, 2005	$(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) -$ $-2mR(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a})(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ Борисов, Мамаев, 2008	в общем случае не существует[1]	$\dfrac{\det \widetilde{\mathbf{I}}}{(\mu + m\boldsymbol{r}^2)}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega})$	$g_1^{1/2}(\gamma_3)\omega_3$ Борисов, Мамаев, 2008	в общем случае не существует[1]
интегрируемое добавление гиростата	возможно Борисов, Мамаев, 2005	не известно	не известно, но мера сохраняется		возможно вдоль оси динамической симметрии	не известно
обобщения и замечания	возможно интегрируемое добавление поля Бруна $-\frac{\varepsilon}{4}(\mathbf{J}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ Борисов, Мамаев, 2005					

$g_1(\gamma_3) = I_1\gamma_3^2 + I_3(1 - \gamma_3^2) + m(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^2$,
$g_2(\gamma_3) = I_1 + m\boldsymbol{r}^2$,
$\widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2\mathbf{E} - m\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}$ — тензор инерции относительно точки контакта,
$\mathbf{J} = \operatorname{diag}(I_1 + mR^2, I_2 + mR^2, I_3 + mR^2)$, R — радиус шара, $\boldsymbol{a}$ — смещение центра масс,
$\mathbf{B} = \operatorname{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$,
$\chi_b = (\beta^2 + \beta \operatorname{Tr}\mathbf{B} + \Delta_b)(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^2$,
$\Delta_b = \det\mathbf{B}(\alpha + \operatorname{Tr}\mathbf{B}^{-1})$,
$f(\beta) = (\beta + a_1^2)(\beta + a_2^2)(\beta + a_3^2)$.

[1]По результатам численного построения сечения Пуанкаре при некоторых фиксированных значениях параметров.

Таблица 2. Иерархия динамики при движении резинового тела по сфере

тензор инерции	динамически несимметричный случай $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$					динамическая симметрия $I_1 = I_2,\ U = U(\gamma_3)$		
поверхность тела	шар			эллипсоид $(\boldsymbol{r}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{r}) = 1$	тело с плоским участком	произвольное тело вращения	неуравновешенный шар	тело с плоским участком
геометрические и динамические ограничения	центр масс совпадает с геометрическим центром		центр масс не совпадает с геометрическим центром	$\mathbf{I} = m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}$	центр масс лежит в плоскости контакта ($z = 0$)	геометрическая и динамическая оси совпадают и содержат центр масс		
	$R \neq -2a$	$R = -2a$	$R = a$					
мера	$(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)^{\frac{1}{2\kappa}},\ \kappa = \dfrac{a}{a+R}$ Koiler, Ehlers, 2006		$\det\widetilde{\mathbf{I}}(\gamma, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\gamma)$	$\rho = \rho_{ell}$	$I_1I_2 + m\times$ $\times(I_1r_1^2 + I_2r_2^2)$	мера получается из решения дифференциального уравнения	$g_1(\gamma_3)^{\frac{1-kR}{2}}\times$ $\times g_2(\gamma_3)$	$\left(I_1 + m(r_1^2 + r_2^2 + z^2)\right)\times$ $\times e^{-\frac{kzm(r_1^2+r_2^2)}{2(I_1+mz^2)}}$
интеграл	не известно	$\dfrac{(\mathbf{J}\omega, \mathbf{J}\omega)}{(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)} + \dfrac{\det\mathbf{J}(\omega, \mathbf{J}\omega)(\mathbf{J}^{-1}\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)}{(\gamma, \mathbf{J}^{-1}\gamma)}$ Борисов, Мамаев, 2006	не известно	в общем случае не существует[1]	$(\widetilde{\mathbf{I}}\omega, \widetilde{\mathbf{I}}\omega)-$ $-m(r_1^2 + r_2^2)\times(\widetilde{\mathbf{I}}\omega, \omega)$	интеграл получается из решения дифференциального уравнения	$g_1(\gamma_3)^{\frac{1-kR}{2}}\omega_3$	$(r_1\omega_1 + r_2\omega_2)\times$ $\times e^{-\frac{kzm(r_1^2+r_2^2)}{2(I_1+mz^2)}}$
интегрируемое добавление гиростата	не известно, но мера сохраняется		не известно, но мера сохраняется	не известно, но мера сохраняется	не известно, но мера сохраняется	возможно вдоль оси динамической симметрии		
обобщения и замечания		возможно интегрируемое добавление поля $\varepsilon(\mathbf{J}^{-1}\gamma, \gamma)$						

$g_1(\gamma_3) = I_1\gamma_3^2 + I_3(1 - \gamma_3^2) + m(r, \gamma)^2$,
$g_2(\gamma_3) = I_1 + mr^2$,
$\widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2\mathbf{E} - m\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r}$ — тензор инерции относительно точки контакта,
$\mathbf{J} = \operatorname{diag}(I_1 + ma^2, I_2 + ma^2, I_3 + ma^2)$,
R — радиус шара, a — радиус опорной сферы, $k = {}^1\!/_a$,

$$\rho_{ell} = \frac{\det\widetilde{\mathbf{I}}}{(\mu + m\boldsymbol{r}^2)\det\boldsymbol{\Gamma}} \times \left(1 + k\frac{k\det\mathbf{B} - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^3(\operatorname{Tr}\mathbf{B} - \boldsymbol{r}^2)}{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^4}\right)^2.$$

[1]По результатам численного построения сечения Пуанкаре при некоторых фиксированных значениях параметров.

2. Условия существования инвариантной меры и конформно-гамильтоново представление

Прежде всего напомним, что система $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ обладает инвариантной мерой, если существует строго положительно определенная функция $\rho(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая уравнению Лиувилля

$$\operatorname{div}\big(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\big) = \sum_k \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} = 0.$$

Мы будем предполагать, что $\rho(\boldsymbol{x})$ — аналитическая (то есть инвариантная мера также аналитическая).

Как известно, если у системы $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ заданы две различные инвариантные меры $\rho_1(\boldsymbol{x})\,d^n\boldsymbol{x}$, $\rho_2(\boldsymbol{x})\,d^n\boldsymbol{x}$, то отношение их плотностей — первый интеграл:

$$\frac{\rho_1(\boldsymbol{x})}{\rho_2(\boldsymbol{x})} = \mathrm{const}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой $(\ln\rho_1)^{\cdot} = (\ln\rho_2)^{\cdot} = -\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, следующей из уравнения Лиувилля $\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0$.

Таким образом, произвол в выборе плотности инвариантной меры (определенной для заданных переменных) ограничивается лишь умножением на произвольную (аналитическую) функцию от первых интегралов системы.

При замене переменных $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ плотность инвариантной меры умножается на якобиан преобразования:

$$\widetilde{\rho}(\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x})\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Общие и наиболее грубые условия существования инвариантной меры у неголономных систем были получены в [26]. Для уравнений (1.6), (1.13) можно получить более сильные условия существования аналитической меры и указать случаи, когда она заведомо не существует. Отметим, что аналогичные приведенным ниже результаты затруднительно получить для задачи о классическом качении; указанные в [41] случаи существования инвариантных мер не препятствуют существованию их в более общих ситуациях.

2.1. Условия существования инвариантной меры для случая плоскости

Разрешим уравнения (1.6) относительно производных и представим их в символической форме:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}).$$

При этом уравнение Лиувилля для плотности инвариантной меры $\rho(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\,d\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\gamma}$ представляется в форме

$$\frac{1}{\rho}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{V}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{W}\right)\right) = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W_i}{\partial\omega_i},$$

где мы учли, что $\sum\limits_i \dfrac{\partial V_i}{\partial\gamma_i} = 0$. В правой части этого уравнения стоит линейная однородная по $\boldsymbol{\omega}$ функция, поэтому на уровне $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$, $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ получим тождество

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W_i}{\partial\omega_i} = \big(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}\big) = (\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}). \tag{2.1}$$

С учетом этого соотношения уравнение для инвариантной меры переписывается в форме

$$\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}),\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}\right)+\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{W}\right)=0, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})$ — заданные вектор-функции.

Укажем также, каким образом инвариантная мера $\rho(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})\,d\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\gamma}$ может быть явно ограничена на инвариантное многообразие $\mathcal{M}^4$ (1.16). Параметризуем вектор $\boldsymbol{\gamma}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\gamma}=\xi\boldsymbol{\gamma}_o(u,v), \tag{2.3}$$

где (u,v) — произвольные локальные координаты на сфере $\boldsymbol{\gamma}_o^2=1$, ξ — длина $\boldsymbol{\gamma}$. Обозначая скорости изменения этих переменных $\dot u,\dot v$, параметризуем вектор $\boldsymbol{\omega}$ как

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\gamma}}_o\times\boldsymbol{\gamma}_o+\eta\boldsymbol{\gamma}_o=\dot u\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}\times\boldsymbol{\gamma}_o+\dot v\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}\times\boldsymbol{\gamma}_o+\eta\boldsymbol{\gamma}_o.$$

Пользуясь тем, что многообразие (1.16) определяется соотношениями $\xi=1$, $\eta=0$, для плотности инвариантной меры на нем получим

$$\widetilde{\rho}\,(u,v,\dot u,\dot v)=\rho(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})\,\frac{\partial(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}{\partial(u,v,\dot u,\dot v,\xi,\eta)}\bigg|_{\xi=1,\eta=0}.$$

Вычисляя соответствующий якобиан, получим

$$\widetilde{\rho}=\rho\left(\boldsymbol{\gamma}_o,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}\right)^2. \tag{2.4}$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\rho=\rho(\boldsymbol{\gamma})$, то $\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}(u,v)$ не зависит от скоростей $\dot u$, $\dot v$.

Рассмотрим случай, когда плотность инвариантной меры $\rho=\rho(\boldsymbol{\gamma})$ зависит только от позиционных переменных $\boldsymbol{\gamma}$ (далее в теореме 2.1 будет показано, что это условие несущественно). Тогда справедливо следующее необходимое условие ее существования

Предложение 2.1. *Если система* (1.6) *обладает инвариантной мерой* $\rho(\boldsymbol{\gamma})\,d\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\gamma}$, *то функция* $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})$ *удовлетворяет соотношению*

$$G(\boldsymbol{\gamma})+\left(\boldsymbol{\gamma},\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\right)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\chi_i(\boldsymbol{\gamma})}{\partial\gamma_i},\quad G(\boldsymbol{\gamma})=\big(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})\big). \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как плотность зависит только от $\boldsymbol{\gamma}$ и уравнение (2.2) выполняется при произвольных $\boldsymbol{\omega}$, то справедливо соотношение

$$\boldsymbol{\gamma}\times\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})\right)=0.$$

Следовательно, вектор в скобках коллинеарен $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}}+\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})=g(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}. \tag{2.6}$$

Применяя операцию rot по переменным $\boldsymbol{\gamma}$ к обеим частям этого уравнения, получим

$$\left(\sum_i\frac{\partial\chi_i}{\partial\gamma_i}\right)\boldsymbol{\gamma}-\left(\boldsymbol{\gamma},\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\right)\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})-2\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})=\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\gamma}}\times\boldsymbol{\gamma}.$$

Домножая скалярно это соотношение на $\boldsymbol{\gamma}$ и выполняя несложные упрощения, получим (2.5). ■

Замечание. Уравнение (2.5) инвариантно относительно замены (в обеих его частях) $\boldsymbol{\chi} \to$ $\to f(\boldsymbol{\gamma}^2)\boldsymbol{\chi}$.

Замечание. При ограничении на сферу $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ в локальных переменных (2.3) система (2.6) представляется в виде

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial u} = -\big(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_o, \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}_o)\big), \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial v} = -\big(\boldsymbol{\gamma}_v \times \boldsymbol{\gamma}_o, \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}_o)\big),$$

при этом неизвестная функция $g(\boldsymbol{\gamma})$ определяется соотношением

$$g(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi}.$$

Таким образом, условия существования инвариантной меры $\rho(\boldsymbol{\gamma})$ эквивалентны условиям потенциальности векторного поля $\boldsymbol{\gamma}_o \times \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}_o)$ на сфере. Напомним, что, вследствие односвязности сферы S^2, если векторное поле нигде не обращается в бесконечность, то необходимое условие потенциальности, эквивалентное соотношению (2.5), является также достаточным.

Согласно (1.6) и (2.1), вектор-функция $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})$ не зависит от выбора потенциала $U(\boldsymbol{\gamma})$, поэтому справедливо

Предложение 2.2. *Если уравнения* (1.6) *допускают инвариантную меру* $\rho(\boldsymbol{\gamma})\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$ *при* $U = 0$, *то эта мера сохраняется и при произвольном потенциале* $U(\boldsymbol{\gamma})$.

Подробнее изучим структуру возможной инвариантной меры для качения при $U = 0$. В этом случае, согласно (1.6), $\boldsymbol{W}$ — однородная квадратичная функция по $\boldsymbol{\omega}$:

$$W_i(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j,k} a_{jk}(\boldsymbol{\gamma})\omega_i\omega_j. \tag{2.7}$$

Следовательно, подмногообразие

$$\mathcal{M}_0 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \mid \boldsymbol{\omega} = 0\} \subset \mathcal{M}^4$$

в этом случае целиком заполнено неподвижными точками системы (1.6).

Теорема 2.1. *Если система* (1.6) *при* $U = 0$ *допускает инвариантную меру* $\rho_1(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$ *с плотностью, аналитической в окрестности подмногообразия* $\mathcal{M}_0$, *то существует инвариантная мера с плотностью, зависящей лишь от позиционных переменных* $\rho_2(\boldsymbol{\gamma})\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$.

Доказательство. Если представим решение уравнения (2.2) в виде $\rho_1 = e^{\sigma(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})}$, то справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{V}\right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{W}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Согласно предположению теоремы, $\sigma(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ разлагается в ряд

$$\sigma(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \sigma_0(\boldsymbol{\gamma}) + \sum \sigma_i(\boldsymbol{\gamma})\omega_i + \sum \sigma_{ij}(\boldsymbol{\gamma})\omega_i\omega_j + O(|\boldsymbol{\omega}|^3).$$

Подставляя это разложение в (2.8), с учетом (2.7) получим

$$\left(\frac{\partial \sigma_0(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}\right) + O(|\boldsymbol{\omega}|^2) = 0.$$

Вследствие того, что функция ρ_1 задает плотность инвариантной меры, выражение в скобках обращается в нуль; таким образом, положив $\rho_2(\boldsymbol{\gamma}) = e^{\sigma_0(\boldsymbol{\gamma})}$, получим искомую инвариантную меру. ■

Для случая систем Чаплыгина без гироскопических членов теорема 2.1 была доказана в работе [34]. Очевидно, что, в соответствии со сказанным выше, отношение $\dfrac{\rho_1(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})}{\rho_2(\boldsymbol{\gamma})}$ является первым интегралом системы (1.6).

Комбинируя теорему 2.1 и предложения 2.1, 2.2, а также учитывая замечание на стр. 158 о достаточности условия (2.5), приходим к следующему общему *критерию существования инвариантной меры*.

Теорема 2.2. *Система* (1.6) *допускает инвариантную меру, аналитическую в окрестности многообразия* $\mathcal{M}_0 = \{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma}) \mid \boldsymbol{\omega} = 0\}$, *тогда и только тогда, когда справедливо тождество* (2.5).

Оказывается, что для системы (1.6) справедлив и более сильный результат: при наличии инвариантной меры она является конформно-гамильтоновой. Остановимся на этом более подробно.

2.2. Конформно-гамильтоново представление системы в случае качения по плоскости

Представление в форме системы Чаплыгина. Как и выше, в качестве координат на многообразии $\mathcal{M}^4$ выберем (локальные) координаты u, v на сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ и их скорости $\dot{u}$, $\dot{v}$, так что

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_o(u,v), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{u}\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u} + \dot{v}\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v},$$
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} = \dot{u}\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u} \times \boldsymbol{\gamma}_o + \dot{v}\,\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v} \times \boldsymbol{\gamma}_o.$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\boldsymbol{\gamma}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}, \quad \boldsymbol{\gamma}_v = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}, \quad \boldsymbol{\Omega}_u = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u} \times \boldsymbol{\gamma}_o, \quad \boldsymbol{\Omega}_v = \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v} \times \boldsymbol{\gamma}_o.$$

При этом вектор точки контакта на поверхности тела $\boldsymbol{r}$ и тензор $\widetilde{\mathbf{I}}$ также являются функциями криволинейных координат u, v, поэтому будем обозначать

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_o(u,v), \quad \boldsymbol{r}_u = \frac{\partial\boldsymbol{r}_o}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial\boldsymbol{r}_o}{\partial v}, \quad \widetilde{\mathbf{I}} = \widetilde{\mathbf{I}}_o(u,v).$$

Определим функцию Лагранжа системы (1.6) обычным образом:

$$\begin{gathered} L = T - U(\boldsymbol{\gamma}_o), \\ T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(G_{uu}\dot{u}^2 + 2G_{uv}\dot{u}\dot{v} + G_{vv}\dot{v}^2), \\ G_{uu} = (\boldsymbol{\Omega}_u, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\Omega}_u), \quad G_{uv} = (\boldsymbol{\Omega}_u, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\Omega}_v), \quad G_{vv} = (\boldsymbol{\Omega}_v, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\Omega}_v). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *Уравнения движения* (1.6) *в локальных переменных на* $\mathcal{M}^4$ *представляются в форме системы Чаплыгина*

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\displaystyle\cdot} - \frac{\partial L}{\partial u} = \dot{v}S, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right)^{\displaystyle\cdot} - \frac{\partial L}{\partial v} = -\dot{u}S, \\ S(u,v,\dot{u},\dot{v}) = \Big(\widetilde{\mathbf{I}}_o(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v) + m\big((\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{\gamma}_v) - (\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{\gamma}_u)\big)\boldsymbol{\gamma}_o \times \boldsymbol{r}_o, \boldsymbol{\Omega}_u\dot{u} + \boldsymbol{\Omega}_v\dot{v}\Big). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Доказательство. Для доказательства удобнее переписать уравнения (1.6) в виде

$$(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\cdot}} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \lambda_o \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}; \tag{2.11}$$

кроме того нам потребуются вторые производные векторов

$$\boldsymbol{\Omega}_{uu} = \boldsymbol{\gamma}_{uu} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{vv} = \boldsymbol{\gamma}_{vv} \times \boldsymbol{\gamma},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{uv} = \boldsymbol{\gamma}_{uv} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v, \quad \boldsymbol{\Omega}_{vu} = \boldsymbol{\gamma}_{uv} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}_v \times \boldsymbol{\gamma}_u,$$

где индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным, взятым в необходимом порядке. Укажем также пару тождеств, которые доказываются непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}'_u &= \boldsymbol{\Omega}_{uu}\dot{u} + \boldsymbol{\Omega}_{vu}\dot{v} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_u - 2\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v \dot{v}, \\ \boldsymbol{\omega}'_v &= \boldsymbol{\Omega}_{uv}\dot{u} + \boldsymbol{\Omega}_{vv}\dot{v} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_v + 2\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v \dot{v}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа (2.9), получим следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \Big(\boldsymbol{\Omega}_u, \big(\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{\cdot}}\Big) + \big(\dot{\boldsymbol{\Omega}}_u, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big), \quad \ldots;$$

здесь и всюду далее в доказательстве многоточием обозначено уравнение, получающееся из данного сменой индексов $u \to v$, $v \to u$. Аналогично, с учетом тождеств (2.12), находим

$$\frac{\partial L}{\partial u} = (\dot{\boldsymbol{\Omega}}_u, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega})\dot{v} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) - U'_u, \quad \ldots.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 2(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega})\dot{v} + \Big(\boldsymbol{\Omega}_u, \big(\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{\cdot}}\Big) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) + U'_u, \quad \ldots.$$

Подставим сюда $\big(\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)^{\boldsymbol{\cdot}}$ из уравнений движения (2.11) и воспользуемся тождествами, которые доказываются прямым вычислением

$$\left(\boldsymbol{\Omega}_u, \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right) = -U'_u, \quad \ldots,$$
$$\Big(\boldsymbol{\Omega}_u, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}\Big) = -(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega})\dot{v}, \quad \ldots,$$
$$\begin{gathered}\big(\boldsymbol{\Omega}_u, m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\big) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) - \\ -m\dot{v}\big((\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}_v) - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}_u) - (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}_v) + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}_u)\big), \quad \ldots.\end{gathered}$$

Приводя подобные и выполняя несложные преобразования, получим (2.10). ■

Заметим, что если поверхность тела — эллипсоид, то множитель $(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{\gamma}_v) - (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{\gamma}_u) = 0$.

