



УДК: 531.38

MSC 2010: 37J60, 37J35

## Феномены хаотической динамики в задаче о качении рок-н-роллера без верчения

А. О. Казаков

В работе исследуется задача о движении динамически несимметричного шара со смещенным центром масс по плоскости без проскальзывания и верчения. Показано, что на динамическое поведение шара существенное влияние оказывает тип обратимостей. В зависимости от типа обратимостей в задаче обнаружены два принципиально различных типа динамического хаоса: странные аттракторы и смешанная хаотическая динамика. В работе подробно описан сценарий возникновения странного аттрактора, а также приведены его основные свойства. Приведен ряд критериев, по которым, с помощью численных экспериментов, можно отличить смешанную динамику от других типов динамического хаоса.

Ключевые слова: рок-н-роллер, «резиновое» качение, инволюция, бифуркации, седло, фокус, сепаратрисы, гомоклинические пересечения, показатели Ляпунова, смешанная динамика, странный аттрактор

### 1. Введение

Данная статья дополняет цикл работ, посвященных исследованию нового, малоизученного типа движения — качения без проскальзывания и верчения, и описывает движение динамически несимметричного шара со смещенным центром масс по плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вслед за авторами рассматриваемой постановки задачи [1] всюду далее твердое тело, при качении которого отсутствует верчение вокруг вертикальной оси, будем называть «резиновым» (rubber) телом, а неголономную связь, запрещающую такое верчение, — резиновой связью. Как и П. Линч [8, 9] шар со смещенным центром масс будем называть рок-н-роллером.

Подробно ознакомиться с иерархией раббер динамики можно по недавно вышедшему обзору [4], в котором исследуются вопросы интегрируемости в задачах качения резинового тела (шара или эллипсоида) по плоскости и сфере. Работа [7] также посвящена рассматриваемой тематике. В ней с помощью сочетания аналитических и компьютерных методов

---

Получено 22 апреля 2013 года

После доработки 30 мая 2013 года

---

Казаков Алексей Олегович

[Kazakovdz@yandex.ru](mailto:Kazakovdz@yandex.ru)

Институт компьютерных исследований

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



исследуются вопросы интегрируемости частных случаев качения резинового эллипсоида по плоскости и сфере. Интерес к задачам качения твердого тела без проскальзывания и вращения вызван прежде всего тем, что наличие дополнительной резиновой связи позволяет свести исследование к анализу двумерного отображения Пуанкаре, что существенно отличает эти задачи от классических неголономных систем, сводимых к трехмерным отображениям [5]. Однако динамика таких систем оказалась весьма богатой и сложной. Интегрируемый случай был обнаружен лишь в [6], когда два главных момента инерции совпадают, а центр масс шара смещен только вдоль третьей главной оси инерции. Более того, в работе [13] доказано, что система, описывающая качение резинового рок-н-роллера по плоскости, не обладает инвариантной мерой даже в случае существования полного набора интегралов — в случае отсутствия поля тяжести. При добавлении поля в системе пропадает дополнительный четвертый интеграл, а отсутствие инвариантной меры становится очевидным при анализе отображения Пуанкаре.

## 2. Уравнения движения и интегралы

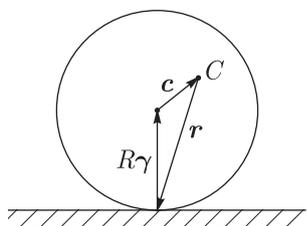


Рис. 1. Рок-н-роллер на плоскости.

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий центр масс  $C$  с точкой контакта  $P$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость шара соответственно,  $\boldsymbol{\gamma}$  — вектор нормали к поверхности в точке контакта (см. рис. 2). Величины  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{n}$  заданы в проекциях на подвижные оси  $Cxyz$ . Уравнения движения, описывающие эволюцию  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  в присутствии поля тяжести, представляются в форме:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda_0(a_g)\boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + m(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^T$  — тензор инерции относительно точки контакта, а  $\mathbf{I}$  — тензор инерции с компонентами  $I_1, I_2, I_3$ , записанный в системе координат  $Cxyz$ , связанной с шаром.

Для шара  $\mathbf{r}$  выражается через вектор нормали к поверхности в точке контакта следующим образом:  $\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — смещение центра масс шара с компонентами  $(a_1, a_2, a_3)$ , заданными вдоль осей  $(Cx, Cy, Cz)$ , связанных с телом.

Неопределенный множитель  $\lambda_0$  отвечает за наличие резиновой связи  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$  и выражается по формуле:

$$\lambda_0(a_g) = - \frac{(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})) + ma_g(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{a})}{(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.2) обладает тремя интегралами:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) - ma_g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad (2.4)$$



— энергии, геометрическим и дополнительным, реализующим резиновую связь. Таким образом, по теореме Эйлера–Якоби, для интегрируемости системы уравнений (2.2) не хватает инвариантной меры  $\mu$  и одного дополнительного интеграла. В случае  $I_1 = I_2$ ,  $a_1 = a_2 = 0$  система оказывается интегрируемой. Более того, как доказано в работе [6], эта система может быть представлена в гамильтоновой форме. Дополнительный интеграл также существует для шара с произвольными параметрами  $\mathbf{I}, \mathbf{a}$  при  $a_g = 0$ , однако система (2.2) оказывается неинтегрируемой из-за отсутствия инвариантной меры (см. [13]). В общей постановке (при произвольных  $\mathbf{I}, \mathbf{a}$  и  $a_g \neq 0$ ) не существует не только инвариантной меры, но и дополнительного четвертого интеграла. Следствием этого является сложное хаотическое поведение, наблюдаемое в системе (2.2) при определенных значениях параметров.