Конформно-гамильтоново представление. Введем обобщенные импульсы системы (2.10) по формулам

$$P_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = G_{uu}\dot{u} + G_{uv}\dot{v}, \quad P_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = G_{uv}\dot{u} + G_{vv}\dot{v}.$$

Согласно классическому результату Чаплыгина [37] (см. подробнее [13, 41]), справедливо

Предложение 2.3. *Если система* (2.10) *допускает инвариантную меру* $N(u, v)\,dP_u\,dP_v\,du\,dv$, *то уравнения движения можно представить в конформно-гамильтоновой форме:*

$$\begin{gathered}\dot{u} = N\,\frac{\partial H}{\partial p_u}, \quad \dot{v} = N\,\frac{\partial H}{\partial p_v}, \quad \dot{p}_u = -N\,\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \dot{p}_v = -N\,\frac{\partial H}{\partial v},\\ p_u = NP_u, \quad p_v = NP_v,\\ H = E\big|_{\dot{u},\dot{v}\to p_u,p_v} = \frac{1}{2}\frac{\left(\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\right)}{N^2} + U(u, v),\end{gathered} \tag{2.13}$$

где $\boldsymbol{p} = (p_u, p_v)$, *а приводящий множитель с учетом* (2.4) *вычисляется по формуле*

$$N = \frac{\widetilde{\rho}(u, v)}{\det\mathbf{G}} = \rho(\boldsymbol{\gamma}_o)\,\frac{(\boldsymbol{\gamma}_o, \boldsymbol{\gamma}_u\times\boldsymbol{\gamma}_v)^2}{\det\mathbf{G}}, \quad \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G_{uu} & G_{uv}\\ G_{uv} & G_{vv}\end{Vmatrix}. \tag{2.14}$$

Представление на коалгебре $e(3)$. Чтобы иметь возможность естественным образом сравнивать различные (конформно)-гамильтоновы системы на двумерной сфере (точнее, на кокасательном расслоении T^*S^2), удобно записывать их в некоторых стандартных избыточных переменных. В качестве таких переменных, как правило, используют координаты шестимерного пространства $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{R}^6$, на котором задана пуассонова структура, соответствующая алгебре $e(3)$:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0;$$

кроме того, зафиксирована специальная орбита (симплектический лист) следующего вида:

$$\mathcal{M}_e = \{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mid \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0\}. \tag{2.15}$$

Для «вложения» системы (2.13) в коалгебру $e(3)$ воспользуемся известной из динамики твердого тела связью между скоростью и угловым моментом, которая применительно к конформно-гамильтоновым системам имеет вид

$$\boldsymbol{M} = N\,\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}.$$

Положим формально

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{u}\boldsymbol{\Omega}_u + \dot{v}\boldsymbol{\Omega}_v + \xi\boldsymbol{\gamma},$$

тогда при помощи правила дифференцирования сложных функций получим

$$\begin{gathered}p_u = N\,\frac{\partial L}{\partial\dot{u}} = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\Omega}_u\right) = (\boldsymbol{\Omega}_u, \boldsymbol{M}), \quad p_v = N\,\frac{\partial L}{\partial\dot{v}} = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\Omega}_v\right) = (\boldsymbol{\Omega}_v, \boldsymbol{M}),\\ p_\xi = N\,\frac{\partial L}{\partial\xi} = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}\right) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M}).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Обращая эти соотношения, с учетом $p_\xi = 0$ находим

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_u\times\boldsymbol{\gamma}_v)^{-1}(p_v\boldsymbol{\gamma}_u - p_u\boldsymbol{\gamma}_v). \tag{2.17}$$

Замечание. Пользуясь этим соотношением, можно показать, что в исходных переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ момент $\boldsymbol{M}$ задается соотношением

$$\boldsymbol{M} = N\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{\gamma}\right).$$

Чтобы выразить гамильтониан через $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$, необходимо подставить в (2.13) p_u и p_v из соотношений (2.16) и выразить координаты u, v на S^2 через компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$:

$$H = \left.\frac{G_{vv}(\boldsymbol{\Omega}_u, \boldsymbol{M})^2 + G_{uu}(\boldsymbol{\Omega}_v, \boldsymbol{M})^2 - 2G_{uv}(\boldsymbol{\Omega}_u, \boldsymbol{M})(\boldsymbol{\Omega}_v, \boldsymbol{M})}{2(G_{uu}G_{vv} - G_{uv}^2)N^2}\right|_{u,v\to\boldsymbol{\gamma}} + U(\boldsymbol{\gamma}). \tag{2.18}$$

При этом уравнения движения представляются в виде

$$N^{-1}\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad N^{-1}\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}. \tag{2.19}$$

Далее мы перенесем результаты о существовании меры и конформно-гамильтонового представления на случай качения тела по сфере. Соответствующие утверждения здесь вполне аналогичны, однако их доказательство в техническом плане более трудоемко.

2.3. Условия существования инвариантной меры для случая сферы

В данном случае уравнение Лиувилля, определяющее плотность инвариантной меры $\rho(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$, может быть представлено в сходной (со случаем плоскости) форме

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})\big), \boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega})\right) + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{W}\right) = 0, \tag{2.20}$$

где векторное поле $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})$ определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W_i}{\partial \omega_i} + \frac{\partial V_i}{\partial \gamma_i}\right) = (\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\omega}).$$

Как и выше, в данном случае также можно указать критерий существования инвариантной меры.

Теорема 2.4. *Если система* (1.13) *обладает инвариантной мерой, аналитической в окрестности многообразия* $\mathcal{M}_0 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \mid \boldsymbol{\omega} = 0\}$, *то выполнено соотношение*

$$\big(\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\gamma})\big) = 0, \quad \widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\gamma})\big), \tag{2.21}$$

где операция rot *выполняется по компонентам* γ_i. *Кроме того, плотность инвариантной меры зависит лишь от позиционных переменных.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что предложение 2.2 и теорема 2.1 остаются справедливыми и для системы (1.13). Таким образом, положим $\rho = \rho(\boldsymbol{\gamma})$ и из уравнения (2.20) получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\gamma}) = g(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma}.$$

Пользуясь соотношением $(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, которое выражает условие ортогональности скорости точки контакта и нормали к поверхности, можно показать, что $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$. Далее, поступая аналогично случаю плоскости, применим операцию rot к обеим частям этого уравнения и, домножая скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$, получим (2.21). ■

2.4. Конформно-гамильтоново представление системы в случае качения по сфере

Представление в форме системы Чаплыгина. Как и в случае плоскости, в качестве координат на многообразии $\mathcal{M}^4$ выберем (локальные) координаты u, v на сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ и их скорости $\dot{u}$, $\dot{v}$, так что

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_o(u, v), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{u}\,\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u} + \dot{v}\,\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v},$$
$$\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \times \boldsymbol{\gamma} = \dot{u}\left(\mathbf{\Gamma}\,\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}\right) \times \boldsymbol{\gamma}_o + \dot{v}\left(\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}\right) \times \boldsymbol{\gamma}_o,$$

где по-прежнему $\mathbf{\Gamma} = \left\| \delta_{ij} - k\,\dfrac{\partial r_i}{\partial \gamma_j} \right\|$. Для сокращения записи в данном случае введем аналогичные обозначения

$$\boldsymbol{\gamma}_u = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}, \quad \boldsymbol{\gamma}_v = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}, \quad \mathbf{\Omega}_u^k = \left(\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial u}\right) \times \boldsymbol{\gamma}_o, \quad \mathbf{\Omega}_v^k = \left(\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_o}{\partial v}\right) \times \boldsymbol{\gamma}_o,$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_o(u, v), \quad \boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}_o}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}_o}{\partial v}, \quad \widetilde{\mathbf{I}} = \widetilde{\mathbf{I}}_o(u, v),$$

где верхний индекс k соответствует кривизне опорной поверхности; так, при $k = 0$ имеем $\mathbf{I} = \mathbf{E}$, $\mathbf{\Omega}_u^0 = \mathbf{\Omega}_u$, $\mathbf{\Omega}_v^o = \mathbf{\Omega}_o$ и получим соотношения раздела 2.3. Функцию Лагранжа системы (1.13) определим обычным образом:

$$\begin{gathered} L = T - U(\boldsymbol{\gamma}_o), \\ T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(G_{uu}\dot{u}^2 + 2G_{uv}\dot{u}\dot{v} + G_{vv}\dot{v}^2), \\ G_{uu} = (\mathbf{\Omega}_u^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\mathbf{\Omega}_u^k), \quad G_{uv} = (\mathbf{\Omega}_u^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\mathbf{\Omega}_v^k), \quad G_{vv} = (\mathbf{\Omega}_v^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\mathbf{\Omega}_v^k). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Теорема 2.5. *Уравнения движения* (1.13) *в локальных переменных на* $\mathcal{M}^4$ *представляются в форме системы Чаплыгина*

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial u} = \dot{v}S, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial v} = -\dot{u}S, \\ S(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \Big(\widetilde{\mathbf{I}}_o(\boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v - k^2\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) + m\big((\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{\gamma}_v) - (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{\gamma}_u)\big)\boldsymbol{\gamma}_o \times \boldsymbol{r}_o, \mathbf{\Omega}_u^k\dot{u} + \mathbf{\Omega}_v^k\dot{v}\Big). \end{gathered} \tag{2.23}$$

Доказательство. Для доказательства, как и в случае плоскости, удобнее переписать уравнения (1.13) в виде

$$(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega})^{\cdot} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \lambda_o\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{M}_P. \tag{2.24}$$

Дифференцируя функцию Лагранжа, получим соотношения

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\cdot} = \Big(\mathbf{\Omega}_u^k, (\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega})^{\cdot}\Big) + (\dot{\mathbf{\Omega}}_u^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}).$$

Укажем тождество, которое доказывается непосредственной проверкой:

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{u}}' = \dot{\mathbf{\Omega}}_u^k - \big((\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{u}}) \times \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{u}} \times (\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{v}})\big)\dot{v}. \tag{2.25}$$

С учетом (2.25) находим:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = (\dot{\mathbf{\Omega}}_u^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}) - \big((\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma_u}) \times \boldsymbol{\gamma_v} + \boldsymbol{\gamma_u} \times (\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma_v}), \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)\dot{v} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) - U'_u.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial u} = \big((\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma_u}) \times \boldsymbol{\gamma_v} + \boldsymbol{\gamma_u} \times (\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\gamma_v}), \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)\dot{v} + \Big(\mathbf{\Omega}_u^k, \big(\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)^{\cdot}\Big) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) + U'_u.$$

Подставим сюда $\big(\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}\big)^{\cdot}$ из уравнений движения (2.24) и воспользуемся тождествами, которые доказываются прямым вычислением:

$$\Big(\mathbf{\Omega}_u^k, \boldsymbol{\gamma} \times \Big((\mathbf{\Gamma}^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\Big)\Big) = -U'_u,$$

$$\Big(\mathbf{\Omega}_u^k, \widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}\Big) = (\widetilde{\mathbf{I}}_o\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma_v} \times \boldsymbol{\gamma_u} - k(\boldsymbol{\gamma_v} \times \boldsymbol{r_u} + \boldsymbol{r_v} \times \boldsymbol{\gamma_u}) + k^2\boldsymbol{r_v} \times \boldsymbol{r_u})\dot{v}$$

$$\big(\mathbf{\Omega}_u^k, m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\big) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}'_u\boldsymbol{\omega}) - m\dot{v}\big((\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Omega}_v^k) - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Omega}_u^k) - (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{r}, \mathbf{\Omega}_v^k) + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}, \mathbf{\Omega}_u^k)\big).$$

Приводя подобные и выполняя несложные преобразования, получим (2.23). ■

Конформно-гамильтоново представление. Выполним преобразование Лежандра для системы уравнений (2.23):

$$P_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = G_{uu}\dot{u} + G_{uv}\dot{v}, \quad P_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = G_{uv}\dot{u} + G_{vv}\dot{v},$$

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}) + U(u, v), \quad \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G_{uu} & G_{uv} \\ G_{uv} & G_{vv} \end{Vmatrix}.$$

где $\boldsymbol{P} = (P_u, P_v)$. Исходная система уравнений может быть представлена в форме

$$\begin{gathered} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial P_u}, \quad \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial P_v}, \\ \dot{P}_u = -\frac{\partial H}{\partial u} + S\frac{\partial H}{\partial P_v}, \quad \dot{P}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} - S\frac{\partial H}{\partial P_u}, \end{gathered} \tag{2.26}$$

где S — функция, линейная по P_u, P_v.

Если выполнено соотношение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial P_u} + \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial P_v} = 0, \tag{2.27}$$

то уравнения допускают инвариантную меру $N(u, v)\, dP_v\, dP_v\, du\, dv$. Плотность инвариантной меры $N(u, v)$ связана с плотностью инвариантной меры исходной системы (1.13) следующим образом:

$$\rho = \frac{(\det \mathbf{G})N(u, v)}{\det \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v)(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_u \times \boldsymbol{\gamma}_v)}\bigg|_{u,v \to \boldsymbol{\gamma}}.$$

Предложение 2.4. *Если система* (1.13) *допускает инвариантную меру* $N(u,v)\,dP_u\,dP_v\,du\,dv$, *то уравнения движения можно представить в конформно-гамильтоновой форме:*

$$\begin{gathered}\dot u = N\,\frac{\partial H}{\partial p_u},\quad \dot v = N\,\frac{\partial H}{\partial p_v},\quad \dot p_u = -N\,\frac{\partial H}{\partial u},\quad \dot p_v = -N\,\frac{\partial H}{\partial v},\\ p_u = NP_u,\quad p_v = NP_v,\\ H = \frac{1}{2}N^{-2}(\boldsymbol{p},\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{p}) + U(u,v),\end{gathered}\tag{2.28}$$

где $\boldsymbol{p} = (p_u, p_v)$.

Конформно-гамильтоново представление на $\boldsymbol{e(3)}$. По аналогии со случаем плоскости, укажем переменные $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$, в которых заданная пуассонова структура соответствует алгебре $e(3)$ с зафиксированной специальной орбитой: $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$, $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{M}) = 0$.

Пользуясь вышеперечисленными соотношениями, получим, что $\boldsymbol{M}$ удовлетворяет соотношениям следующего вида:

$$p_u = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma_u}\times\boldsymbol{\gamma}) = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}},(\boldsymbol{\Gamma}\gamma_u)\times\boldsymbol{\gamma}\right),\quad p_v = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma_v}\times\boldsymbol{\gamma}) = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}},(\boldsymbol{\Gamma}\gamma_v)\times\boldsymbol{\gamma}\right),$$
$$p_\xi = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}) = N\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\gamma}\right) = 0.$$

Разрешив данную систему уравнений, находим:

$$\boldsymbol{M} = N(\det\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}.$$

В исходных переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ момент $\boldsymbol{M}$ задается соотношением

$$\boldsymbol{M} = N(\det\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}} - \left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\gamma}\right)\boldsymbol{\gamma}\right).$$

Гамильтониан, выраженный через $\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}$ (по аналогии со случаем плоскости), имеет вид

$$H = \left.\frac{G_{vv}(\boldsymbol{\Omega}_u,\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M})^2 + G_{uu}(\boldsymbol{\Omega}_v,\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M})^2 - 2G_{uv}(\boldsymbol{\Omega}_u,\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M})(\boldsymbol{\Omega}_v,\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{M})}{2(\det\boldsymbol{\Gamma})^2(G_{uu}G_{vv} - G_{uv}^2)N^2}\right|_{u,v\to\boldsymbol{\gamma}} + U(\boldsymbol{\gamma}).$$

3. Иерархия динамики при качении без верчения тела по плоскости

Выполняя анализ критериев (2.5) для различных поверхностей и динамических характеристик катящегося тела, укажем в явном виде случаи, когда инвариантная мера существует и приведем ее в явном виде. Там, где возможно, будет приведен явный вид дополнительного первого интеграла. При этом единственным ограничением (кроме случая, когда тензор инерции является шаровым или поверхность является поверхностью вращения) является то, что поверхность тела либо представляет собой эллипсоид (компактную квадрику), либо является поверхностью вращения. Соответствующие расчеты могут быть выполнены в любой системе аналитических вычислений (MAPLE, Mathematica и т. п.). Для некомпактных квадрик (гиперболоида и параболоида) соответствующие результаты тоже будут справедливы, однако физически их можно реализовать только для составной поверхности (например, взять сечение параболоида плоскостью).

Очевидно, справедлива следующая

Гипотеза. Если тело ограничено выпуклой аналитической поверхностью, обладающей тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, которые пересекаются по главным осям инерции, а центр масс лежит в общей точке пересечения этих плоскостей, то существует (аналитическое) соотношение между моментами инерции

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0,$$

при выполнении которого система (1.6) и (1.13) обладает инвариантной мерой.

3.1. Тело вращения с динамической симметрией ($I_1 = I_2 \neq I_3$)

Рассмотрим динамически симметричное твердое тело, то есть $I_1 = I_2$, поверхность которого также осесимметрична, причем динамическая и геометрическая оси симметрии совпадают. Уравнение, описывающее поверхность тела вращения, представляется в форме $f(r_1^2 + r_2^2, r_3) = 0$. Воспользуемся следующей параметризацией вектора $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})$:

$$\boldsymbol{r} = (f_1(\gamma_3)\gamma_1, f_1(\gamma_3)\gamma_2, f_2(\gamma_3)); \tag{3.1}$$

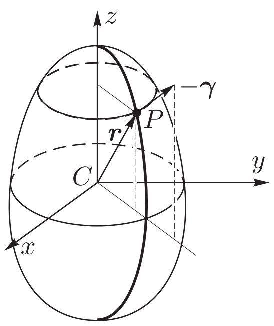


Рис. 9. Тело вращения.

здесь функции $f_1(\gamma_3), f_2(\gamma_3)$ определяются конкретным видом поверхности тела, но не являются независимыми. Пользуясь соотношением $(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, получим, что функции $f_1(\gamma_3), f_2(\gamma_3)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{df_2}{d\gamma_3} = f_1 - \frac{1-\gamma_3^2}{\gamma_3}\frac{df_1}{d\gamma_3}.$$

Инвариантная мера. Предполагая, что в данном случае плотность инвариантной меры зависит лишь от γ_3, уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\rho'(\gamma_3) - \rho(\gamma_3)\left(\frac{g_1'(\gamma_3)}{2g_1(\gamma_3)} + \frac{g_2'(\gamma_3)}{g_2(\gamma_3)}\right) = 0,\\ g_1 = I_1\gamma_3^2 + I_3(1-\gamma_3^2) + m(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^2, \quad g_2 = I_1 + m\boldsymbol{r}^2.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Решая это уравнение, находим, что инвариантная мера имеет вид [14]

$$\sqrt{g_1}g_2\,d\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\gamma}.$$

Конформно-гамильтоново представление. Пользуясь соотношениями (2.14), (2.16)–(2.18), уравнения движения можно представить в конформно-гамильтоновой форме (2.19), где приводящий множитель имеет вид $N = g_1^{-1/2}$, а соответствующие переменные $\boldsymbol{M}$ явно выражаются через $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ по формулам

$$\begin{gathered}M_1 = \frac{g_2(1-\gamma_3^2)\omega_1 + (g_2 - g_1)\gamma_1\gamma_3\omega_3}{(1-\gamma_3^2)\sqrt{g_1}},\\ M_2 = \frac{g_2(1-\gamma_3^2)\omega_2 + (g_2 - g_1)\gamma_2\gamma_3\omega_3}{(1-\gamma_3^2)\sqrt{g_1}}, \quad M_3 = \sqrt{g_1}\omega_3.\end{gathered} \tag{3.3}$$

На орбите $\mathcal{M}_e$ (2.15) гамильтониан может быть представлен в виде

$$H = \frac{g_2 M_3^2 + g_1(M_1\gamma_2 - M_2\gamma_1)^2}{2g_2(1-\gamma_3^2)}.$$

Для классической постановки о качении тела вращения по плоскости (и по сфере) явное конформно-гамильтоново представление возможно только для полностью приведенной системы и имеет ранг 2 [41, 49, 51, 64]. Попытки найти также представление для полной системы типа (1.12) приводит к сингулярности в пуассоновой структуре уже в простейшем случае симметричного шара со смещенным центром масс [1].

Дополнительный интеграл. Существует еще один дополнительный интеграл, который для произвольного тела вращения выражается в элементарных функциях [14]:

$$F_2 = \sqrt{g_1}\omega_3. \tag{3.4}$$

Замечание. Согласно соотношениям (3.3), при конформно-гамильтоновом представлении интеграл (3.4) является обычным интегралом Лагранжа

$$M_3 = \text{const}.$$

Поле симметрий. Система уравнений (1.6) в данном случае обладает также полем симметрий, которое соответствует вращению вокруг оси симметрии:

$$\boldsymbol{u} = \omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_2} - \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_1} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}. \tag{3.5}$$

Замечание. Пользуясь интегралом и полем симметрий, можно получить порядок системы, при этом редуцированная система представляется в форме гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Связь между существованием первых интегралов и полей симметрий в неголономных системах является популярной темой исследования, укажем здесь только работу [56].

Гиростатическое обобщение. При добавлении ротора с гиростатическим моментом $\boldsymbol{S} = (0, 0, s)$, направленным вдоль оси симметрии, мера не изменяется, а интеграл (3.4) принимает вид

$$F_2 = \sqrt{g_1}\omega_3 - s\int\frac{\gamma_3}{\sqrt{g_1}}\,d\gamma_3.$$

3.2. Тело с шаровым тензором инерции

Инвариантная мера. Если поверхность, ограничивающая тело, произвольна, но тензор инерции его шаровой $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$, то уравнение (2.2), определяющее инвариантную меру, существенно упрощается:

$$\frac{d}{dt}\ln\rho = \frac{2m(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}{\mu + m\boldsymbol{r}^2} + \frac{m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{\gamma}})}{\mu + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2}. \tag{3.6}$$

С учетом геометрического соотношения $(\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{\gamma}) = 0$ это уравнение легко интегрируется, и получаем инвариантную меру в виде

$$(\mu + m\boldsymbol{r}^2)(\mu + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2)^{1/2}d\boldsymbol{\omega}d\boldsymbol{\gamma}. \tag{3.7}$$

Аналогичный случай существует в задаче о качении тела с верчением [38, 41].

Конформно-гамильтоново представление. Как было показано выше (см. раздел 2), система в этом случае заведомо оказывается конформно-гамильтоновой, при этом приводящий множитель, замена переменных и гамильтониан имеют вид

$$N = \bigl(\mu + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2\bigr)^{-1/2},$$
$$\boldsymbol{M} = N\bigl(\mu\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) - m\bigl(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),\boldsymbol{\gamma}\bigr)\boldsymbol{\gamma}\bigr),$$
$$H = \frac{\bigl(\mu + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2\bigr)\boldsymbol{M}^2 + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{M})^2}{2(\mu + m\boldsymbol{r}^2)}.$$

Замечание. С геометрической точки зрения, момент выражается формулой $\boldsymbol{M} = N\mathbf{J}_{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\gamma}}$ — проекция тензора $\widetilde{\mathbf{I}}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\gamma}$.

3.3. Эллипсоид со специальным распределением масс

Рассмотрим эллипсоид, главные оси инерции которого совпадают с главными геометрическими осями. Тогда уравнение его поверхности представляется в виде $(\boldsymbol{r},\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{r}) = 1$, где $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$, a_1, a_2, a_3 — главные полуоси эллипсоида. Обратив гауссово отображение (1.5), получим явное выражение:

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}}.$$

Инвариантная мера. Пользуясь критерием существования инвариантной меры (предложение 2.1), получаем, что в данном случае соотношение (2.5) тождественно выполнено при условии:

$$(a_2^2 - a_3^2)(ma_1^2I_1 - I_2I_3) + (a_3^2 - a_1^2)(ma_2^2I_2 - I_1I_3) + (a_1^2 - a_2^2)(ma_3^2I_3 - I_1I_2) = 0. \qquad (3.8)$$

При фиксированных величинах полуосей a_1, a_2, a_3 условие (3.8) представляет собой уравнение однополостного гиперболоида относительно моментов инерции I_1, I_2, I_3. Параметризуем эту поверхность следующим образом:

$$I_k = m\det\mathbf{B}\frac{\alpha + a_k^{-2}}{\beta + a_k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \qquad (3.9)$$

где параметры α, β следует выбирать так, чтобы получались физически допустимые величины моментов инерции. Пользуясь этой параметризацией, получим инвариантную меру

$$\frac{(\chi_b + (\alpha\beta - 1)\det\mathbf{B})^{1/2}((\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2(\Delta_b + \beta\boldsymbol{r}^2) - \det\mathbf{B})}{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2}\,d\boldsymbol{\omega}\,d\boldsymbol{\gamma},$$

где

$$\chi_b = (\beta^2 + \beta\operatorname{Tr}\mathbf{B} + \Delta_b)(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2, \quad \Delta_b = \det\mathbf{B}(\alpha + \operatorname{Tr}\mathbf{B}^{-1}),$$

Из численных экспериментов следует (см. рис. 10), что в случае шарового тензора инерции $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ система оказывается неинтегрируемой.

Замечание. В такой форме меру можно получить, пользуясь следующим наблюдением: в данном случае функция $f(\boldsymbol{\gamma}) = \det\widetilde{\mathbf{I}}(\boldsymbol{\gamma},\widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})$ распадается на множители; если возвести эти множители в «подходящие» степени и перемножить, то получится искомая плотность инвариантной меры.

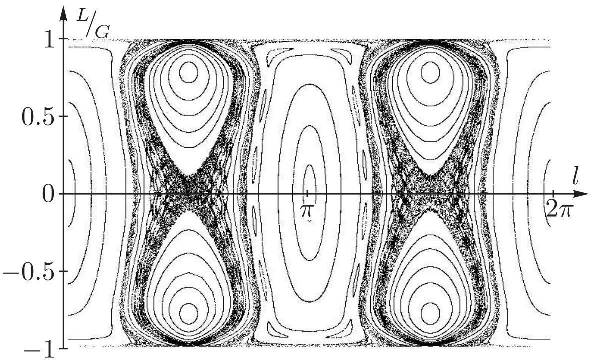


Рис. 10. Характерный вид сечения Пуанкаре системы (1.6) в случае эллипсоида с шаровым моментом инерции, удовлетворяющего условию (3.8) ($I_1 = 2$, $I_2 = 2$, $I_3 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $m = 1$, $h = 2$, $g_0 = \pi/2$).

Конформно-гамильтоново представление. Как было показано ранее, вследствие существования инвариантной меры уравнения движения эллипсоида со специальным распределением масс оказываются конформно-гамильтоновыми, при этом приводящий множитель и замена переменных (см. раздел 2.2) имеют вид

$$\begin{gathered}N = (\chi_b + (\alpha\beta - 1)\det\mathbf{B})^{-1/2},\\ M_i = \frac{N}{m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2 f(\beta)}((\beta + a_i^2)\gamma_i(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega})(\chi_b - \beta a_i^2(\beta + a_{jk}))-\\ - m\omega_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2((\boldsymbol{r}^2 - a_{jk})\chi_b - \boldsymbol{r}^2 f(\beta) - \det\mathbf{B}(\beta + a_{jk})(\alpha\beta - 1))),\end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$a_{jk} = a_j^2 + a_k^2, \quad i,j,k = 1,2,3, \quad f(\beta) = \prod_i (\beta + a_i^2).$$

Численные эксперименты (рис. 5, 10) показывают (см. также статью [2]), что в общем случае семейство (3.9) не допускает дополнительный интеграл.

Частный случай $\mathbf{I} = m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}$. Среди эллипсоидов (3.8) имеется исключительное однопараметрическое семейство вида

$$\mathbf{I} = m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}, \tag{3.11}$$

где μ — произвольный параметр, которое характеризуется тем, что приводящий множитель является постоянным: $N(u,v) = \mathrm{const}$. Следовательно, *уравнения движения — гамильтоновы* (*без замены времени*).

Для уравнений на алгебре $e(3)$ (см. раздел 2.2) замена (3.10) существенно упрощается и может быть представлена в стандартной форме

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega},$$

что является следствием тождества $\left(\dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma}\right) = 0$, которое выполняется для этого частного случая. При этом гамильтониан имеет вид

$$\begin{gathered}H = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{M}, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{M}\big) = \frac{1}{2}\frac{\mu(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2(\boldsymbol{M},\mathbf{A}\boldsymbol{M}) + m(\boldsymbol{M},\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^2}{(\mu + m\mathrm{Tr}\,\mathbf{B})(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2(\mu + m\boldsymbol{r}^2) + m^2\det\mathbf{B}},\\ \mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mu + m(a_2^2 + a_3^2), \mu + m(a_1^2 + a_3^2), \mu + m(a_1^2 + a_2^2)).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Отметим также, что в задаче о качении эллипсоида лишь при условии непроскальзывания данное семейство (3.11) также допускает инвариантную меру [39, 41].

Дополнительный интеграл. При условии (3.11) и при $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ система уравнений (1.6) имеет дополнительный интеграл

$$F_2 = \frac{\det \widetilde{\mathbf{I}}}{(\mu + m\boldsymbol{r}^2)}(\boldsymbol{M}, (\widetilde{\mathbf{I}}\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{I}})^{-1}\boldsymbol{M}). \tag{3.13}$$

Разделение переменных. На сфере Пуассона $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ введем сфероконические координаты (λ_1, λ_2) как корни уравнения:

$$\frac{\gamma_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{\gamma_2^2}{c_2 - \lambda} + \frac{\gamma_3^2}{c_3 - \lambda} = 0,$$

$$c_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1^2}, \quad c_2 = \frac{a_1^2 + a_3^2}{a_2^2}, \quad c_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3^2},$$

причем $c_3 < \lambda_2 < c_2 < \lambda_1 < c_1$. Исходные переменные $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$ выражаются через (λ_1, λ_2) следующим образом:

$$\gamma_i^2 = \frac{(c_i - \lambda_1)(c_i - \lambda_2)}{(c_i - c_j)(c_i - c_k)}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3),$$

$$M_i = \frac{1}{2\sqrt{(c_i - c_j)(c_i - c_k)}} \left(\frac{(\mu + \lambda_1\chi)\sqrt{(\lambda_2 - c_j)(\lambda_2 - c_k)}}{(1 + \lambda_1)\sqrt{(\lambda_1 - c_j)(\lambda_1 - c_k)}}\dot{\lambda}_1 + \frac{(\mu + \lambda_2\chi)\sqrt{(\lambda_1 - c_j)(\lambda_1 - c_k)}}{(1 + \lambda_2)\sqrt{(\lambda_2 - c_j)(\lambda_2 - c_k)}}\dot{\lambda}_2 \right),$$

где

$$\chi = \mu + m\mathrm{Tr}\,\mathbf{B}.$$

В новых координатах H и F_2 примут вид

$$H = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8} \left(\frac{\mu + \lambda_1\chi}{(\lambda_1 + 1)\Delta_c(\lambda_1)}\dot{\lambda}_1^2 - \frac{\mu + \lambda_2\chi}{(\lambda_2 + 1)\Delta_c(\lambda_2)}\dot{\lambda}_2^2 \right),$$

$$F_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4\mathrm{Tr}\mathbf{B}} \left(\frac{(\mu + \lambda_1\chi)(\mu + \lambda_2\chi)}{(\lambda_1 + 1)\Delta_c(\lambda_1)}\dot{\lambda}_1^2 + \frac{(\mu + \lambda_1\chi)(\mu + \lambda_2\chi)}{(\lambda_2 + 1)\Delta_c(\lambda_2)}\dot{\lambda}_2^2 \right),$$

где

$$\Delta_c(\lambda) = (c_1 - \lambda)(c_2 - \lambda)(c_3 - \lambda).$$

На фиксированном уровне первых интегралов $H = h$, $F_2 = f_2$ уравнения движения примут вид

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 = \frac{4(2h(\mu + \lambda_1\chi) - f_2\mathrm{Tr}\,\mathbf{B})\Delta_c(\lambda_1)(\lambda_1 + 1)}{\chi(\mu + \lambda_1\chi)(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

$$\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2 = \frac{4(2h(\mu + \lambda_2\chi) - f_2\mathrm{Tr}\,\mathbf{B})\Delta_c(\lambda_2)(\lambda_2 + 1)}{\chi(\mu + \lambda_2\chi)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

Как показывают численные эксперименты (см. рис. 11), дополнительный интеграл (3.13) не обобщается в случае добавления поля тяжести.

Замечание. Любопытно, что при условии (3.11) в осесимметричном случае сфероида ($b_1 = b_2$) уравнения движения (1.6) сильно упрощаются (при этом $g_1 = \mathrm{const}$), а дополнительный интеграл принимает вид

$$F_2 = \omega_3.$$

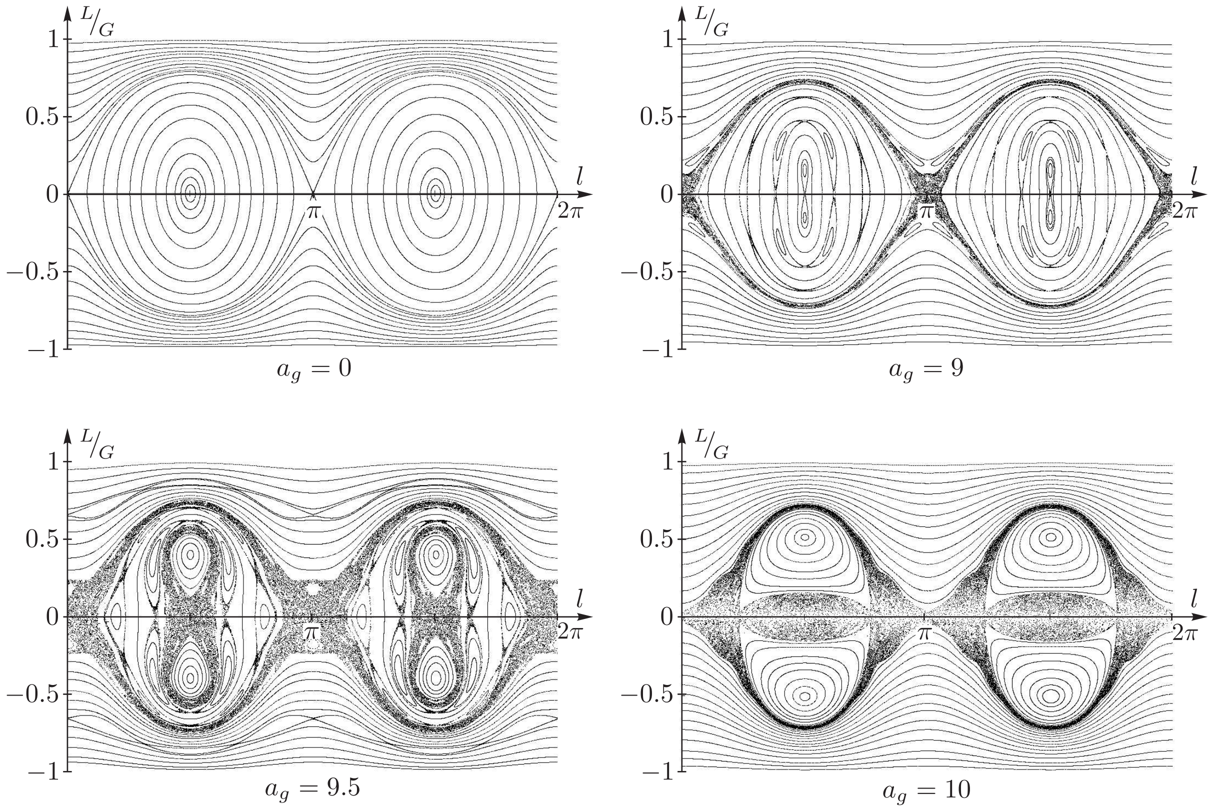


Рис. 11. Характерный вид сечения Пуанкаре системы (1.6) в случае эллипсоида, удовлетворяющего условию (3.10), в поле тяжести ($a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $I_1 = 25$, $I_2 = 36$, $I_3 = 49$, $m = 1$, $h = 10$, $g_0 = \pi$).

3.4. Уравновешенный динамически несимметричный шар

В этом разделе рассмотрим качение неоднородного, но уравновешенного шара, то есть будем полагать, что главные моменты инерции различны, а центр масс совпадает с геометрическим центром шара. Эта задача является «резиновым» аналогом классической задачи Чаплыгина о качении шара по абсолютно шероховатой плоскости [36]. Впервые эта система рассмотрена в [50, 57]. Из уравнения (1.5) получаем

$$\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma},$$

где R — радиус шара. Пользуясь этим соотношением и уравнением связи $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, находим

$$\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + mR^2\mathbf{E}.$$

Это приводит к упрощению уравнений движения (1.6):

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{3.14}$$

где

$$\lambda_0 = -\frac{\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}.$$

Как отмечено в [14, 43], при $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ эта система эквивалентна неголономной системе Веселовой [20].

Инвариантная мера. Инвариантная мера системы (3.14) представляется в виде [14, 57]

$$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{1/2}\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}. \tag{3.15}$$

Конформно-гамильтоново представление. В данном случае, согласно разделу 2.2, приводящий множитель, замена переменных и гамильтониан имеют вид

$$N = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2},$$
$$\boldsymbol{M} = N\big(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}\big),$$
$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{M}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{M}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{M})^2.$$

Замечание. В работе [10] указано другое конформно-гамильтоново представление на коалгебре $e(3)$, при этом приводящий множитель тот же, а новые переменные $\widetilde{\boldsymbol{M}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и гамильтониан имеют вид

$$\begin{gathered} \widetilde{\boldsymbol{M}} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{N}\mathbf{J}^{1/2}\boldsymbol{\omega}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = N\mathbf{J}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}, \\ H = \frac{1}{2}\frac{(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{J}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}{\det \mathbf{J}}\widetilde{\boldsymbol{M}}^2, \end{gathered} \tag{3.16}$$

для этих переменных также выполнено $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}^2 = 1$, $(\widetilde{\boldsymbol{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}) = 0$.

Дополнительный интеграл. В случае $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ система (3.14) допускает дополнительный интеграл [12]:

$$F_2 = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}).$$

Характерный вид сечения Пуанкаре при $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ приведен на рисунке 3.