### 3. Отображение Пуанкаре в переменных Андуайе–Депри

Для численного исследования качения резинового рок-н-роллера по плоскости весьма удобными являются переменные Андуайе–Депри  $(L, G, g, l)$  [10], задаваемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \\ \omega_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \\ \omega_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \frac{L}{G} \cos g \sin l + \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \frac{L}{G} \cos g \cos l - \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= -\sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \cos g. \end{aligned} \tag{3.1}$$

На совместном уровне трех интегралов (2.4) уравнения (2.2) задают трехмерный поток  $\mathcal{G}_E$ . Отметим, что в новых координатах  $L, G, g$  и  $l$  условия  $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$  и  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$  выполняются автоматически. Это означает, что на уровне трех интегралов соотношения (3.1) задают взаимно-однозначное преобразование всюду, кроме  $L/G = \pm 1$ .

Двумерное сечение трехмерного уровня энергии  $\mathcal{H}\left(\frac{L}{G}, l, g\right) = E$  задается плоскостью  $g = g_0 = \text{const}$ , на которой выбираются координаты  $\left(l, \frac{L}{G}\right)$ , и приводит к некоторому точечному двумерному отображению — отображению Пуанкаре. Несложно заметить, что пространство отображения Пуанкаре определено на сфере  $\mathbb{S}^2$  с полюсами, соответствующими  $L/G = \pm 1$ .

Таким образом, исследование динамики системы (2.2) можно свести к исследованию двумерного отображения Пуанкаре

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x), \quad x = \left(l, \frac{L}{G}\right), \tag{3.2}$$

которое определено на  $\mathbb{S}^2$  в области  $0 \leq l < 2\pi$ ,  $-1 \leq L/G \leq 1$ .

#### 4. Обратимости в системе

В данной работе мы выяснили, что динамика исследуемой системы существенно зависит от типа инволюций (обратимостей). Согласно [4], в системе (2.2) всегда присутствует тривиальная инволюция

$$R_0: \boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}, t \rightarrow -t, \quad (4.1)$$

связанная с обращением угловых скоростей. Множеству неподвижных точек этой инволюции соответствует подпространство нулевых скоростей ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ ). Помимо  $R_0$ , система допускает дополнительные инволюции, количество которых определяется количеством компонент смещения по главным динамическим осям центра масс шара. Максимальное количество инволюций соответствует уравновешенному шару (центр масс которого совпадает с геометрическим центром). Все обратимости можно поделить на две группы:

- соответствующие поворотам на  $\pi$  относительно одной из трех динамических осей шара

$$\begin{aligned} \Pi_1: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (\omega_1, \omega_2, -\omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Pi_2: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (\omega_1, -\omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Pi_3: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (-\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

- соответствующие отражениям относительно одной из трех плоскостей, проходящих через динамические оси шара

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (\omega_1, \omega_2, -\omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Sigma_2: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (\omega_1, -\omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Sigma_3: \boldsymbol{\omega} &\rightarrow (-\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для неуравновешенного шара количество инволюций зависит от количества компонент смещения центра масс. Так, при смещении центра масс вдоль одной главной оси, помимо инволюции  $R_0$ , остаются три инволюции: поворот на  $\pi$  относительно оси смещения и две плоскости отражения, проходящие через ось смещения. Если центр масс шара смещен в плоскости (относительно двух главных осей), остается лишь одна дополнительная инволюция, отвечающая отражению относительно выбранной плоскости. Отдельно можно выделить случай произвольного смещения центра масс (вдоль трех главных осей), в котором существует лишь тривиальная инволюция  $R_0$ .

Несложно видеть, что всякая инволюция потоковой системы порождает инволюцию отображения Пуанкаре, если в качестве секущей выбрать многообразие, инвариантное относительно действия этой инволюции. В нашем случае отображение Пуанкаре задается в переменных Андуайе–Депри с секущей  $g = \text{const}$ , а порожденные инволюции принимают одну из нижеописанных форм.

- Обращение скоростей (порожденная инволюцией  $R_0$ ):

$$r_0: \frac{L}{G} \rightarrow -\frac{L}{G}, \quad l \rightarrow l + \pi, \quad g \rightarrow -g. \quad (4.4)$$

- Повороты на  $\pi$  (порожденные инволюциями  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ ):

$$\begin{aligned} \pi_1: \frac{L}{G} &\rightarrow -\frac{L}{G}, & l &\rightarrow l, & g &\rightarrow -g, \\ \pi_2: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & l &\rightarrow \pi - l, & g &\rightarrow \pi - g, \\ \pi_3: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & l &\rightarrow -l, & g &\rightarrow \pi - g. \end{aligned} \quad (4.5)$$

- Отражения относительно плоскостей (порожденные инволюциями  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_1: \frac{L}{G} &\rightarrow -\frac{L}{G}, & l &\rightarrow l, & g &\rightarrow \pi - g, \\ \sigma_2: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & l &\rightarrow \pi - l, & g &\rightarrow -g, \\ \sigma_3: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & l &\rightarrow -l, & g &\rightarrow -g. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Легко видеть, что собой представляют множества неподвижных точек для каждой порожденной инволюции. Для всех инволюций кроме  $r_0$  это линии. Далее будем их называть линиями неподвижных точек инволюции, или просто неподвижными линиями. Для тривиальной инволюции  $r_0$  множество неподвижных точек не определено, так как при нулевых угловых скоростях не определены переменные Депри. Однако благодаря инволюции  $r_0$  отображение Пуанкаре исследуемой системы обладает некоторой симметрией, вследствие чего каждая траектория системы имеет симметричного партнера. Если в системе обнаружен какой-либо устойчивый режим, значит, существует симметричный ему неустойчивый, и наоборот.

Из работ [4, 11, 12] известно, что поведение обратимых систем в окрестности пересечений итераций линий неподвижных точек инволюций близко к консервативному, то есть сохраняющему площадь. Это свойство позволяет выявлять области с возможной диссипацией, анализируя отображение Пуанкаре системы для неподвижных линий. Точки пересечений образов этих линий являются либо периодическими, либо неподвижными, а следовательно, отображение в их окрестности сохраняет площадь. Области отображения, в которые такие пересечения не попали, могут содержать диссипативные (устойчивые или неустойчивые) множества (неподвижные или периодические точки, инвариантные кривые и т. п.).

Таким образом, динамика системы усложняется от случая существования максимального набора обратимостей (уравновешенный шар) к случаю с единственной тривиальной обратимостью  $R_0$  (шар, центр масс которого смещен вдоль всех трех осей).

В данной работе мы подробно останавливаемся на двух случаях.

- Случай произвольного смещения центра масс, при котором в системе существует лишь тривиальная инволюция.
- Смещение центра масс имеет две ненулевые компоненты. Здесь помимо тривиальной инволюции существует одна из трех инволюций  $\Sigma$  ( $\sigma$  для отображения).

## 5. Странные аттракторы

### 5.1. Сценарий возникновения странного аттрактора

При некоторых параметрах в системе (2.2) могут присутствовать странные аттракторы. Опишем сценарий возникновения одного из них (см. рис. 2) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 50, & R &= 3, & m &= 1, \\ I_1 &= 1, & I_2 &= 2, & I_3 &= 3, \\ a_1 &= 1, & a_2 &= 1.5, & a_3 &= 0.5, \\ g &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

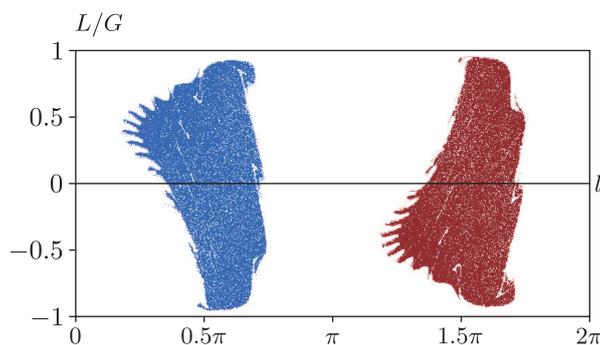


Рис. 2. Хаотическое множество: слева — странный аттрактор, справа — его симметричный партнер репеллер. Траектории с репеллера достаточно быстро сваливаются на аттрактор.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Заметим, что неравенство треугольника для моментов  $I_1, I_2, I_3$  здесь не выполняется. Но это для нас не имеет особого значения. Более того странные аттракторы обнаружены также при других значениях параметров (при которых неравенство треугольника выполняется), однако при параметрах (5.1) они выглядят максимально наглядно.

В качестве бифуркационного параметра выберем ускорение свободного падения  $a_g$ . Вместо  $a_g$  можно использовать и энергию  $\mathcal{E}$ , так как для рассматриваемой задачи увеличение параметра  $a_g$  эквивалентно уменьшению полной энергии.

Сценарий возникновения аттракторов здесь достаточно сложный и он связан с рядом локальных и глобальных бифуркаций. Под локальными бифуркациями будем как обычно понимать бифуркации неподвижных и периодических точек, а также инвариантных кривых отображения Пуанкаре исследуемой системы. Среди глобальных бифуркаций особое внимание будем уделять тем, которые приводят к качественному изменению бассейнов притяжения (отталкивания) инвариантных множеств, связанных с перестроением сепаратрис седловых точек.

Для удобства читателя сначала опишем основные этапы, приводящих к возникновению странного аттрактора, а затем в деталях рассмотрим каждую бифуркацию.

- При  $a_g = 0$  отображение Пуанкаре похоже на консервативное. Здесь видны инвариантные кривые вокруг эллиптических точек  $F_l, F_r, F_d$  и  $F_t$ , разделенных двумя седлами  $S_l$  и  $S_r$  (см. рис. 3а). Когда  $a_g$  становится положительным эллиптические точки превращаются в фокусные, а большинство инвариантных кривых разрушается. При  $a_g > 7.58$  область притяжения фокуса  $F_l$  (далее область  $\mathcal{L}$ ) ограничена неустойчивой

сепаратрисой седла  $S_r$ . По инволюции  $r_0$  область  $\mathfrak{R} = r_0(\mathfrak{L})$  (область отталкивания  $F_r$ ) ограничена устойчивой сепаратрисой седла  $S_l$  (см. рис. 3b).