Дополнительные интегралы полной системы. Напомним, что полная система, описывающая эволюцию вращения шара (см. раздел 1.1), получается добавлением уравнений для направляющих косинусов:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.17}$$

Как и в известной задаче о качении шара Чаплыгина, уравнения движения (3.14), (3.17) допускают два дополнительных линейных по скоростям интеграла

$$(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{const}, \quad (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = \mathrm{const}. \tag{3.18}$$

Таким образом, *вектор* $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ *постоянен в неподвижных осях* (см. также [58]).

Гиростатическое обобщение и добавление поля Бруна. При добавлении ротора с гиростатическим моментом $\boldsymbol{S}$ инвариантная мера (3.15) не изменяется, а дополнительный интеграл обобщается следующим образом:

$$F_2 = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{S}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{S}) - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\gamma})^2.$$

Обобщение дополнительного интеграла на случай поля Бруна имеет вид

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\varepsilon}{4}(\mathbf{J}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + \frac{\varepsilon \det \mathbf{J}}{2}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Существование этих интегралов следует из изоморфизма задачи о качении «резинового» шара Чаплыгина с системой Веселовой, которая тоже допускает интегрируемое добавление гиростата и поля Бруна [43].

3.5. Неуравновешенный динамически несимметричный шар

Рассмотрим теперь обобщение предыдущей системы на случай, когда у динамически несимметричного шара ($I_i \neq I_j$) центр масс не совпадает с геометрическим центром. Из уравнения (1.5) получаем

$$\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{c}$ — вектор, соединяющий центр масс с геометрическим центром (см. рис. 12).

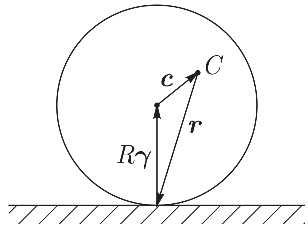


Рис. 12. Шар со смещенным центром на плоскости.

В этом случае система не удовлетворяет критерию (2.5), поэтому, согласно теореме 2.2, инвариантной меры с аналитической плотностью у данной системы не существует. Необходимый критерий (2.5) выполнен лишь в рассмотренных ранее частных случаях осевой симметрии ($I_1 = I_2$, $c_1 = c_2 = 0$), полной динамической симметрии ($I_1 = I_2 = I_3$) и уравновешенного шара ($\boldsymbol{c} = 0$).

Некоторые характерные сечения Пуанкаре для этой системы приведены на рисунках 4, 6, 7, 8, A.4.

Дополнительный интеграл. В рассматриваемом случае при $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ существует один дополнительный интеграл [12]:

$$F_2 = (\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) - 2mR(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{c})(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}). \tag{3.19}$$

Таким образом, несимметричный шар со смещенным центром масс обладает необходимым числом интегралов для интегрируемости. Кроме того, как показано в работе [5], в рассматриваемой системе слоение фазового пространства на инвариантные многообразия (см. рис. 4) в точности совпадает с соответствующим слоением в интегрируемой системе Эйлера, описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой (см. подробнее, например, [10]). Однако инвариантной меры не существует, что, как показано в [5], связано с существованием предельных циклов на инвариантных торах.

Как показывают численные эксперименты, дополнительный интеграл (3.19) не обобщается на случаи добавления гиростата (рис. 6) и поля тяжести (рис. 7, 8, A.3)

4. Иерархия динамики при качении без верчения тела по сфере

4.1. Тело вращения с динамической симметрией ($I_1 = I_2 \neq I_3$)

Как и в случае плоскости, рассмотрим прежде всего динамически симметричное твердое тело, поверхность которого осесимметрична, причем динамическая и геометрическая оси симметрии совпадают. Как и ранее (см. раздел 3.1), вектор $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\gamma})$ параметризуем следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = (f_1(\gamma_3)\gamma_1, f_1(\gamma_3)\gamma_2, f_2(\gamma_3)).$$

Напомним также (см. раздел 1.2), что k — это кривизна опорной поверхности с учетом знака.

Инвариантная мера. В данном случае также существует инвариантная мера $\rho\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$, плотность которой зависит лишь от γ_3, то есть $\rho(\gamma_3)$, для которой получим уравнение

$$\left(\ln\frac{\rho}{g_2\sqrt{g_1}(1-kf_1)^3(1-kf_2')}\right)' + k\frac{f_1(1-kf_2')}{2(1-kf_1)}\,\frac{g_1'}{g_1} = 0, \tag{4.1}$$

где штрих обозначает дифференцирование по γ_3, а функции g_1, g_2 по-прежнему имеют вид

$$g_1 = I_1\gamma_3^2 + I_3(1-\gamma_3^2) + m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\gamma})^2, \quad g_2 = I_1 + m\boldsymbol{r}^2.$$

Таким образом, мы видим, что в общем случае при $k \neq 0$, произвольной поверхности и распределении масс уравнение (4.1) не представляется в форме уравнения в полных дифференциалах, а его решение дается квадратурой. При этом соотвествующее конформно-гамильтоново представление (2.28) будет иметь достаточно громоздкую структуру. Поэтому ниже мы приводим его лишь для простейшего случая шара со смещенным центром масс. Отметим, что для классического качения (с верчением) [41] уравнение типа (4.1) (указанное С. А. Чаплыгиным) всегда разрешимо.

Дополнительный интеграл. Существует также линейный интеграл

$$F_2 = A(\gamma_3)\omega_3,$$

который обобщает интеграл (3.4), где функция $A(\gamma_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\ln\frac{A}{\sqrt{g_1}(1-kf_1)}\right)' + k\frac{f_1(1-kf_2')}{2(1-kf_1)}\,\frac{g_1'}{g_1} = 0. \tag{4.2}$$

Шар со смещенным центром масс. В этом случае функции ρ, A могут быть выражены в элементарных функциях, при этом

$$f_1 = -R, \quad f_2 = -R\gamma_3 - c,$$
$$g_1 = I_1\gamma_3^2 + I_3(1-\gamma_3^2) + m(R + c\gamma_3)^2, \quad g_2 = I_1 + m(R^2 + 2Rc\gamma_3 + c^2),$$

где R — радиус шара, c — расстояние от центра масс до геометрического центра. Из уравнений (4.1), (4.2) получаем:

$$\rho = g_1^{\frac{1+kR}{2}} g_2, \quad A = g_1^{\frac{1+kR}{2}}.$$

Приводящий множитель, переменные $\boldsymbol{M}$ и гамильтониан, позволяющие представить уравнения в конформно-гамильтоновой форме на коалгебре $e(3)$, имеют вид

$$N = g_1^{-\frac{1-kR}{2}},$$
$$M_1 = \frac{(1+kR)(g_2\omega_1(1-\gamma_3^2) + (g_2-g_1)\omega_3\gamma_3\gamma_1)}{g_1^{(1-kR)/2}(1-\gamma_3^2)},$$
$$M_2 = \frac{(1+kR)(g_2\omega_2(1-\gamma_3^2) + (g_2-g_1)\omega_3\gamma_3\gamma_2)}{g_1^{(1-kR)/2}(1-\gamma_3^2)}, \quad M_3 = (1+kR)\omega_3 g_1^{(1+kR)/2},$$
$$H = \frac{g_2M_3^2 + g_1(M_1\gamma_2 - M_2\gamma_1)^2}{2(1-\gamma_3^2)(1+kR)^2 g_2 g_1^{kR}}.$$

Диск с шаровым моментом инерции. Рассмотрим диск, у которого центр масс совпадает с геометрическим центром и все главные моменты инерции одинаковы:

$$f_1 = \frac{-R}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \quad f_2 = 0, \quad I_1 = I_3 = \mu, \quad g_1 = \mu + mR^2, \quad g_2 = \mu + mR^2(1-\gamma_3^2).$$

В этом случае, разрешив уравнения (4.1), (4.2), находим:

$$\rho = \left(\mu + mR^2(1-\gamma_3^2)\right)^{d_1}\left(kR + \sqrt{1-\gamma_3^2}\right)^{d_2}(1-\gamma_3^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{kR^2\sqrt{\mu m}}{\mu + mk^2R^4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{mR^2(1-\gamma_3^2)}{\mu}}\right)},$$

$$F_2 = \left(\mu + mR^2(1-\gamma_3^2)\right)^{d_1}\left(kR + \sqrt{1-\gamma_3^2}\right)^{d_3}(1-\gamma_3^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{kR^2\sqrt{\mu m}}{\mu + mk^2R^4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{mR^2(1-\gamma_3^2)}{\mu}}\right)}\omega_3,$$

$$d_1 = \frac{\mu + 2mk^2R^4}{2(\mu + mk^2R^4)}, \quad d_2 = \frac{3\mu + 2mk^2R^4}{\mu + mk^2R^4}, \quad d_3 = \frac{\mu}{k^2R^4m + \mu}.$$

Как видим на сфере, в отличие от плоскости, даже в простейших случаях мера является сложной трансцендентной функцией. Открытым остается вопрос о том, существует ли поверхность осесимметричного тела, для которой плотность инвариантной меры является алгебраической функцией или выражается в специальных функциях определенного вида. Этот вопрос родственен исследованному в [32] о явном виде интегралов при качении твердого тела по плоскости в классической постановке (еще раз отметим, что уравнение для меры в последнем случае всегда разрешимо). Таким образом, в «резиновой» постановке существуют проблемы для явного нахождения инвариантной меры, а в классической — для первых интегралов. Впрочем, следует заметить, что эти вопросы не имеют отношения к динамике, для которой существенен только факт аналитичности соответствующих тензорных законов сохранения.

4.2. Эллипсоид со специальным распределением масс

Аналогично случаю плоскости, рассмотрим эллипсоид, у которого главные оси инерции совпадают с главными геометрическими осями.

Как и выше, в этом случае

$$(\boldsymbol{r}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{r}) = 1, \quad \boldsymbol{r} = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}},$$

здесь $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2)$, где a_i — главные полуоси эллипсоида.

Инвариантная мера. Пользуясь критерием существования инвариантной меры (см. теорему 2.4), находим, что необходимое условие (2.21) выполняется в случае $\mathbf{I} = m\mathbf{B} + \mu\mathbf{E}$. В этом случае для инвариантной меры $\rho\, d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}$ плотность имеет вид

$$\rho = \frac{\det\widetilde{\mathbf{I}}}{(\mu + m\boldsymbol{r}^2)\det\boldsymbol{\Gamma}}\left(1 + k\frac{k\det\mathbf{B} - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^3(\operatorname{Tr}\mathbf{B} - \boldsymbol{r}^2)}{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})^4}\right)^2.$$

Гамильтоново представление. Любопытно, что в данном случае приводящий множитель является постоянным, а следовательно, уравнения движения — гамильтоновы. Замена переменных и гамильтониан имеют вид

$$\boldsymbol{M} = \det \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^{-1}\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega},$$
$$H = \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{M}, \mathbf{\Gamma}\widetilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{M})}{(\det \mathbf{\Gamma})^2}.$$

В отличие от случая плоскости (см. раздел 3.3), на сфере эта система в общем случае не является интегрируемой, о чем свидетельствует представленное нами на рисунке 13 сечение Пуанкаре.

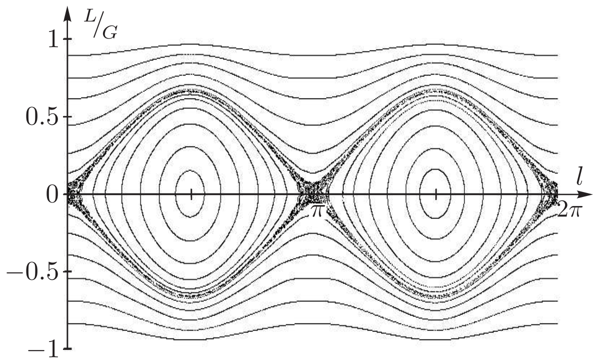


Рис. 13. Характерный вид сечения Пуанкаре системы (1.13) в случае эллипсоида со специальным распределением масс ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $m = 1$, $k = 1$, $h = 8$, $g_0 = \pi$).

4.3. Уравновешенный динамически несимметричный шар

Рассмотрим уравновешенный динамически несимметричный шар на сфере; как и в случае плоскости, здесь $\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma}$, при помощи уравнения связи $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ находим

$$\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + mR^2\mathbf{E}.$$

Это приводит к упрощению уравнений движения (1.13), так что они могут быть представлены в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0\boldsymbol{\gamma} + \kappa\boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \kappa\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},$$
$$\lambda_0 = -\frac{\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}, \quad \kappa = \frac{1}{1 - kR}. \tag{4.3}$$

При $k \to 0$ получим $\kappa = 1$, то есть возвращаемся к плоскому случаю (3.14).

Инвариантная мера. Инвариантная мера найдена в работе [57] и в рассматриваемых переменных записывается в форме

$$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{\frac{1}{2\kappa}} d\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{\gamma}.$$

Конформно-гамильтоново представление. В данном случае приводящий множитель, замена переменных и гамильтониан имеют вид

$$\begin{gathered} N = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma})^{\frac{1}{2\kappa}-1}, \\ \boldsymbol{M} = N\big(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}\big), \\ H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{\frac{2\kappa-1}{\kappa}}(\boldsymbol{M}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{M}). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Замечание. Как и для случая плоскости, в работе [14] указано еще одно конформно-гамильтоново представление на коалгебре $e(3)$, для которого приводящий множитель N тот же, что и в (4.4), а замена переменных и гамильтониан имеют вид

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \frac{\rho\sqrt{\det \mathbf{J}}}{\kappa}\mathbf{J^{1/2}}\boldsymbol{\omega}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\mathbf{J}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}}{\rho},$$

$$H = \frac{\kappa^2}{2\det \mathbf{J}}(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{J}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})^{1/\kappa}\boldsymbol{M}^2,$$

где $\rho = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{\frac{1}{2\kappa}}$.

Как показывают численные эксперименты, в общем случае задача о качении без верчения динамически несимметричного шара по сфере неинтегрируема (см. рис. 14).

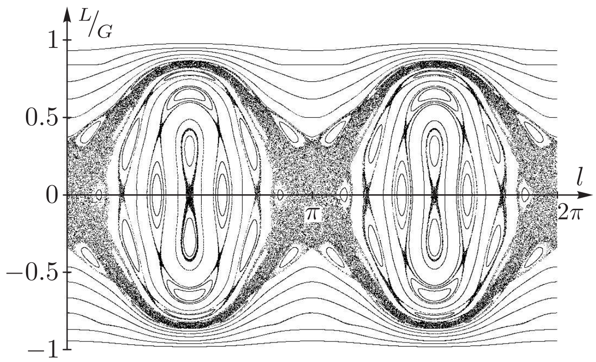


Рис. 14. Характерный вид сечения Пуанкаре системы (1.13) в случае уравновешенного динамически несимметричного шара ($I_1 = 1$, $I_2 = 5$, $I_3 = 7$, $m = 1$, $R = 1$, $h = 8$, $k = -1$, $g_0 = \pi$).

Дополнительный интеграл $\boldsymbol{\kappa = -1}$. Помимо случая плоскости (то есть $\kappa = 1$), дополнительный интеграл существует при $\kappa = -1$:

$$F_2 = \frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma})}.$$

С физической точки зрения, случай $\kappa = -1$ соответствует варианту обката, изображенному на рисунке 2c, причем радиус полости вдвое больше радиуса неподвижной сферы: $2a = R$. Несложно показать, что интеграл F_2 может быть обобщен на случай добавления потенциала поля $U = \varepsilon(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$:

$$F_2 = \frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J^{-1}}\boldsymbol{\gamma})} + 2\varepsilon \det \mathbf{J}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}).$$

4.4. Качение шара по сфере равного радиуса

Пусть при внешнем обкате (см. рис. 2а) по неподвижной сфере катится шар того же радиуса:

$$\boldsymbol{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{c}, \quad k = \frac{1}{R}.$$

Как известно, в этом случае связи (1.11) становятся голономными (см., например, [18, 55, 62]). При этом в общей системе (1.12) возникнут геометрические интегралы, которые можно представить в матричной форме [18]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_\gamma \mathbf{Q} = \mathrm{const}, \quad \mathbf{S}_\gamma = (\mathbf{E} - 2\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}),$$

где $\mathbf{S}_\gamma$ — симметрия относительно плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\gamma}$. Следовательно, конфигурационное пространство $\mathcal{M} = S^2 \times SO(3)$ расслаивается на инвариантные интегральные двумерные поверхности

$$\mathcal{M}_B = \left\{ (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{S}_\gamma \mathbf{B}) \in \mathcal{M} \mid \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \right\},$$

что позволяет представить систему (1.13) в гамильтоновой форме, то есть приводящий множитель $N = \mathrm{const}$.

Инвариантная мера. В случае произвольного динамически несимметричного шара находим инвариантную меру:

$$\det \widetilde{\mathbf{I}} (\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{I}}^{-1} \boldsymbol{\gamma}) d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\gamma}. \tag{4.5}$$

Гамильтоново представление. Соответствующая замена переменных (см. раздел 2.4) и гамильтониан имеют вид

$$\boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{\gamma} \times (\widetilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}),$$
$$H = \frac{(\mathrm{Tr}\mathbf{J} - (\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{J}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}) + 2mR(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{c}))\boldsymbol{M}^2 - (\boldsymbol{M}, \mathbf{J}\boldsymbol{M})}{\det \widetilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{\mathbf{J}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})},$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + m(R^2 + \boldsymbol{c}^2)\mathbf{E} - m\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c}, \quad \widetilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + 2mR(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{c})\mathbf{E}.$$

Как показывают численные эксперименты, в общем случае эта система неинтегрируема (см. рис. 14).

4.5. Тело с плоским участком

Рассмотрим задачу о качении тела, имеющего плоское основание, по внешней поверхности неподвижной сферы (см. рис. 15). Для качения с прокручиванием случаи существования инвариантной меры и первых интегралов указаны в [41] (исторически эта задача восходит к П. Воронцу).

В общем случае подвижные оси $Cxyz$ можно подобрать так, что ось $\boldsymbol{e}_z$ окажется перпендикулярна плоскому участку, и тензор инерции имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

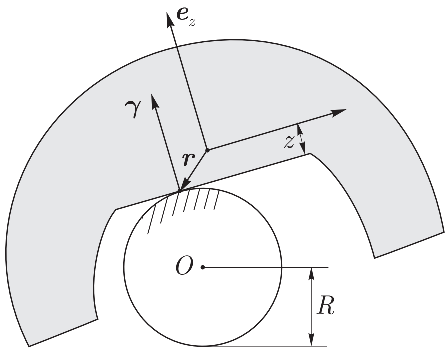


Рис. 15. Тело с плоским участком.

При наличии недиагональных элементов I_{13}, I_{23} система не допускает инвариантной меры (подобно задаче Суслова [26]), поэтому всюду в дальнейшем будем полагать

$$\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3).$$

Вектор нормали $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ оказывается постоянным (то есть уравнения (1.13) неприменимы), и для описания динамики необходимо использовать компоненты r_1, r_2 вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, z)$, где $z = \mathrm{const}$ — высота центра масс тела относительно плоского участка. Вследствие соотношения $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0$, из уравнений (1.11), (1.13) находим

$$\dot{r}_1 = \frac{\omega_2}{k}, \quad \dot{r}_2 = -\frac{\omega_1}{k}, \quad \omega_3 = 0, \tag{4.6}$$

а уравнения движения для ω_1, ω_2 принимают вид

$$\begin{gathered}
\dot{\omega_1} = \frac{mr_2(mz^2 + I_2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + mkz(r_1\omega_1 + r_2\omega_2)(\omega_2(I_2 + m(z^2 + r_1^2)) - mr_1r_2\omega_1)}{kg_3}, \\
\dot{\omega_2} = -\frac{mr_1(mz^2 + I_1)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + mkz(r_1\omega_1 + r_2\omega_2)(\omega_1(I_1 + m(z^2 + r_2^2)) - mr_1r_2\omega_2)}{kg_3}, \\
g_3 = \big(I_1 + m(z^2 + r_2^2)\big)\big(I_2 + m(z^2 + r_1^2)\big) - m^2r_1^2r_2^2.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Инвариантная мера. Можно выделить два случая, когда существует инвариантная мера.