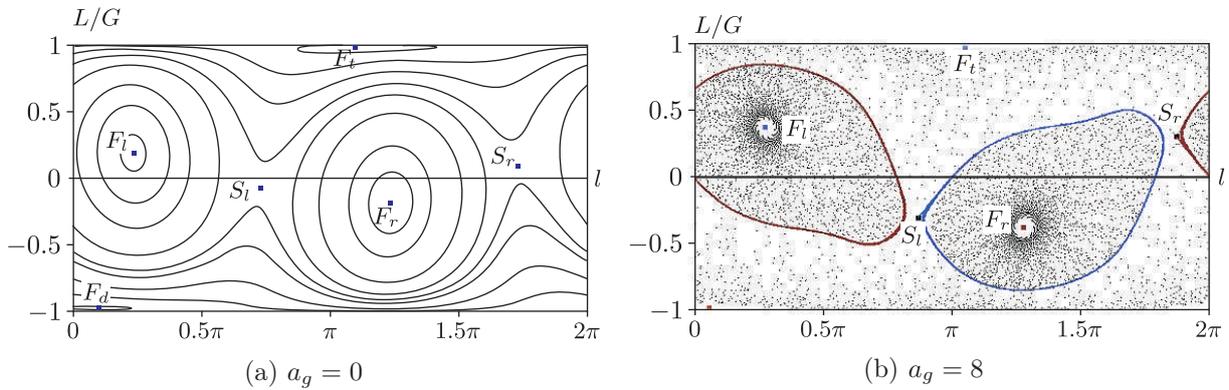


Рис. 3. Отображения Пуанкаре. (a) Отображение расслаивается на инвариантные кривые вокруг эллиптических точек  $F_l$ ,  $F_r$ ,  $F_d$  и  $F_t$ , разделенных двумя седлами  $S_l$  и  $S_r$ . (b) Эллиптические точки стали фокусными.  $F_l$ ,  $F_t$  устойчивые фокусы,  $F_r$  и  $F_t$  — неустойчивые. Неустойчивая сепаратриса седла  $S_r$  наматывается на фокус  $F_l$ , а устойчивая сепаратриса седла  $S_l$  — на  $F_r$ .

- При  $a_g \simeq 8.65$  происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой в  $\mathfrak{L}$  рождаются устойчивая и седловая неподвижные точки  $F_n$  и  $S_n$  (соответственно в  $\mathfrak{R}$  — неустойчивая и седловая точки, см. рис. 4a). Точка  $F_n$  практически сразу становится фокусом. А у седловой точки  $S_n$  при  $a_g > 8.85$  образуется гомоклиническая восьмерка [17], такая что обе ее устойчивые сепаратрисы пересекаются с одной из неустойчивых, а вторая неустойчивая сепаратриса наматывается на фокус  $F_l$  (см. рис. 4c).

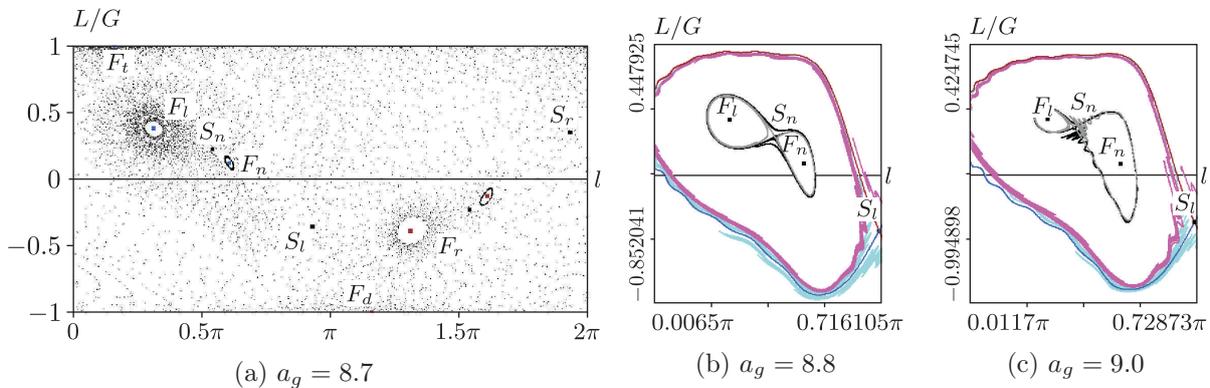


Рис. 4. (a) Седло-узловая бифуркация при  $a_g \simeq 8.65$ .  $F_n$  и  $S_n$  — возникшие в  $\mathfrak{L}$  седло и фокус. (b), (c) Поведение устойчивых (черным) и неустойчивых (серым) сепаратрис седла  $S_n$ . Область, содержащая  $F_l$ ,  $S_n$  и  $F_n$ , ограничена неустойчивой сепаратрисой седла  $S_r$ .

- С дальнейшим ростом  $a_g$  седло  $S_n$  приближается к фокусу  $F_l$  и при  $a_g \simeq 9.14$  исчезает в результате седло-узловой бифуркации, но хаос по-прежнему здесь присутствует, поскольку исчезает седло-узел с трансверсальной гомоклиникой [15]. После этого единственной неподвижной точкой в области  $\mathfrak{L}$  является фокус  $F_n$ , с которым начиная с  $a_g \simeq 8.94$  связан каскад локальных бифуркаций, в результате которых в  $\mathfrak{L}$  остаются лишь седловые точки. Указанный каскад бифуркаций представляет особый интерес и, поэтому, будет описан ниже в 5.1.2.



- При  $a_g \simeq 9.77$  происходит финальное перестроение сепаратрис седел  $S_l$  и  $S_r$  (см. рис. 5), в результате которого траектории почти всех точек из  $\mathfrak{R}$  попадают в  $\mathfrak{L}$  при положительных итерациях отображения Пуанкаре. В этом случае притягивающее множество в  $\mathfrak{L}$  является странным аттрактором, а, соответственно, отталкивающее множество в  $\mathfrak{R}$  — странным репеллером.

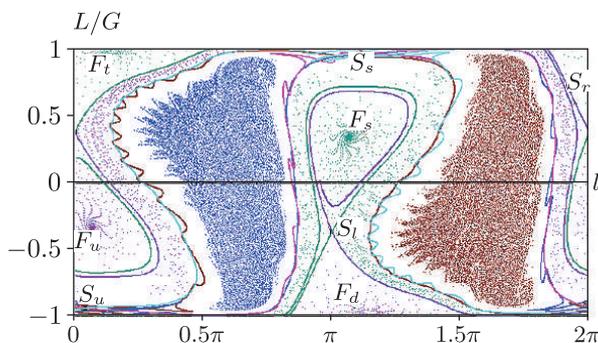


Рис. 5.  $a_g = 9.77$  Финальное расположение сепаратрис.

### 5.1.1. Подробное описание основных бифуркаций

Подробно опишем основные бифуркации (как локальных так и глобальных), приводящие к возникновению странного аттрактора.

На рисунке 3а изображено отображение Пуанкаре исследуемой системы при  $a_g = 0$ . В этом случае вся область отображения расслаивается на инвариантные кривые вокруг четырех эллиптических точек, разделенных двумя седловыми неподвижными точками  $S_l$  и  $S_r$ . При ненулевых значениях параметра  $a_g$  дополнительный интеграл в системе (2.2) пропадает, а эллиптические точки становятся фокусными. На рисунке 6а приведено отображение Пуанкаре при  $a_g = 7$ . Область притяжения фокуса  $F_l$  ограничивает неустойчивая инвариантная кривая  $C_l$ , которая отражается от некоторой замкнутой кривой системы при  $a_g = 0$  и сразу же имеет конечные размеры. По симметрии фокус  $F_r$  неустойчив, и из ее окрестности траектории уходят на замкнутую устойчивую инвариантную кривую  $C_r$ . С неустойчивого фокуса внизу ( $F_d$ ) траектории переходят на верхний устойчивый фокус ( $F_t$ ). При  $0 < a_g < g_1 \simeq 7.584$  качественное поведение системы такое же, как на рисунке 6а.

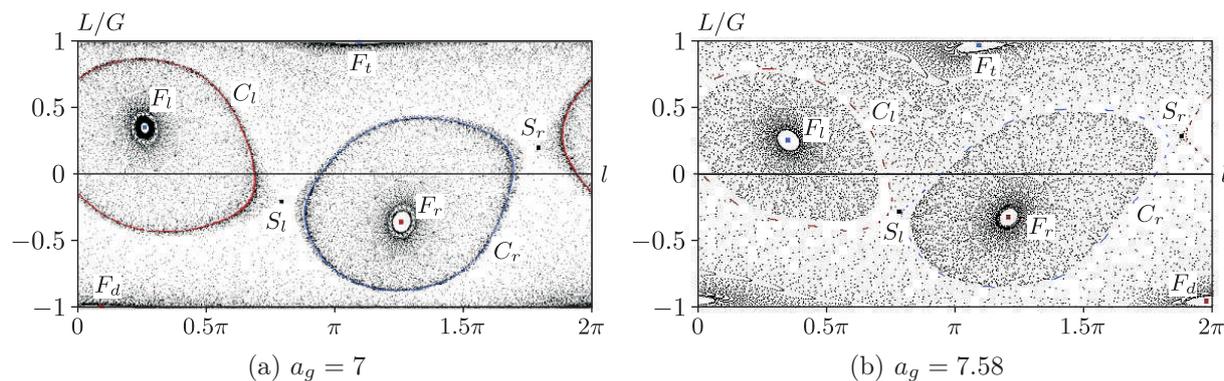


Рис. 6. Отображения Пуанкаре. (а) При  $0 < a_g < 7.57$  область  $\mathfrak{L}$  ограничена неустойчивой инвариантной кривой  $C_l$ , а область  $\mathfrak{R}$  — устойчивой кривой  $C_r$ . (б) При  $a_g \simeq 7.57$  кривые  $C_l$  и  $C_r$  разрушаются в результате резонансов.

При  $a_g > g_1$  кривые  $C_l$  и  $C_r$  разрушаются по Афраймовичу–Шильникову [16] в результате возникающих на них резонансов (см. рис. 6б).

После разрушения инвариантных кривых в системе остаются все те же устойчивые и неустойчивые точки фокусного типа. Только теперь с фокуса  $F_d$  траектории могут сваливаться как на фокус  $F_t$  так и на фокус  $F_l$ , а с  $F_r$  — только на  $F_t$ . Убедиться в этом помогло изучение поведения устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых точек  $S_l$  и  $S_r$ .

При  $a_g \simeq 8.65$  в области  $\mathcal{L}$  (а значит и в  $\mathcal{R}$ ) происходит седло-узловая бифуркация. Родившийся устойчивый узел практически сразу становится устойчивым фокусом ( $F_n$ ), а седловая точка ( $S_n$ ) начинает отходить в сторону фокуса  $F_l$  (см. рис. 4а). Обе неустойчивые сепаратрисы седловой точки  $S_n$  наматываются на два ближайших к ней устойчивых фокуса ( $F_l$  и  $F_n$ ). Устойчивые сепаратрисы раскручиваются вокруг области, содержащей эти два фокуса (см. рис. 4б). Следует отметить, что границей области  $\mathcal{L}$  является неустойчивая сепаратриса седла  $S_r$ . С ростом параметра  $a_g$  приблизительно до значения 8.85 устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седловой точки  $S_n$  начинают соприкасаться, образуя в дальнейшем гомоклинические пересечения (см. рис. 4с).