– $z = 0$: *центр масс лежит в плоскости контакта, а тензор инерции* $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ *диагонален.* Инвариантная мера:

$$\big(I_1I_2 + m(I_1r_1^2 + I_2r_2^2)\big)\, d\omega_1\, d\omega_2\, dr_1\, dr_2.$$

– $I_1 = I_2$: *динамически симметричное тело*, инвариантная мера принимает вид

$$\big(I_1 + m(r_1^2 + r_2^2 + z^2)\big)e^{-\frac{kzm(r_1^2+r_2^2)}{2(I_1+mz^2)}}\, d\omega_1\, d\omega_2\, dr_1\, dr_2.$$

Предложение 4.1. *Пусть для тела с плоским участком* $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $I_1 \neq I_2$ *и* $z \neq 0$, *тогда инвариантной меры* $\rho\, d\omega_1\, d\omega_2\, dr_1\, dr_2$ *с аналитической плотностью* $\rho(r_1, r_2)$, *зависящей лишь от позиционных переменных, не существует.*

Доказательство. Действительно, полагая $\rho = \rho(r_1, r_2)$, можно показать, что уравнение Лиувилля примет вид

$$\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial r_1} + \xi_1\right)\dot{r}_1 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial r_2} + \xi_2\right)\dot{r}_2 = 0, \tag{4.8}$$

где

$$\xi_1 = \frac{r_1}{g_3}\left(I_1 + mz^2 - \frac{kz}{2}(I_2 + m\boldsymbol{r}^2)\right), \quad \xi_2 = \frac{r_2}{g_3}\left(I_2 + mz^2 - \frac{kz}{2}(I_1 + m\boldsymbol{r}^2)\right).$$

Таким образом, условие разрешимости уравнения (4.8) совпадает с условием потенциальности векторного поля на плоскости $\big(\xi_1(r_1, r_2), \xi_2(r_1, r_2)\big)$. Можно показать, что это поле потенциально лишь в двух случаях: $I_1 = I_2$ либо $z = 0$. ■

Дополнительный интеграл. Дополнительный интеграл существует в рассмотренных ранее двух случаях:

– $z = 0$, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$: $\quad F_2 = (\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - m(r_1^2 + r_2^2)(\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$,

– $I_1 = I_2$, $z \neq 0$: $\quad F_2 = (r_1\omega_1 + r_2\omega_2)e^{-\frac{kzm(r_1^2 + r_2^2)}{2(I_1 + mz^2)}}$.

Разделение переменных для случая $z = 0$, $I_1 \neq I_2$. Определим эллиптические координаты λ_1, λ_2 на плоскости (r_1, r_2) как корни уравнения

$$\frac{mr_1^2}{\lambda - I_1} + \frac{mr_2^2}{\lambda - I_2} = 1. \tag{4.9}$$

Исходные переменные выражаются через λ_1, λ_2 по формулам

$$r_1^2 = \frac{(\lambda_1 - I_2)(I_2 - \lambda_2)}{m(I_2 - I_1)}, \quad r_2^2 = \frac{(\lambda_1 - I_1)(\lambda_2 - I_1)}{m(I_2 - I_1)}, \quad \lambda_1 > I_2 > \lambda_2 > I_1.$$

В новых координатах H и F_2 примут вид

$$H = \frac{m^{-1}k^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{8}\left(\frac{\lambda_1\dot{\lambda}_1^2}{(\lambda_1 - I_1)(\lambda_1 - I_2)} - \frac{\lambda_2\dot{\lambda}_2^2}{(\lambda_2 - I_1)(\lambda_2 - I_2)}\right),$$

$$F_2 = \frac{m^{-1}k^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{4}\left(\frac{(I_1 + I_2 - \lambda_2)\lambda_1\dot{\lambda}_1^2}{(\lambda_1 - I_1)(\lambda_1 - I_2)} - \frac{(I_1 + I_2 - \lambda_1)\lambda_2\dot{\lambda}_2^2}{(\lambda_2 - I_1)(\lambda_2 - I_2)}\right).$$

На фиксированном уровне интегралов $H = h$, $F_2 = f$ уравнения движения примут вид

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - I_1)(\lambda_1 - I_2)(8f + 4h(\lambda_1 - I_1 - I_2))}{k^2m^{-1}\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

$$\left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2 = \frac{(\lambda_2 - I_1)(\lambda_2 - I_2)(8f + 4h(\lambda_2 - I_1 - I_2))}{k^2m^{-1}\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2},$$

то есть переменные λ_1 и λ_2 являются разделяющими.

Гиростатические обобщения. В случае $I_1 = I_2$ и $z \neq 0$ возможно добавить ротор с гиростатическим моментом $\boldsymbol{S} = (0, 0, s)$, направленным вдоль оси динамической симметрии. В этом случае инвариантная мера не изменяется, а дополнительный интеграл принимает вид

$$F_2 = (r_1\omega_1 + r_2\omega_2)e^{-\frac{kzm(r_1^2+r_2^2)}{2(I_1+mz^2)}} - \frac{s}{mz}\left(1 + e^{-\frac{kzm(r_1^2+r_2^2)}{2(I_1+mz^2)}}\right).$$

Приложение

Иерархия динамики неголономных систем, связанная с обратимостью

Оказывается, что для объяснения ряда явлений в исследуемых в данной работе системах помимо рассматриваемых выше законов сохранения интегралов и инвариантной меры важную роль играют *дискретные симметрии*. Среди них особенно важными являются *инволютивные преобразования с обращением времени*, которые связаны с конформно-гамильтоновым поведением в окрестности периодических траекторий.

Начнем с наиболее показательного примера. Так, выше было показано, что система (1.6) в случае трехосного эллипсоида обладает инвариантной мерой лишь при выполнении специального условия (3.8). С другой стороны, когда это условие не выполняется, при построении отображения Пуанкаре во многих случаях фазовый портрет практически неотличим от портрета отображения, сохраняющего площадь (см. рис. A.1 a, b, c). Более того, не удается (численно) обнаружить какие-либо грубые проявления диссипации (то есть аттракторы и репеллеры), так как мультипликаторы всех найденных неподвижных точек и циклов удовлетворяют соотношению $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Вопрос. *Чем объясняются консервативные свойства (по крайней мере обнаруживаемые визуально) системы в случае, когда отсутствует инвариантная мера?*

Аналогичная ситуация встречается также в задаче о качении динамически несимметричного шара, центр масс которого лежит на одной из главных динамических осей (рис. A.4 a, b, c).

A.1. Инволюции и локальная консервативность

Симметрии и инволюции потока. Напомним основные определения и конструкции; поскольку большинство результатов достаточно широко известны, доказательства мы, как правило, не приводим.

В дальнейшем большинство результатов мы будем иллюстрировать на примере задачи о качении уравновешенного эллипсоида (уравновешенность означает, что центр масс совпадает с геометрическим центром). В данном семействе систем удобно выделить следующие частные случаи, различающиеся количеством дискретных симметрий тела:

1. *полностью симметричный эллипсоид* — главные оси инерции совпадают с главными геометрическими осями, группа симметрий D_{2h},
2. *частично симметричный эллипсоид* — только одна из главных осей инерции совпадает с главной геометрической осью, группа симметрий C_{2h},

3. *полностью несимметричный эллипсоид* — все главные геометрические и динамические оси различны.

Замечание. Эллипсоид выбран нами в связи с тем, что это наиболее простая (после сферы) поверхность. Все сказанное ниже остается справедливым для тел с произвольной поверхностью, обладающей соответствующей симметрией.

Уравнения движения (1.6) представим в форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \tag{A.1.1}$$

где $\boldsymbol{x} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Напомним, что отображение фазового пространства $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})$ называется

— *симметрией*, если

$$\big(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})\big),$$

— *инволюцией, обращающей время*, если

$$\big(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})\big)^{\boldsymbol{\cdot}} = -\boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{id}, \tag{A.1.2}$$

где id — тождественное отображение, $\circ$ – обозначает композицию отображений. Хотя в дальнейшем рассматриваемые нами в примерах преобразования симметрии оказываются инволютивными, мы, чтобы не возникло недоразумений, будем называть *инволюциями* только те инволютивные преобразования, которые обращают время. Некоторые авторы [45] называют инволюции R-симметриями (от слова reversible).

Системы, допускающие хотя бы одну инволюцию, называются *обратимыми*.

Оба преобразования отображают всякую траекторию системы в траекторию, причем симметрия сохраняет направление движения по ней, а инволюция — меняет на противоположное. Вследствие этого в симметричных и обратимых системах всякое инвариантное множество $\mathcal{M}$ (например, неподвижная точка, периодическая орбита и т. п.) либо является симметричным, то есть $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, либо имеет парное инвариантное множество $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{M})$. Причем если исходное множество $\mathcal{M}$ для обратимых систем было аттрактором, то $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{M})$ — репеллер, и наоборот.

Примеры. Вне зависимости от формы поверхности система (1.6) допускает стандартную инволюцию — *обращение скоростей*:

$$\boldsymbol{R}^{(0)}\colon \gamma_1 \to \gamma_1, \gamma_2 \to \gamma_2, \gamma_3 \to \gamma_3, \omega_1 \to -\omega_1, \omega_2 \to -\omega_2, \omega_3 \to -\omega_3.$$

В случае полностью симметричного эллипсоида система (1.6) допускает также группу симметрий D_{2h}, включающую в себя следующие преобразования (время при этом не меняется):

три поворота на 180° $(i = 1, 2, 3,\ j, k \neq i)$:

$$\boldsymbol{\Pi}^{(i)}\colon \gamma_i \to \gamma_i,\ \gamma_j \to -\gamma_j,\ \gamma_k \to -\gamma_k,\ \omega_i \to \omega_i,\ \omega_j \to -\omega_j,\ \omega_k \to -\omega_k, \tag{A.1.3}$$

три плоскости симметрии $(i = 1, 2, 3,\ j, k \neq i)$:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}\colon \gamma_i \to -\gamma_i,\ \gamma_j \to \gamma_j,\ \gamma_k \to \gamma_k,\ \omega_i \to \omega_i,\ \omega_j \to -\omega_j,\ \omega_k \to -\omega_k, \tag{A.1.4}$$

инверсия:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}\colon \gamma_1 \to -\gamma_1,\ \gamma_2 \to -\gamma_2,\ \gamma_3 \to -\gamma_3,\ \omega_1 \to \omega_1,\ \omega_2 \to \omega_2,\ \omega_3 \to \omega_3. \tag{A.1.5}$$

Симметрии данной системы обладают двумя отличительными свойствами:

1. *все симметрии инволютивны*: $\mathbf{\Sigma}^{(i)}\circ\mathbf{\Sigma}^{(i)}=\mathbf{\Pi}^{(i)}\circ\mathbf{\Pi}^{(i)}=\mathbf{\Sigma}^{(0)}\circ\mathbf{\Sigma}^{(0)}=\mathrm{id}$,
2. *все симметрии коммутируют с инволюцией* $\boldsymbol{R}^{(0)}$.

Отсюда следует, что

композиция любой из симметрий $(A.1.3)$, $(A.1.4)$, $(A.1.5)$ *с инволюцией* $\boldsymbol{R}^{(0)}$ *является инволюцией с обращением времени (то есть R-симметрией).*

Запишем симметрии и инволюции для полностью симметричного эллипсоида в явном виде на многообразии $\mathcal{M}^4=\{\boldsymbol{\gamma}^2=1,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})=0\}$, пользуясь переменными Андуайе (см. раздел 1.3). Это понадобится нам в дальнейшем для построения инволюций сечения Пуанкаре. Обозначая композиции

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{(i)}\circ\mathbf{\Sigma}^{(i)},\quad \widetilde{\mathbf{\Pi}}^{(i)}=\boldsymbol{R}^{(i)}\circ\mathbf{\Pi}^{(i)},$$

получаем

симметрии:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{\Pi}^{(1)}(L,l,g)=(-L,\pi-l,\pi+g), & \mathbf{\Pi}^{(2)}(L,l,g)=(-L,-l,\pi+g), & \mathbf{\Pi}^{(3)}(L,l,g)=(L,\pi+l,g),\\
\mathbf{\Sigma}^{(1)}(L,l,g)=(-L,\pi-l,g), & \mathbf{\Sigma}^{(2)}(L,l,g)=(-L,-l,g), & \mathbf{\Sigma}^{(3)}(L,l,g)=\\
 & \mathbf{\Sigma}^{(0)}(L,l,g)\to(L,l,\pi+g), & \quad=(L,\pi+l,\pi+g),
\end{array}\tag{A.1.6}$$

инволюции:

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{R}^{(0)}(L,l,g)=(-L,\pi+l,-g),\quad \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(0)}(L,l,g)=(-L,\pi+l,\pi-g),\\
\widetilde{\mathbf{\Pi}}^{(1)}(L,l,g)=(L,-l,\pi-g),\quad \widetilde{\mathbf{\Pi}}^{(2)}(L,l,g)=(L,\pi-l,\pi-g),\quad \widetilde{\mathbf{\Pi}}^{(3)}(L,l,g)=(-L,l,-g),\\
\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(1)}(L,l,g)=(L,-l,-g),\quad \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(2)}(L,l,g)=(L,\pi-l,-g),\quad \widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(3)}(L,l,g)=(-L,l,\pi-g),
\end{array}\tag{A.1.7}$$

причем для всех этих преобразований $G\to G$.

В случае частично симметричного эллипсоида уравнения (1.6) также допускают группу симметрий C_{2h}, которая является подгруппой предыдущей группы симметрий. Так, если положим, что геометрические и динамические оси повернуты вокруг оси $\boldsymbol{e}_3$, то среди преобразований $(A.1.7)$ сохраняются следующие:

симметрии $\mathbf{\Pi}^{(3)}$, $\mathbf{\Sigma}^{(3)}$, $\mathbf{\Sigma}^{(0)}$,
инволюции $\boldsymbol{R}^{(0)}$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}^{(3)}$, $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(3)}$, $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}^{(0)}$.

Для полностью несимметричного эллипсоида в общем случае (если поворот геометрических осей относительно динамических достаточно произвольный, не $\pi/4$ и т. п.) уравнения движения не допускают (очевидных) дискретных симметрий.

Можно показать, что в общем случае справедливо

Предложение. *Пусть поверхность катящегося по плоскости тела допускает преобразование симметрии, такое, что под действием этого преобразования положение центра масс и направление главных осей инерции не меняется; тогда система* (1.6) *допускает преобразование симметрии.*

Так, например, эллипсоид, главные оси инерции которого совпадают с главными геометрическими осями, а центр масс лежит в одной из главных плоскостей, допускает отражение $\boldsymbol{\Sigma}^{(p)}$ относительно соответствующей главной плоскости. Причем вследствие того, что данная зеркальная симметрия инволютивна и коммутирует с $\boldsymbol{R}^{(0)}$, оказывается, что система (1.6) в этом случае допускает инволюцию $\boldsymbol{R}^{(0)} \circ \boldsymbol{\Sigma}^{(p)}$.

Симметрии и инволюции отображения Пуанкаре. Как мы видели выше, одним из важнейших инструментов исследования рассматриваемых систем (и, в частности, системы (1.6)), является сечение Пуанкаре (см. раздел 1.3). Поэтому рассмотрим подробнее симметрии и инволюции двумерных отображений

$$\Phi\colon \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}^2. \tag{A.1.8}$$

Напомним, что преобразование $\boldsymbol{\sigma}\colon \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}^2$ называется

— *симметрией*, если

$$\Phi \circ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \circ \Phi,$$

— *инволюцией, обращающей отображение*, если

$$\Phi \circ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \circ \Phi^{-1}, \quad \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma} = \mathrm{id}\,.$$

Предположим, что (A.1.8) является (изоэнергетическим) отображением Пуанкаре системы (A.1.1) (см. подробно раздел 1.3). Тогда всякая симметрия либо инволюция $\boldsymbol{\Sigma}$ потока (A.1.1) естественным образом порождает симметрию или инволюцию его отображения Пуанкаре, если в качестве сечения $\mathcal{M}_0^2 \subset \mathcal{M}^4$ выбрано подмногообразие, инвариантное относительно этого преобразования: $\boldsymbol{\Sigma}(\mathcal{M}_0^2) = \mathcal{M}_0^2$.

В частности, если поток допускает несколько нетривиальных симметрий и инволюций $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, то теоретически можно выбрать такие сечения $\mathcal{M}_0^2$, которые инвариантны относительно всех преобразований $\boldsymbol{\Sigma}_i$ одновременно (фактически эти поверхности «склеиваются» из дискретных множеств $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{x}_0)$ для различных начальных точек $\boldsymbol{x}_0$).

Примеры. Так, для сечений Пуанкаре (1.18), описанных в разделе 1.3, среди многообразий $\mathcal{M}^2_{h,g_0} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^4 \mid E(\boldsymbol{x}) = h, g(\boldsymbol{x}) = g_0\}$ отсутствуют сечения, которые были бы инвариантны одновременно относительно всех инволюций (A.1.7).

Если в этом случае мы выберем $g_0 = 0$ либо $g_0 = \pi$, то (учитывая, что g — угловая переменная, а энергия не меняется под действием (A.1.7)) получим сечения $\mathcal{M}^2_{h,0}$ и $\mathcal{M}^2_{h,\pi}$, инвариантные относительно инволюций $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}^{(3)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(1)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(2)}$, $\boldsymbol{R}^{(0)}$. Они порождают соответствующие инволюции отображения Пуанкаре, действие которых в переменных $\left(l, {}^L\!/_G\right)$ представляется следующим образом:

$$\begin{gathered}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}\left(l, \frac{L}{G}\right) = \left(l, -\frac{L}{G}\right), \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}\left(l, \frac{L}{G}\right) = \left(-l, \frac{L}{G}\right), \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}\left(l, \frac{L}{G}\right) = \left(\pi - l, \frac{L}{G}\right), \\ \boldsymbol{r}^{(0)}\left(l, \frac{L}{G}\right) = \left(\pi + l, -\frac{L}{G}\right).\end{gathered} \tag{A.1.9}$$

Аналогично при $g_0 = {}^\pi\!/_2$ либо $g_0 = {}^{3\pi}\!/_2$ сечения $\mathcal{M}^2_{h,\pi/2}$ и $\mathcal{M}^2_{h,3\pi/2}$ инвариантны относительно преобразований $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}^{(1)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Pi}}^{(2)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(3)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(0)}$. Соответствующие инволюции отображения Пуанкаре имеют вид

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)}\left(l,\frac{L}{G}\right)=\left(l,-\frac{L}{G}\right),\quad \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(1)}\left(l,\frac{L}{G}\right)=\left(-l,\frac{L}{G}\right),\quad \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(2)}\left(l,\frac{L}{G}\right)=\left(l,-\frac{L}{G}\right),$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\left(l,\frac{L}{G}\right)=\left(\pi+l,-\frac{L}{G}\right). \tag{A.1.10}$$

Замечание. Если в данном случае взять объединение любой пары поверхностей первого и второго типа (например, $\mathcal{M}^2_{h,0}\cup\mathcal{M}^2_{h,\pi/2}$, $\mathcal{M}^2_{h,0}\cup\mathcal{M}^2_{h,3\pi/2}$, и т. п.), то получим сечение (несвязное), на котором действуют все инволюции одновременно.