При  $a_g \simeq 9.14$  седловая точка  $S_n$  подходит к фокусу  $F_l$  и исчезает вместе с ним в результате седло-узловой бифуркации (аналогичным образом исчезает  $F_r$ ). К этому моменту в  $\mathcal{L}$  уже присутствует хаос, возникающий из-за гомоклинических пересечений сепаратрис седловой точки  $S_n$  ([15]). После седло-узловой бифуркации в области  $\mathcal{L}$  остается единственная устойчивая точка  $F_n$ .

Важным моментом в сценарии является возникновение двух пар седел ( $S_s$  и  $S_u$ ) и фокусов (устойчивый сверху  $F_s$  и симметричный неустойчивый снизу  $F_u$ ), возникающих в результате седло-узловых бифуркаций при  $a_g \simeq 9.07$  (см. рис. 7). С ростом параметра  $a_g$  область притяжения фокуса  $F_s$  расширяется и при  $a_g \simeq 9.56$  происходит перестроение сепаратрис седел  $S_l$  и  $S_r$  (см. рис. 8). Опишем поведение сепаратрис седла  $S_l$  после перестроения. Левая неустойчивая сепаратриса наматывается на фокус  $F_s$ , левая устойчивая — на неустойчивый фокус  $F_d$ . Поведение правых сепаратрис гораздо сложнее. Они пересекаются слева от седла  $S_l$  и при дальнейшем построении начинают «замазывать» внутренние границы области  $\mathcal{L}$ . Для  $S_r$  ситуация симметричная. В результате этого перестроения траектории из  $\mathcal{R}$  начинают попадать не только на фокусы  $F_t$  и  $F_s$ , но и в  $\mathcal{L}$ .

С дальнейшим ростом  $a_g$  примерно до значения 9.77 происходит финальное перестроение сепаратрис (см. рис. 5), при котором сепаратрисы седел  $S_l$  и  $S_s$  (а также  $S_r$  и  $S_u$ ) перестают пересекаться, отдаляясь

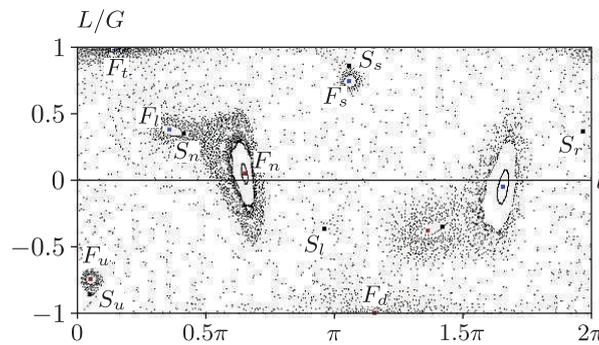


Рис. 7. Возникновение двух пар седел  $S_s$ ,  $S_u$  и фокусов  $F_s$ ,  $F_u$  при  $a_g = 9.1$ .

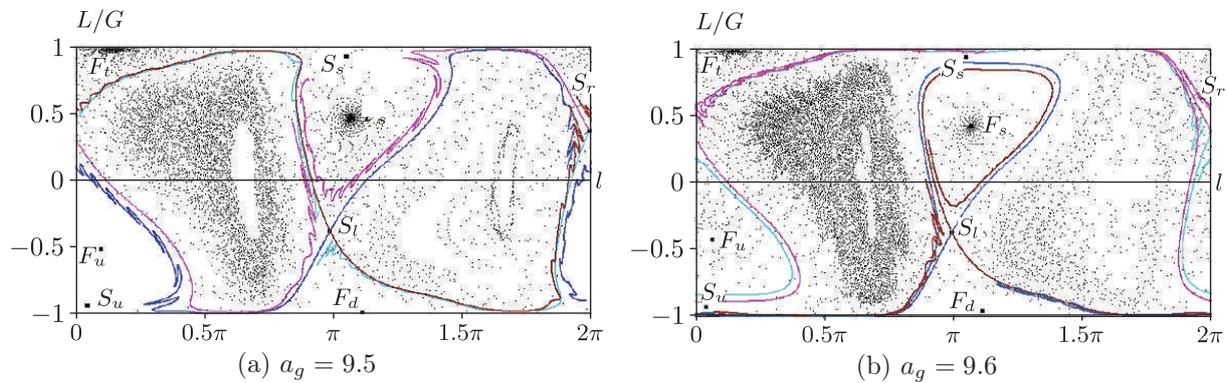


Рис. 8. Перестроение сепаратрис седла  $S_l$ .

друг от друга. После перестроения траектории из  $\mathfrak{R}$  начинают попадать исключительно в  $\mathfrak{R}$ , покинуть которую не могут. Помимо области, включающей аттрактор и репеллер, инвариантной становятся область, содержащая  $F_u, S_r, F_t$ , а также симметричная ей область, содержащая  $F_s, S_l, F_d$ . Эти области инвариантны в том смысле, что траектории любых их точек не покидают их как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Примечательным является факт, что при  $a_g \simeq 9.7715$  в области, содержащей  $F_n$ , в результате каскадов локальных бифуркаций, неподвижные точки теряют устойчивость и возникает хаос.