Семейства инволюций и консервативные периодические решения отображений. Ниже мы будем обсуждать следствия существования инволюций лишь для двумерных отображений (в нашем случае — сечений Пуанкаре).

Пусть $\boldsymbol{x}_*$ — неподвижная точка обратимого двумерного отображения Φ, инвариантная относительно инволюции, то есть $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}_*)=\boldsymbol{x}_*$; такие неподвижные точки называются *симметричными.* Множество неподвижных точек инволюции является подмногообразием, которое мы будем обозначать $\operatorname{Fix}\boldsymbol{\sigma}$.

Замечание. В большинстве работ (см., например, [49, 63] и библиографию в них) обратимыми называются не всякие отображения Φ, допускающие обращающую инволюцию $\boldsymbol{\sigma}$, а лишь те, которые удовлетворяют двум дополнительным условиям:

1. фазовое пространство четномерное: $\Phi\colon\mathcal{M}^{2n}\to\mathcal{M}^{2n}$,
2. размерность подмногообразия $\operatorname{Fix}\boldsymbol{\sigma}$ равна n.

Как будет показано ниже, в нашем случае отображение Пуанкаре и большинство инволюций (A.1.9) и (A.1.10) удовлетворяют этим свойствам.

Предложение. *Собственные значения λ_1, λ_2 линеаризации отображения Φ в окрестности симметричной неподвижной точки удовлетворяют соотношению*

$$\lambda_1\lambda_2=1.$$

Аналогичным свойством обладают мультипликаторы неподвижных точек для сохраняющих площадь отображений.

Таким образом, в окрестности симметричных неподвижных точек поведение траекторий обратимого отображения близко к поведению траекторий отображения, сохраняющего площадь. Поэтому такие точки мы будем называть локально-консервативными.

Если, кроме того, симметричная неподвижная точка — эллиптическая, то при выполнении некоторых общих условий (аналог условий закручивания и нерезонансности) отображение Φ обладает в окрестности $\boldsymbol{x}_*$ однопараметрическим канторовым семейством инвариантных кривых (КАМ-торы), симметричных относительно инволюции [35, 68]. Следовательно, такие точки обладают свойством устойчивости по Ляпунову.

Покажем, что помимо симметричных неподвижных точек аналогичным свойством консервативности обладают многие периодические решения. Для краткости будем называть точку $\boldsymbol{x}$ *периодической, если она принадлежит периодическому решению*, то есть $\Phi^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ для некоторого n.

Напомним [49], что всякая инволюция $\boldsymbol{\sigma}$ порождает счетное семейство инволюций, обращающих отображение Φ:

$$\boldsymbol{\sigma}_n=\Phi^n\boldsymbol{\sigma},\quad \Phi\circ\boldsymbol{\sigma}_n=\boldsymbol{\sigma}_n\circ\Phi^{-1},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{A.1.11}$$

при этом $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_0$.

Для каждой из этих инволюций рассмотрим множество ее неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_k = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\sigma}_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$.

Предложение. *Если $k \neq m$, то множество $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_k \cap \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_m$ состоит из точек, принадлежащих периодическим решениям, период которых делит разность $k - m$.*

Обратно, если $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_k$ — периодическая точка Φ, то $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_m$ для некоторого $m \neq k$.

Такие периодические точки, возникающие как пересечение множеств неподвижных точек инволюций (A.1.11), называются *симметричными периодическими точками*, а соответствующие им орбиты — *симметричными периодическими решениями.* Можно показать, что всякая симметричная периодическая орбита пересекает одно из множеств $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}$ либо $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_1$.

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{x}$ — симметричная периодическая точка Φ, тогда одна из ее итераций принадлежит какому-либо из следующих множеств:*

$$\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_{2k} \cap \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_{2k+1} \cap \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_{2k+1} \cap \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}.$$

Пользуясь этим результатом и соотношением (A.1.11), получим, что для всякой симметричной периодической точки $\boldsymbol{x}_*$ периода n найдется такое k, что выполнены равенства

$$\Phi^n(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{x}_*, \quad \boldsymbol{\sigma}_k(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{x}_*, \quad \Phi^n \circ \boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_k \circ \Phi^{-n}, \quad \boldsymbol{\sigma}_k \circ \boldsymbol{\sigma}_k = \mathrm{id}\,.$$

Таким образом $\boldsymbol{x}_*$ является симметричной неподвижной точкой обратимого отображения Φ^n; отсюда заключаем, что

> *в окрестности $\boldsymbol{x}_*$ отображение Φ^n, а следовательно, и исходное отображение Φ в окрестности периодической траектории, порожденной $\boldsymbol{x}_*$, близко к отображению, сохраняющему площадь.*

Как и в случае неподвижных точек, симметричные периодические решения будем называть *локально консервативными.*

Кроме того, в окрестности симметричных периодических решений, обладающих свойством эллиптичности, существуют инвариантные КАМ-кривые (см. подробнее [68]).

Поиск симметричных периодических решений существенно упрощается, если воспользоваться известными соотношениями [35, 49]

$$\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_{2n} = \Phi^n(\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_0), \quad \mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_{2n+1} = \Phi^n(\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_1). \tag{A.1.12}$$

Следовательно, для того чтобы найти симметричные периодические точки, необходимо проитерировать линии неподвижных точек инволюций $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}_1 = \Phi\boldsymbol{\sigma}$ и найти их пересечения. Этот алгоритм поиска симметричных периодических решений для случая гамильтоновых систем реализован в работе [48].

Как видно из численных экспериментов, представленных ниже (см. рис. A.2, A.3), в обратимой системе линии неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_n$ образуют достаточно плотную сеть в некоторых областях фазового пространства. Вследствие того, что в них имеется (счетное) множество консервативных периодических решений, эти регионы мы будем называть *областями консервативности.* В остальной области фазового пространства могут наблюдаться (как правило) долгопериодические резонансы диссипативного характера (аттракторы и репеллеры). Вследствие этого динамика в таких областях носит название *смешанной* (см. [21, 23]).

Примеры. В случае эллипсоида множества неподвижных точек инволюций $(A.1.9)$ и $(A.1.10)$ следующие:

— *сечения с* $g_0 = 0$ *и* $g_0 = \pi$:

$$\operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)} = \left\{\frac{L}{G} = 0\right\},\quad \operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \{l = 0\} \cup \{l = \pi\},\quad \operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} = \{l = {}^{\pi}\!/_2\} \cup \{l = {}^{3\pi}\!/_2\},$$
$$\operatorname{Fix}\boldsymbol{r}^{(0)} = \varnothing, \tag{A.1.13}$$

— *сечения с* $g_0 = {}^{\pi}\!/_2$ *и* $g_0 = {}^{3\pi}\!/_2$:

$$\operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(1)} = \{l = 0\} \cup \{l = \pi\},\quad \operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(2)} = \{l = {}^{\pi}\!/_2\} \cup \{l = {}^{3\pi}\!/_2\},\quad \operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(3)} = \left\{\frac{L}{G} = 0\right\},$$
$$\operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} = \varnothing,$$

то есть представляют собой совокупность замкнутых кривых (больших кругов) на единичной сфере $S^2 = \big\{(l, {}^{L}\!/_{G})\big\}$.

Семейства инволюций и консервативные периодические решения потоков. Опишем кратко аналогичные конструкции для фазового потока обратимой системы $(A.1.1)$, который будем обозначать как $\Phi_t\colon \mathcal{M}^4 \to \mathcal{M}^4$. Инволюция, обращающая время, удовлетворяет соотношениям

$$\boldsymbol{\Sigma} \circ \Phi_t = \Phi_{-t} \circ \boldsymbol{\Sigma},\quad \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{id}, \tag{A.1.14}$$

поэтому ее также называют обращающей поток. Это преобразование порождает однопараметрическое семейство инволюций $\boldsymbol{\Sigma}_\tau = \Phi_\tau \boldsymbol{\Sigma}$, которые также обращают поток:

$$\boldsymbol{\Sigma}_\tau \circ \Phi_t = \Phi_{-t} \circ \boldsymbol{\Sigma}_\tau,\quad \boldsymbol{\Sigma}_\tau \circ \boldsymbol{\Sigma}_\tau = \mathrm{id}\,. \tag{A.1.15}$$

Аналогично определим множества неподвижных точек инволюций

$$\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_\tau = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}^4 \mid \boldsymbol{\Sigma}_\tau(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\},$$

в частности, $\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_0 = \operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}$. Несложно показать, что, как и в дискретном случае, эти множества могут быть получены сдвигом вдоль потока какого-либо из множеств $\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_{\tau_0}$:

$$\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_{\tau_0+2\tau} = \Phi_\tau(\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_{\tau_0}). \tag{A.1.16}$$

В случае эллипсоида множества неподвижных точек всех инволюций $(A.1.7)$ за исключением $\boldsymbol{R}^{(0)}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(0)}$ являются двумерными многообразиями ($\operatorname{Fix}\boldsymbol{R}^{(0)} = \operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}^{(0)} = \varnothing$). Поэтому в дальнейшем мы будем всюду полагать, что при каждом τ размерность $\dim(\operatorname{Fix}\boldsymbol{\Sigma}_\tau) = 2$.

Замечание. Как в случае отображений, в литературе, как правило, обратимыми называют лишь такие потоки Φ_t, допускающие инволюцию $\boldsymbol{\sigma}$, которые обладают двумя дополнительными свойствами:

1. фазовое пространство четномерное $\Phi_t\colon \mathcal{M}^{2n} \to \mathcal{M}^{2n}$,
2. размерность $\operatorname{Fix}\boldsymbol{\sigma}$ равна n.

Траекторию $\gamma(t)$ обратимой системы будем называть *симметричной*, если она как множество инвариантна относительно какой-либо из инволюций $\mathbf{\Sigma}_\tau$, то есть $\mathbf{\Sigma}_\tau\gamma = \gamma$. Следовательно, *симметричная неподвижная точка системы* $\boldsymbol{x}_*$ всегда принадлежит какому-либо из множеств $\operatorname{Fix}\mathbf{\Sigma}_\tau$. Пользуясь соотношениями $(A.1.15)$, можно показать, что если траектория целиком принадлежит некоторому $\operatorname{Fix}\mathbf{\Sigma}_\tau$, то это неподвижная точка. Для *периодической орбиты* можно показать, что она является симметричной тогда и только тогда, когда пересекает некоторое множество $\operatorname{Fix}\mathbf{\Sigma}_\tau$ ровно в двух точках, отстоящих друг от друга на половину периода.

Как известно [49], для симметричной неподвижной точки $\boldsymbol{x}_*$ справедливо обобщение теоремы Ляпунова о семействе периодических решений. Напомним, что, согласно это теореме, если в спектре матрицы линеаризации векторного поля в окрестности $\boldsymbol{x}_*$ имеется пара чисто мнимых собственных значений $\pm i\lambda_*$ и все оставшиеся собственные числа не равны $\pm i\lambda_* n$ для всех целых n, то существует двумерное инвариантное многообразие, проходящее через точку $\boldsymbol{x}_*$, которое заполнено однопараметрическим семейством симметричных периодических орбит, причем период движения по ним стремится к $\dfrac{2\pi}{|\lambda_*|}$ при приближении к $\boldsymbol{x}_*$.

Покажем, что в окрестности симметрических периодических решений поток является консервативным. Пусть $\gamma(t) = \{\boldsymbol{x}_0(t)\}$ — периодическая траектория периода T, симметричная относительно инволюции $\mathbf{\Sigma}$ (то есть $\mathbf{\Sigma}\gamma = \gamma$), полагая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t) + \delta\boldsymbol{x}$ и линеаризуя систему в окрестности $\gamma(t)$, получим уравнения в вариациях

$$(\delta\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{A}(t)\delta\boldsymbol{x},$$

где $\mathbf{A}(t) = \left\|\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|\Big|_{\boldsymbol{x}_0(t)}$ — периодическая с периодом T матрица.

Обозначим через $\mathbf{\Lambda}(t)$ фундаментальную матрицу данной системы (то есть решение уравнения $\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Lambda}$ с начальным условием $\mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{E}$). Вследствие периодичности $\mathbf{A}(t)$ справедливо равенство

$$\mathbf{\Lambda}(t+T) = \mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{\Lambda}(T),$$

где $\mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{P}$ — постоянная (для данного периодического решения) матрица, причем из этого равенства также следует, что $\mathbf{\Lambda}(-T) = \mathbf{P}^{-1}$.

Пользуясь соотношением $(A.1.14)$ и условием симметричности траектории, получим соотношение, которому удовлетворяет фундаментальная матрица

$$\mathbf{\Lambda}(t)\,\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t) = \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(-t)\mathbf{\Lambda}(-t),$$

где $\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t) = \left\|\dfrac{\partial \Sigma_i}{\partial x_j}\right\|\Big|_{\boldsymbol{x}_0(t)}$ — дифференциал отображения $\mathbf{\Sigma}$ в точке кривой, соответствующей моменту времени t. Из условий периодичности и инволютивности находим $\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t) = \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t + T)$, $\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t)\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(t) = \mathbf{E}$. Окончательно получим, что матрица $\mathbf{P}$ задает линейное обратимое отображение с инволюцией $\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(0)$:

$$\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(0) = \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}(0)\mathbf{P}^{-1}. \qquad (A.1.17)$$

Кроме того, поскольку $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{x}_0(0)\big)$ является собственным вектором $\mathbf{P}\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0$, заключаем, что одно из собственных значений матрицы $\mathbf{P}$ равно единице, остальные собственные значения называются *мультипликаторами периодического решения* $\gamma(t)$ [28].

Поскольку фундаментальная матрица (для некритического периодического решения) невырожденна, из (A.1.17) находим:

$$\det \mathbf{P} = \pm 1,$$
$$p(\lambda) = \det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{E}) = -\frac{\lambda^n}{\det \mathbf{P}}\, p\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где n — размерность системы.

Таким образом, окончательно получим

Предложение. *Мультипликаторы симметричного периодического решения обратимой системы либо равны ± 1, либо встречаются парами λ, λ^{-1} ($\lambda \neq \pm 1$).*

Следовательно, по крайней мере *в линейном приближении поток в окрестности симметричного периодического решения не отличается от потока гамильтоновой системы.* В окрестности эллиптического периодического решения существует множество КАМ-торов с ненулевой мерой [35, 66].

Оказывается, что, как и в случае отображения, в потоке симметричные периодические орбиты тесно связаны с пересечением множеств неподвижных точек различных инволюций.

Предложение. *Если $\tau_1 \neq \tau_2$ и $\boldsymbol{x}_* \in \operatorname{Fix} \boldsymbol{\Sigma}_{\tau_1} \cap \operatorname{Fix} \boldsymbol{\Sigma}_{\tau_2}$, то $\boldsymbol{x}_*$ принадлежит периодической траектории, период T которой удовлетворяет соотношению $kT = \tau_1 - \tau_2$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.*

Совокупность неподвижных точек всех инволюций $\boldsymbol{\Sigma}_\tau$ образует трехмерное многообразие

$$\mathcal{M}^3_\Sigma = \left\{ \bigcup_\tau \operatorname{Fix} \boldsymbol{\Sigma}_\tau \right\}, \tag{A.1.18}$$

которое, согласно (A.1.16), является инвариантным относительно потока. В типичной ситуации это многообразие самопересекается по некоторому двумерному (в общем случае несвязному) многообразию $\mathcal{M}^2_p$, которое заполнено симметричными периодическими орбитами. Те области фазового пространства, где располагаются многообразия $\mathcal{M}^2_p$, будем называть *областями консервативности.*

Покажем, как связаны между собой области консервативности потока и соответствующего ему сечения Пуанкаре на фиксированном уровне энергии. Напомним (см. раздел 1.3), что при построении данного отображения Пуанкаре мы прежде всего ограничиваем систему на фиксированный уровень интеграла энергии $\mathcal{M}^3_h = \{\boldsymbol{x} \mid E(\boldsymbol{x}) = h\}$, при этом вследствие инвариантности $\mathcal{M}^3_h$ относительно инволюций (и симметрий) соответствующий трехмерный поток $\Phi^{(h)}_t \colon \mathcal{M}^3_h \to \mathcal{M}^3_h$ также является обратимым. Объединение множеств неподвижных точек инволюций этого потока образует двумерную поверхность $\mathcal{M}^{2(h)}_\Sigma$, которая задается пересечением инвариантного многообразия (A.1.18) с уровнем энергии $\mathcal{M}^3_h$. Самопересечения этой поверхности определяют все возможные симметричные периодические орбиты при фиксированном значении энергии $E(\boldsymbol{x}) = h$. Соответственно, обозначая через $\boldsymbol{\sigma}$ ограничение инволюции $\boldsymbol{\Sigma}$ на двумерное сечение Пуанкаре $\mathcal{M}^2_{h,g_0}$, получим, что объединение неподвижных точек всех инволюций $\{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Fix} \boldsymbol{\sigma}_n\} = \{\Phi^n(\operatorname{Fix} \boldsymbol{\sigma})\} \cup \{\Phi^n(\operatorname{Fix} \boldsymbol{\sigma}_1)\}$ образуется пересечением пары двумерных многообразий: $\mathcal{M}^{2(h)}_\Sigma$ и сечения $\mathcal{M}^2_{h,g_0}$ (см. рис. A.2, A.3 b).

Замечание. Возникающая картина во многом схожа с картиной взаимного пересечения сепаратрис к гиперболическим периодическим решениям (см. рис. A.3).

A.2. Иерархия динамики в задаче о качении эллипсоида

Как мы видели выше, наличие тензорных инвариантов (первых интегралов и инвариантной меры) влечет за собой различные типы поведения динамических систем (1.6) и (1.13). Здесь мы покажем, что аналогичная картина возникает в задаче о качении эллипсоида по плоскости в зависимости от числа инволюций (обращающих время).

Напомним (см. раздел 1.1), что уравнения движения записываются в системе главных динамических осей эллипсоида, поэтому уравнение его поверхности в общем случае имеет вид

$$(\boldsymbol{r}, \mathbf{B}\boldsymbol{r}) = 1,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{Q}_0, \ \mathbf{B}_0 = \operatorname{diag}(a_1^2, a_2^2, a_3^2),$$
$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0\cos\psi_0 - \cos\theta_0\sin\psi_0\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\sin\psi_0 + \cos\theta_0\cos\psi_0\sin\varphi_0 & \sin\varphi_0\sin\theta_0 \\ -\sin\varphi_0\cos\psi_0 - \cos\theta_0\sin\psi_0\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\sin\psi_0 + \cos\theta_0\cos\psi_0\cos\varphi_0 & \cos\varphi_0\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0\sin\psi_0 & -\sin\theta_0\cos\psi_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix},$$

φ_0, θ_0, ψ_0 — углы поворота динамических осей относительно геометрических, a_1, a_2, a_3 — главные полуоси.

Если $\theta_0 = \varphi_0 = \psi_0 = 0$, то эллипсоид — полностью симметричный.

В случае, когда $\varphi_0 = \psi_0 = 0$, $\varphi_0 = -\psi_0 = {}^{\pi}\!/_2$ и $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, получаем частично симметричный эллипсоид, у которого динамические оси повернуты относительно геометрических вокруг осей $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ соответственно.

Далее при построении отображения Пуанкаре данной системы будем полагать массу эллипсоида $m = 1$ и зафиксируем следующие величины главных полуосей и моментов инерции эллипсоида:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad I_1 = 6.8, \quad I_2 = 5.5, \quad I_3 = 2.6.$$

Для полностью симметричного случая ($\theta_0 = \psi_0 = \phi_0 = 0$) эти параметры соответствуют однородному эллипсоиду.

Всюду в этом разделе будем пользоваться сечением $\mathcal{M}^2_{h,g_0}$, для которого

$$h = 50, \quad g_0 = \pi. \tag{A.2.1}$$

Полностью симметричный эллипсоид (верхний ряд портретов на рис. A.1). В этом случае, как было сказано выше, на выбранном сечении (A.2.1) отображение Пуанкаре допускает четыре инволюции:

$$\boldsymbol{r}_0, \quad \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}.$$

Из них последние три имеют нетривиальные множества неподвижных точек на S^2 (см. (A.1.13)). Эти множества представляют собой пять главных кругов на сфере $S^2 = \left\{\left(l, \frac{L}{G}\right)\right\}$, которые проходят через все «главные» резонансы системы. Как видно на рисунке A.2, итерации этих линий инволюций заполняют всю сферу; следовательно, областью консервативности является, фактически, все фазовое пространство системы.

Частично симметричный эллипсоид (средний ряд портретов на рис. A.1). Здесь мы рассмотрим лишь ситуацию, когда динамические оси повернуты относительно геометрических вокруг оси $\boldsymbol{e}_3$. В этом случае для сечения Пуанкаре плоскостью (A.2.1) сохраняется лишь пара инволюций: $\boldsymbol{r}^{(0)}$, $\boldsymbol{\pi}^{(3)}$. Первая не имеет неподвижных точек, для второй

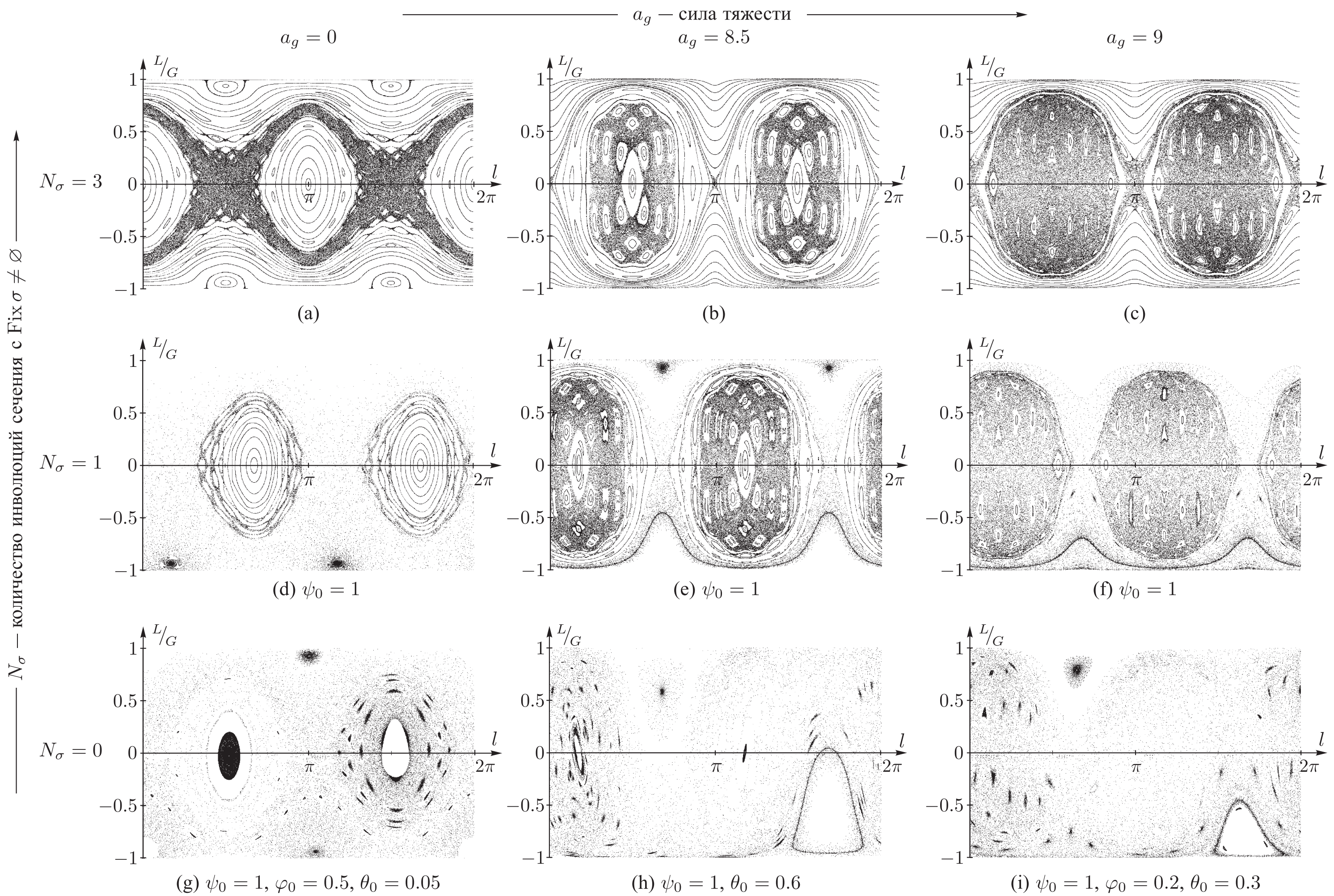
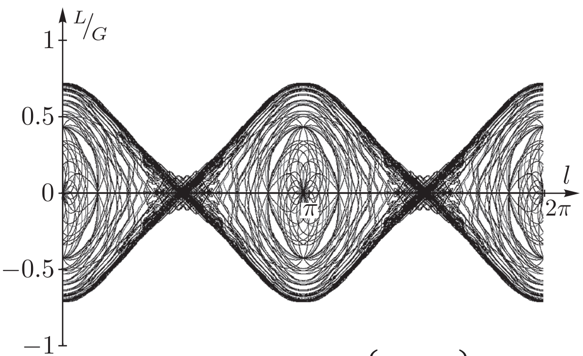
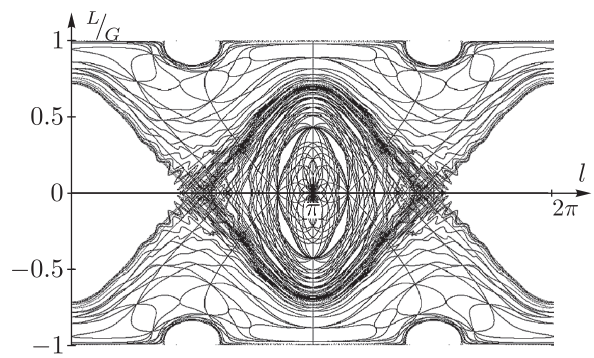


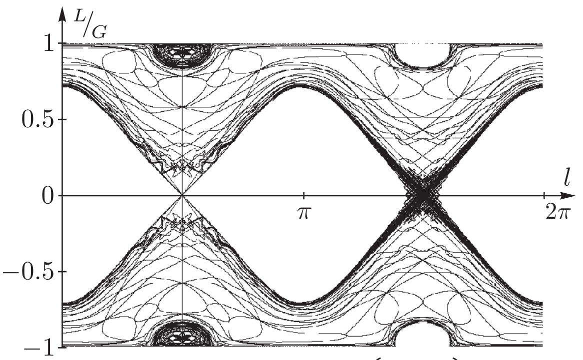
Рис. A.1. Характерный вид фазовых портретов в задаче о качении эллипсоида по плоскости при различном числе инволюций и величине поля тяжести. Темные области на рисунках отвечают либо консервативным стохастическим слоям, либо аттракторам (каждому аттрактору соответствует симметричный относительно инволюции $\boldsymbol{r}^{(0)}$ репеллер), более светлые области отвечают переходным траекториям от репеллеров к аттракторам.



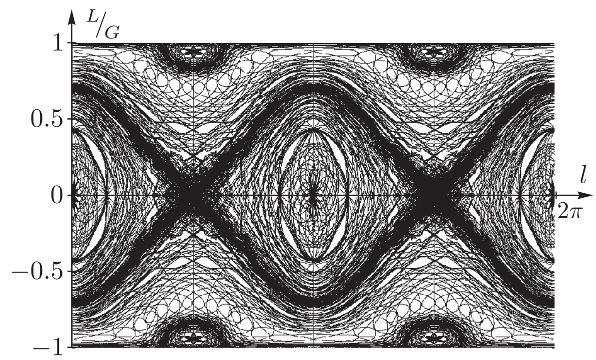
(a) итерации линии $\left\{\dfrac{L}{G}=0\right\}$



(b) итерации линии $\{l=\pi\}$



(c) итерации линии $\left\{l=\dfrac{\pi}{2}\right\}$



(d) итерации множества линий $\left\{\dfrac{L}{G}=0\right\}\cup\{l=\pi\}\cup\{l=0\}\cup\left\{l=\dfrac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{l=\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

Рис. A.2. Первые десять прямых и обратных итераций линий неподвижных точек инволюций $\operatorname{Fix}\sigma_{2n}=\Phi^n(\operatorname{Fix}\sigma_0)$, $n=-10,\ldots,10$, в случае полностью симметричного эллипсоида при $a_g=0$. На рисунках (a)–(c) изображены итерации для отдельных линий неподвижных точек различных инволюций. На рисунке d показаны все линии одновременно для всех инволюций.

$\operatorname{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}=\left\{\dfrac{L}{G}=0\right\}$. Первые десять итераций $\Phi^n(\operatorname{Fix}\boldsymbol{\pi}^{(3)})$, $n=-10,\ldots,10$, приведены на рисунке A.3. Фазовые портреты на рисунках A.1 d–f демонстрируют, что области консервативности в окрестности симметричных решений соседствуют с простыми (неподвижными точками) аттракторами и сопряженными им относительно $\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}$ репеллерами; промежуток между ними заполнен переходными траекториями (от репеллеров к аттракторам).

Полностью несимметричный эллипсоид (нижний ряд портретов на рис. A.1). В этой системе, когда динамические и геометрические оси не совпадают, на выбранном сечении имеется лишь одна инволюция, обращающая время: $\boldsymbol{r}^{(0)}$; как мы видели выше, не имеет неподвижных точек. Как следствие, поведение траекторий на фазовом портрете носит чисто диссипативный характер: имеются аттракторы и симметричные им относительно $\boldsymbol{r}^{(0)}$ репеллеры. При изменении поля тяжести (или энергии, см. предложение 1.1) в данном случае на отображении Пуанкаре обнаруживаются лишь достаточно простые аттракторы: неподвижные точки, периодические орбиты и предельные инвариантные кривые. Вопрос о существовании сложных аттракторов (странных и квазиаттракторов) в задаче о качении несимметричного эллипсоида остается открытым.

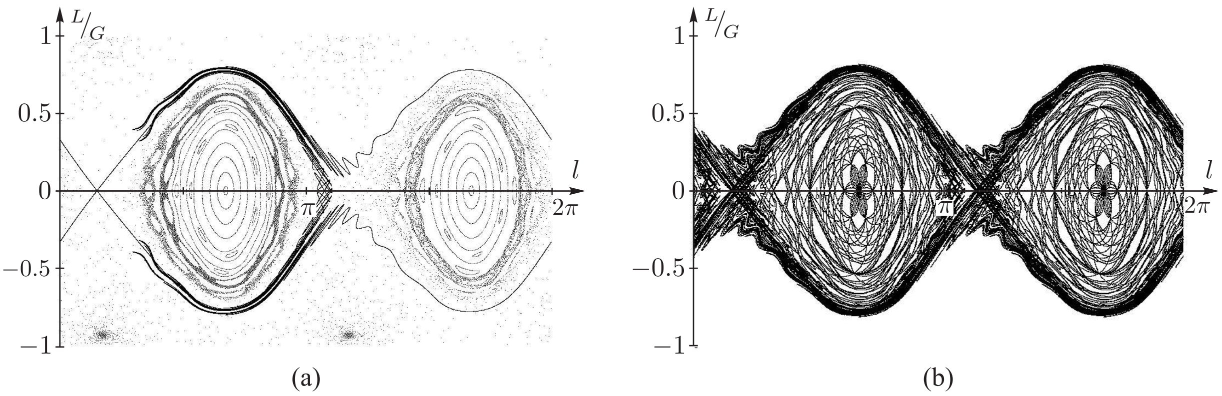


Рис. А.3. Сепаратрисы и линии неподвижных точек инволюций в случае частично симметричного эллипсоида при $a_g = 0$, $\psi_0 = 1$. На рисунке (a) на фоне фазового портрета изображены сепаратрисы к одной из гиперболических неподвижных точек, на рисунке (b) приведены линии $\mathrm{Fix}\,\widetilde{\boldsymbol{\pi}}_{2n}^{(3)} = \Phi^n \,\mathrm{Fix}\,\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}$, $n = -10, \ldots, 10$.

А.3. Иерархия динамики в задаче о качении неуравновешенного динамически несимметричного шара

Покажем теперь, что и в задаче качения динамически несимметричного шара со смещенным центром масс по плоскости в зависимости от числа инволюций возникают различные типы динамического поведения.

Всюду далее мы строим отображение Пуанкаре для шара, у которого

$$I_1 = 1, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3, \quad m = 1, \quad R = 3.$$

Замечание. Такой выбор параметров обусловлен тем, что при некоторых значениях поля тяжести в фазовом пространстве удается обнаружить странный аттрактор.

Напомним, что (согласно результатам раздела 3.5) в случае, когда поле тяжести отсутствует ($a_g = 0$), система допускает дополнительный интеграл, квадратичный по $\boldsymbol{\omega}$ (3.19), но не допускает инвариантную меру. Тем не менее, ее сечение Пуанкаре выглядит фактически таким же, как в случае интегрируемой гамильтоновой системы, поэтому этот случай мы здесь рассматривать не будем.

При этом для системы сохраняются некоторые из симметрий (A.1.6) и инволюций (A.1.7). Так, если центр масс расположен на одной из главных динамических осей $\boldsymbol{e}_k$, то сохраняются:

$$\textit{симметрии } \boldsymbol{\Pi}^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(i)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(j)} \quad \textit{и} \quad \textit{инволюции } \boldsymbol{R}^{(0)}, \widetilde{\boldsymbol{\Pi}}^{(k)}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(i)}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(j)},$$

где $i, j \neq k$, $i \neq j$. Если центр масс лежит в плоскости, образованной главными динамическими осями $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$, то сохраняются

$$\textit{симметрия } \boldsymbol{\Sigma}^{(k)} \quad \textit{и} \quad \textit{инволюции } \boldsymbol{R}^{(0)},\ \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{(k)}.$$

В общем случае сохраняется лишь инволюция $\boldsymbol{R}^{(0)}$.

В этом разделе мы будем пользоваться сечением $\mathcal{M}^2_{h,g_0}$, для которого

$$h = 50, \quad g_0 = \pi.$$

Центр масс расположен на главной динамической оси (верхний ряд портретов на рис. А.4). Здесь мы рассмотрим лишь ситуацию, когда центр масс смещен вдоль оси $\boldsymbol{e}_3$. В этом случае на выбранном сечении отображение Пуанкаре допускает четыре инволюции:

$$\boldsymbol{r}^{(0)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{(3)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}.$$

Из них последние три имеют нетривиальные множества неподвижных точек на S^2. Как видно на рисунке A.4, итерации этих линий инволюции заполняют всю сферу; следовательно, областью консервативности является, по сути, все фазовое пространство системы (как это было в случае полностью симметричного эллипсоида).

Центр масс лежит в главной плоскости (средний ряд портретов на рис. A.4). Здесь мы будем полагать, что центр масс смещен в плоскости $O\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. В этой системе в ситуации общего положения для рассматриваемого сечения Пуанкаре сохраняется лишь пара инволюций: $\boldsymbol{r}^{(0)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$. Первая не имеет неподвижных точек, для второй $\mathrm{Fix}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} = \{l = \pi\} \cup \{l = 0\}$.

Центр масс лежит вне главных плоскостей (нижний ряд портретов на рис. A.4). В этой системе в общем случае имеется имеется лишь одна инволюция, обращающая время: $\boldsymbol{r}^{(0)}$; как мы знаем, это инволюция не имеет неподвижных точек. Как следствие, поведение траекторий в фазовом пространстве носит чисто диссипативный характер: имеются аттракторы и симметричные им относительно $\boldsymbol{r}^{(0)}$ репеллеры. В этом случае оказывается, что при некоторых значениях параметров система допускает странный аттрактор (впервые указанный А. О. Казаковым [23], рис. A.4h).

Общие выводы и дискуссия

1. Из (численного) анализа фазовых портретов системы при различных значениях параметров можно заключить, что при достаточном количестве инволюций $\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_k$, обладающих нетривиальным множеством неподвижных точек ($\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_i \neq \varnothing$), область консервативности системы совпадает со всем фазовым пространством. При этом поведение траекторий на отображении Пуанкаре системы фактически не отличается от их поведения в случае консервативных систем.

2. По мере сокращения числа нетривиальных инволюций ($\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_i \neq \varnothing$) область консервативности системы уменьшается, и появляются области, отвечающие «диссипативному поведению». При отсутствии инволюций с $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_i \neq \varnothing$ во всем фазовом пространстве проявляется «диссипативное поведение».

Таким образом, наличие различных нетривиальных инволюций позволяет *в какой-то мере* объяснить, почему фазовый поток системы, не допускающей инвариантной меры, настолько схож с потоком типичной гамильтоновой системы.

3. Согласно критерию (2.5), рассматриваемые выше в данном разделе системы не допускают инвариантной меры с аналитической плотностью (см. также разделы 3.3, 3.5). С другой стороны, как видно из рисунков A.1 a, b, c и A.4 a, b, c, каких-либо проявлений диссипации (например, аттракторов типа неподвижных точек, циклов, предельных кривых либо странных аттракторов) в данном случае также не обнаруживается. Не обнаруживаются они и при более детальных численных исследованиях в различных окрестностях (в том числе, достаточно малых) эллиптических неподвижных точек и циклов. Поэтому возникает два естественных вопроса.

1. Могут ли точки пересечения множеств неподвижных точек инволюций ($\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\sigma}_n$ для отображений и $\mathrm{Fix}\,\boldsymbol{\Sigma}_\tau$ для потоков) образовывать всюду плотное множество в фазовом пространстве?
2. Существуют ли «более тонкие» (чем невырожденные притягивающие точки) препятствия к существованию инвариантной меры в окрестности периодических решений, аналогичные препятствиям к существованию однозначных интегралов.