### 5.1.2. Каскад локальных бифуркаций в окрестность $F_n$

В окрестности  $F_n$  переход к хаосу является результатом каскада локальных бифуркаций, связанных с этой точкой. Начиная с  $a_g \simeq 8.87$  вокруг  $F_n$  возникают устойчивые резонансные кривые (последовательности чередующихся фокусов и седел, см. рис. 9а). Большинство этих кривых являются проходимыми, то есть не все траектории, подходя к ним, «сваливаются» на их фокусные точки, а проходят дальше к  $F_n$ . Большая часть родившихся резонансов вскоре пропадает в результате седло-узловых бифуркаций. При  $a_g \simeq 8.94$  в результате бифуркации Неймарка–Сакера фокус  $F_n$  становится неустойчивым, а в его окрестности рождается устойчивая инвариантная кривая  $C_n$ , притягивающая большинство траекторий из окрестности  $F_n$  (см. рис. 9б).

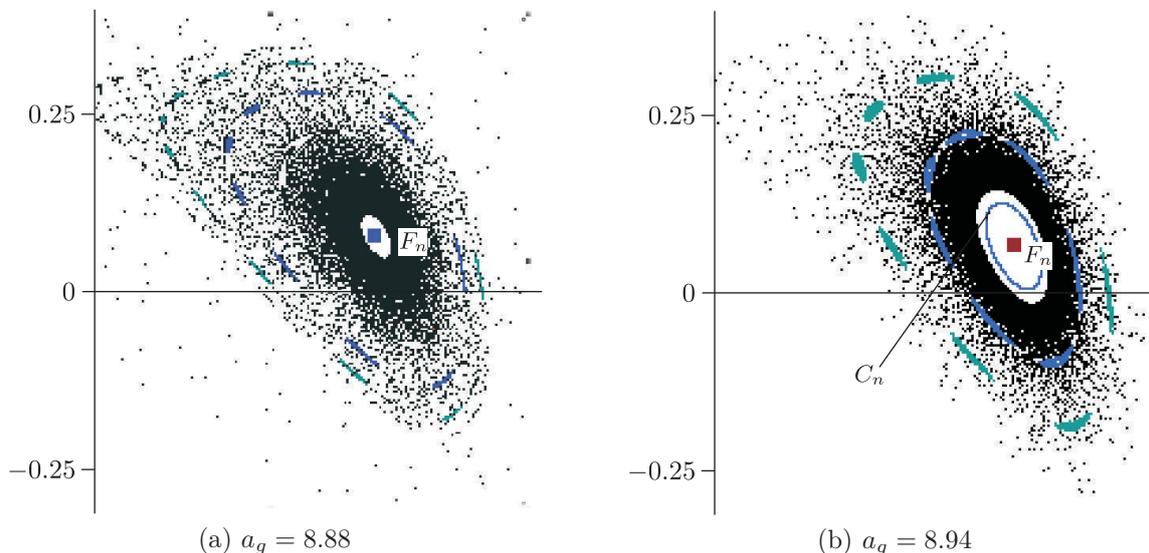


Рис. 9. Отображение Пуанкаре в окрестности фокуса  $F_n$  до и после бифуркации Неймарка–Сакера.

При  $a_g \simeq 9.31$  от точки  $F_n$  в результате прохождения ее мультипликаторов через единичную окружность вблизи резонанса  $1 : 4$  (вблизи  $e^{\frac{\pm i\pi}{2}}$ ) отделяется неустойчивая фокусная точка периода 4 (см. рис. 10а). При этом сам фокус  $F_n$  остается неустойчивым. Из окрестности родившейся точки периода 4 как и из окрестности  $F_n$  траектории убегают на инвариантную кривую  $C_n$ . Вскоре (при незначительном увеличении параметра  $a_g$ ) вокруг неустойчивого фокуса периода четыре рождается неустойчивая инвариантная кривая (в результате обратной бифуркации Неймарка–Сакера), после чего он становится устойчивым.

При  $a_g \simeq 9.375$  на  $C_n$  возникает резонанс высокого периода в результате чего кривая разрушается по Афраймовичу–Шильникову [16].

Начиная с  $a_g = 9.6055$ , устойчивый фокус периода четыре начинает претерпевать каскад локальных бифуркаций, завершающийся при  $a_g \simeq 9.617$ .

При  $a_g = 9.49$  мультипликаторы неустойчивого фокуса  $F_n$  проходят через единичную окружность вблизи резонанса  $1 : 3$  (вблизи  $e^{\frac{\pm 2i\pi}{3}}$ ) и от него отделяется неустойчивый фокус периода 3 (см. рис. 10b). При этом сам фокус  $F_n$  остается неустойчивым. Неустойчивый фокус периода 3 сначала становится устойчивым (в результате обратной бифуркации Неймарка–Сакера), а затем при  $a_g \simeq 9.72$  он теряет устойчивость за счет каскада локальных бифуркаций.