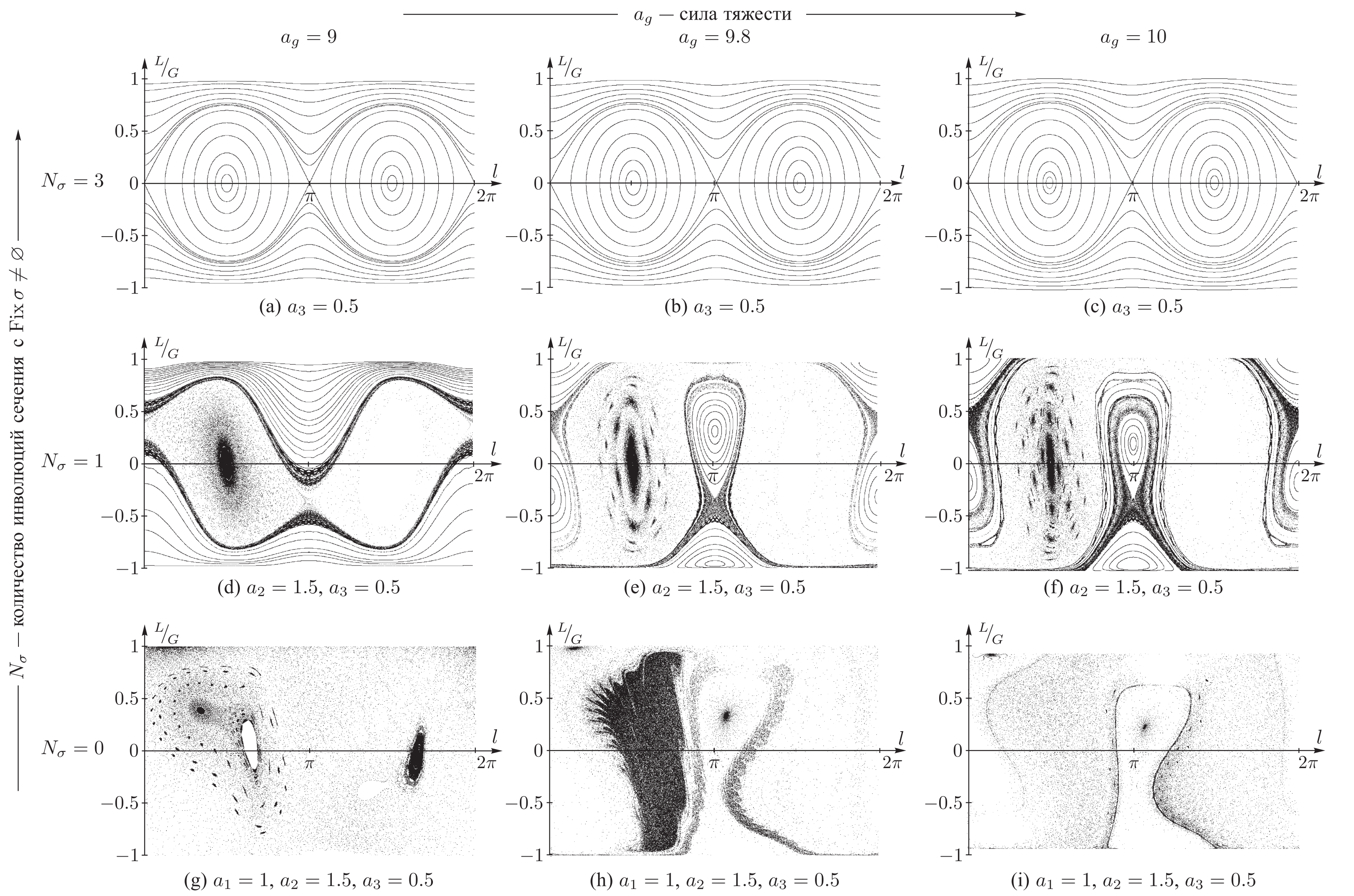
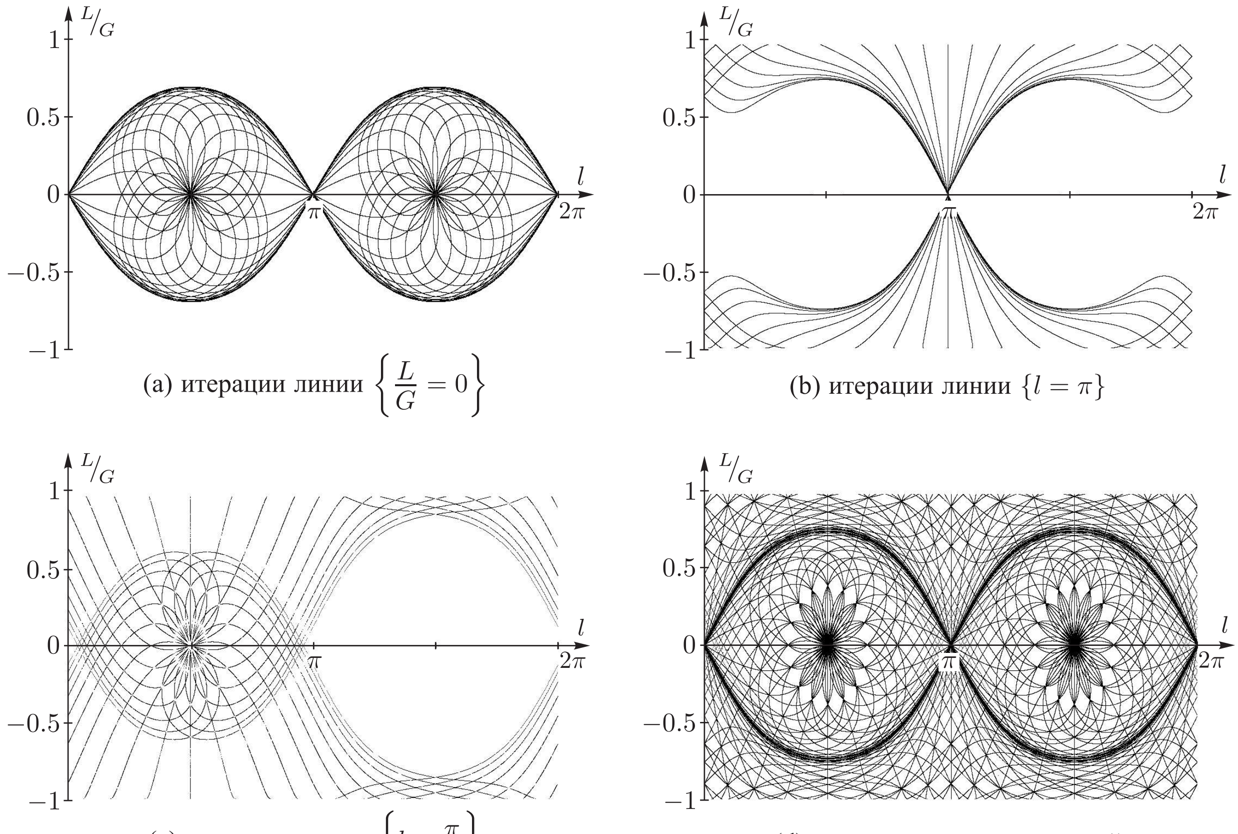


Рис. А.4. Характерный вид фазовых портретов в задаче о качении динамически несимметричного неуравновешенного шара по плоскости при различном числе инволюций и величине поля тяжести. Темные и светлые области аналогичны подобным областям на рис. А.1, за исключением рисунка (h). На рисунке (h) более темная область в левой части отвечает странному аттрактору.



(a) итерации линии $\left\{\frac{L}{G}=0\right\}$

(b) итерации линии $\{l=\pi\}$

(c) итерации линии $\left\{l=\frac{\pi}{2}\right\}$

(d) итерации множества линий $\left\{\frac{L}{G}=0\right\}\cup\{l=\pi\}\cup\{l=0\}\cup\left\{l=\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left\{l=\frac{3\pi}{2}\right\}$

Рис. A.5. Первые десять прямых и обратных итераций линий неподвижных точек инволюций $\operatorname{Fix}\sigma_{2n}=\Phi^n(\operatorname{Fix}\sigma_0)$, $n=-10,\ldots,10$, в случае шара, центр масс которого расположен на главной динамической оси при $a_g=98$ (рис. A.4b).

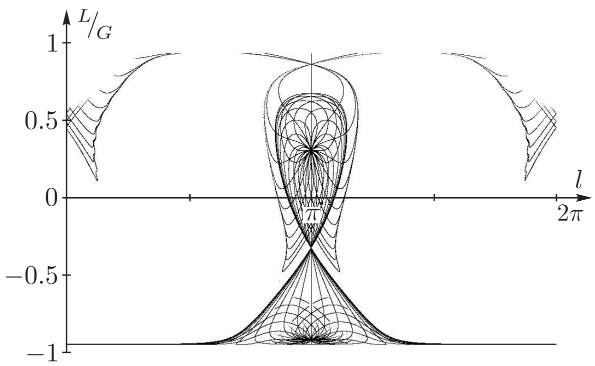


Рис. A.6. Первые десять прямых и обратных итераций линий неподвижных точек инволюций $\{l==\pi\}$ для шара, центр масс которого лежит в главной плоскости при $a_g=9.8$ (рис. A.4e).

Простейшей системой, имеющей данный физический смысл, является трехмерный однородный эллипсоид на плоскости, для которого несмотря на полностью гамильтоново строение фазового портрета мы не сможем привести инвариантную меру (кроме случая эллипсоида вращения). Аналогичная проблема о движении однородного эллипсоида существует в классическом варианте неголономного качения [11, 41].

4. Имеется также достаточно широкий класс обратимых систем без инвариантной меры, связанный с обычным качением без скольжения [41, 42]. При этом множества неподвижных точек, соответствующих инволюций $\mathbf{\Sigma}_i$, удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{Fix}\,\mathbf{\Sigma}_i \neq \frac{\dim \mathcal{M}}{2}.$$

Возникающие здесь эффекты, связанные с обратимостью, требуют дополнительного изучения (см. [15]).

5. С момента открытия свойства сохранения КАМ-торов в обратимых системах, их изучению было посвящено большое количество работ (см. например, библиографию в обзоре [67]).

Как уже было отмечено выше, наиболее фундаментальные свойства обратимых систем заключаются в существовании большого числа симметричных периодических орбит (обладающих свойством консервативности) и инвариантных КАМ-торов (инвариантных КАМ-кривых в случае отображений). Эти инвариантные многообразия могут объединяться в многопараметрические семейства, число параметров которых зависит от соотношения размерностей фазового пространства и множества неподвижных точек инволюции ($\mathrm{Fix}\,\mathbf{\Sigma}$).

Кроме того, при численном моделировании (отображений) обнаружилось, что в типичной ситуации эти системы в различных областях фазового пространства демонстрируют как консервативное, так и диссипативное поведение.

Имеется также ряд работ, в которых показано, что с точки зрения формальных разложений в окрестности симметричной особой точки в нерезонансном случае и в случае некоторых резонансов обратимые системы сопряжены гамильтоновым [63, 64]. Как обычно, вследствие невозможности доказательства сходимости полученных рядов, данные результаты могут быть использованы для понимания динамики системы. Так, в работе [21] показано, что в принципе могут существовать гладкие обратимые системы, в которых существуют последовательности диссипативных периодических решений, которые сходятся как к симметричным периодическим решениям, так и к инвариантным КАМ-торам. Большой интерес представляет изучение бифуркаций периодических орбит для обратимых систем, связанных с потерей симметрии [21, 60].

В работе [23] такое смешанное (гамильтоново и диссипативное) поведение обнаружено на примере так называемого rubber rock-n-roller, динамически несимметричного шара со смещенным центром.

Благодарности. Авторы благодарят В. В. Козлова, А. В. Болсинова, А. В. Цыганова за многочисленные обсуждения. Особую благодарность авторы выражают А. О. Казакову за помощь при проведении численных экспериментов.

Список литературы

[1] Бизяев И. А., Цыганов А. В. О сфере Рауса // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 569–583. (*См. также*: Bizyaev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, no. 8, pp. 1–11.)

[2] Бизяев И. А., Казаков А. О. Интегрируемость и стохастичность некоторых задач неголономной механики // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 257–265.

[3] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854. (*См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonisation of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 116, no. 5, pp. 443–464.)

[4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.

[5] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616. (*См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.)

[6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338. (*См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.)

[7] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. (*См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.)

[8] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов. 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76. (*См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.)

[9] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[10] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[11] Борисов А. В., Мамаев И. С. О несуществовании инвариантной меры при качении неоднородного эллипсоида по плоскости // Матем. заметки, 2005, т. 77, № 6, с. 930–931.

[12] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без верчения и кручения // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.)

[13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем // Сиб. матем. журн., 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.

[14] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.)

[15] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 117, № 4, с. 407–418.

[16] Борисов А. В., Мамаев И. С. Две неголономные интегрируемые связки твердых тел // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 559–568. (*См. также*: Borisov A. V., Mamaev I. S. Two nonholonomic integrable problems tracing back to Chaplygin // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 191–198.)

[17] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика шара Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 103–111.

[18] Борисов А. В., Мамаев И. С., Трещев Д. В. Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: кинематика и динамика // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 783–797.

[19] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, № 6, с. 102–105. (*См. также:* Неголономные динамические системы: интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 67–70.)

[20] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко (ред.). М.: МГУ, 1986. С. 64–68.

[21] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 507–518.

[22] Гонченко А. С., Гонченко С. В. О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголономной модели «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 77–89.

[23] Казаков А. О. Феномены хаотической динамики в задаче о качении рок-н-роллера без верчения // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 309–325.

[24] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней // ПММ, 1981, т. 45, № 1, с. 42–51.

[25] Карапетян А. В. Семейства перманентных вращений трехосного эллипсоида на шероховатой горизонтальной плоскости и их ветвления // Актуальные проблемы классической и небесной механики: Сб. ст. / С. Д. Фурта. Москва: Эльф, 1998. С. 46–51.

[26] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.

[27] Козлов В. В. Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана // Интегральные инварианты / Э. Картан. Москва: УРСС, 1998. С. 218–260.

[28] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 432 с.

[29] Колесников С. Н. О качении диска по горизонтальной плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1985, № 2, с. 55–60.

[30] Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва–Ижевск: ИКИ, 2013. 488 с.

[31] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.

[32] Кулешов А. С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Докл. РАН, 2005, т. 400, No 1, с. 46–48.

[33] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. Москва: Наука, 1992. 336 с.

[34] Станченко С. В. О неголономных системах Чаплыгина // ПММ, 1989, т. 53, № 1, с. 16–23.

[35] Севрюк М. Б. Некоторые проблемы теории КАМ: условно-периодические движения в типичных системах // УМН, 1995, т. 50, № 2(302), с. 111–124.

[36] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

[37] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.

[38] Ярощук В. А. Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1992, № 6, с. 26–30.

[39] Ярощук В. А. Интегральный инвариант в задаче о качении эллипсоида со специальными распределениями масс по неподвижной поверхности без проскальзывания // МТТ, 1995, № 2, с. 54–57.

[40] Beghin H. Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holonome // Bulletin de la S. M. F., 1929, vol. 57, pp. 118–124.

[41] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. (*См. также:* Неголономные динамические системы: интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 342 с.)

[42] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: new integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, 201–219.

[43] Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems, arXiv:nlin.SI/0509036v1, 21 Sep 2005.

[44] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: an explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.

[45] Bridges Th. J. Poisson structure of the reversible 1 : 1 resonance // Phys. D, 1998, vol. 112, nos. 1–2, pp. 40–49.

[46] Cendra H., Etchechoury M. Rolling of a symmetric sphere on a horizontal plane without sliding or slipping // Rep. Math. Phys., 2006, vol. 57, no. 3, pp. 367–374.

[47] Cendra H., Etchechoury M., Ferraro S. J. Impulsive control of a symmetric ball rolling without sliding or spinning // J. Geom. Mech., 2010, vol. 2, no. 4, pp. 321–342.

[48] Chavoya-Aceves O., Piña E. Symmetry lines of the dynamics of a heavy rigid body with a fixed point // Il Nuovo Cimento B, 1989, vol. 103, no. 4, pp. 369–387.

[49] Devaney R. L. Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc., 1976, vol. 218, pp. 89–113.

[50] Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: geometry and dynamics of 2-3-5 distributions // Proc. IUTAM Symp. on Hamiltonian dynamics, vortex structures, turbulence (Moscow, Russia, 25–30 August 2006), pp. 469–480.

[51] Fassò F., Giacobbe A., Sansonetto N. Periodic flows, rank-two Poisson structures, and nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 3, pp. 267–284.

[52] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics // Amer. Math. Soc. Transl. (2), 1995, vol. 168, pp. 141–171.

[53] Fedorov Yu. N., Jovanović B. Hamiltonization of the generalized Veselova LR system // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, nos. 4–5, pp. 495–505.

[54] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. (Appl. Math. Sci., vol. 42.) New York: Springer, 1990. 459 pp. (*См. также*: Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: ИКИ, 2002. 561 с.)

[55] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4 sér., 1895, vol. 5, pp. 397–417.

[56] Kim B. Routh symmetry in the Chaplygin's rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 6, pp. 663–670.

[57] Koiler J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.

[58] Kozlov V. V. On invariant manifolds of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 131–141.

[59] Lamb J. S. W., Lima M. F. S., Martins R. M., Teixeira M. A., Yang J. On the Hamiltonian structure of normal forms for elliptic equilibria of reversible vector fields in $\mathbb{R}^4$ // IMECC/Unicamp Research Report 05/10, 2010.

[60] Lerman L. M., Turaev D. V. Breakdown of symmetry in reversible systems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 318–336.

[61] Mamaev I. S. New cases when the invariant measure and first integrals exist in the problem of a body rolling on a surface // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 3, pp. 331–335.

[62] Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: controllability theory and applications // IEEE Trans. Autom. Control, 2000, vol. 45, no. 9, pp. 1586–1599. (*См. также*: Мариго А., Биччи А. Качение тел с регулярной поверхностью: теория управляемости и приложения // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 101–132.)

[63] Martins R. M., Teixeira M. A. On the similarity of Hamiltonian and reversible vector fields in 4D // Commun. Pure Appl. Anal., 2011, vol. 10, no. 4, pp. 1257–1266.

[64] van der Meer J. C., Sanders J. A., Vanderbauwhede A. Hamiltonian structure of the reversible nonsemisimple 1 : 1 resonance // Dynamics, bifurcation and symmetry: new trends and new tools (Cargèse, France, September 3–9, 1993) / P. Chossat (Ed.). (NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 437.) Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 221–240.

[65] Ormerod J. T., Quispel G. R., Roberts J. A. G. Discrete integrable systems: QRT mappings and elliptic surfaces // SIAM Rev., 2012, vol. 54, no. 1, pp. 198–199.

[66] Ramos A. Poisson structures for reduced non-holonomic systems // J. Phys. A, 2004, vol. 37, pp. 4821–4842.

[67] Roberts J. A. G., Quispe G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // Phys. Rep., 1992, vol. 216, nos. 2–3, pp. 63–177.

[68] Sevryuk M. B. Reversible Systems. (Lecture Notes in Math., vol. 1211.) Berlin: Springer, 1986. 319 pp.

[69] Sevryuk M. B. The reversible context 2 in KAM theory: the first steps // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 24–38.

[70] Sprott J. C. Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2010. 285 pp. (*См. также*: Спротт Дж. К. Элегантный хаос: алгебраически простые хаотические потоки. Москва–Ижевск: ИКИ, 2012. 328 с.)

[71] Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 456 pp. (*См. также:* Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Москва–Ижевск: УдГУ, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 584 с.)

[72] Woronetz P. Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer belibiegen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften // Math. Ann., 1909, vol. 67, pp. 268–280.

[73] Woronetz P. Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt // Math. Ann., 1911, vol. 70, pp. 410–453.

[74] Woronetz P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Math. Ann., 1912, vol. 71, pp. 392–403.

The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere

Alexey V. Borisov[1], Ivan S. Mamaev[2], Ivan A. Bizyaev[3]

[1,2,3]Institute of Computer Science;
Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

[1,2]A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS
Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

[1,2]Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS
S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia
[1]`borisov@rcd.ru`, [2]`mamaev@rcd.ru`, [3]`bizaev_90@mail.ru`

In this paper, we investigate the dynamics of systems describing the rolling without slipping and spinning (rubber rolling) of various rigid bodies on a plane and a sphere. It is shown that a hierarchy of possible types of dynamical behavior arises depending on the body's surface geometry and mass distribution. New integrable cases and cases of existence of an invariant measure are found. In addition, these systems are used to illustrate that the existence of several nontrivial involutions in reversible dissipative systems leads to quasi-Hamiltonian behavior.

MSC 2010: 37J60, 37J35
Keywords: nonholonomic constraint, tensor invariant, first integral, invariant measure, integrability, conformally Hamiltonian system, rubber rolling, reversible, involution

Received March 12, 2013, accepted May 8, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 141–202 (Russian)