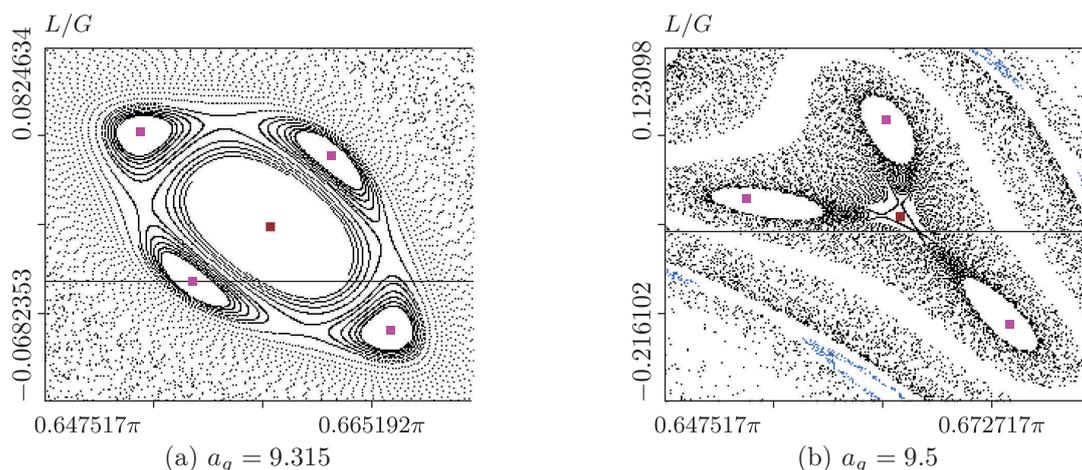


Рис. 10. Отображение Пуанкаре в окрестности фокуса  $F_n$ : (a) возникновение резонанса  $1 : 4$ , (b) возникновение резонанса  $1 : 3$ .

Схожим образом бифурцирует и сам фокус  $F_n$ . При  $a_g \simeq 9.634$  он удваивается и возникает неустойчивый фокус периода 2. Затем происходит опять бифуркация удвоения периода и рождается неустойчивый фокус периода 4. Последний вскоре становится устойчивым в результате обратной бифуркации Неймарка–Сакера. После прохождения  $F_n$  через каскад локальных бифуркаций единственной устойчивой периодической точкой в  $\mathcal{L}$  остается устойчивый фокус периода 3 (см. рис. 11b).

При  $a_g \simeq 9.7715$  каскад локальных бифуркаций завершаются для фокуса периода 3 и в  $\mathcal{L}$  не удается численно обнаружить устойчивых периодических точек. Вся эта область заполняется хаотическими траекториями.

Далее мы численно проверяем может ли каскад локальных бифуркаций проходить по сценарию Фейгенбаума.

Переход к хаосу через каскад удвоения периода называется сценарием Фейгенбаума и является типичным как для консервативных, так и для сильно диссипативных двумерных отображений  $\bar{x} = F(x, \mu)$ , непрерывно зависящих от параметра  $\mu$  [20, 21]. Последовательность бифуркационных значений параметра в этом случае является сходящейся, притом скорость сходимости  $\delta_\mu$  асимптотически постоянна и универсальна как для консервативных, так и для диссипативных отображений. Скорость сходимости называется константой Фейгенбаума и определяется по формуле

$$\delta_\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+2} - \mu_{i+1}}$$

Для диссипативных отображений  $\delta_\mu = 4.6692$ , для консервативных  $\delta_\mu = 8.7211$ .



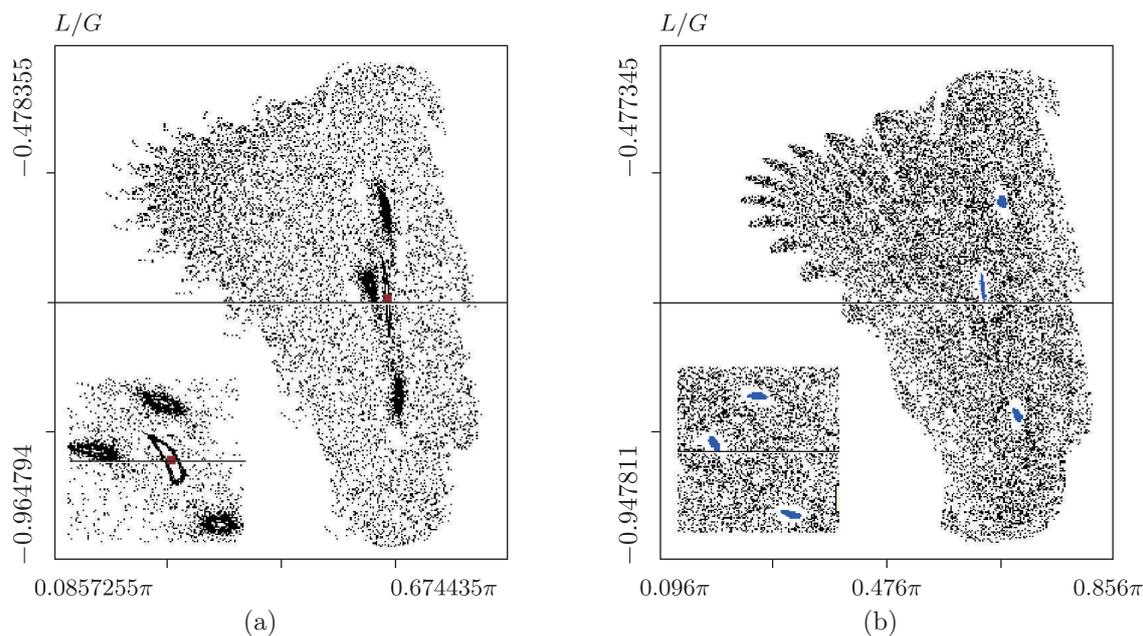


Рис. 11. Отображение Пуанкаре в окрестности фокуса  $F_n$  до и после исчезновения  $F_n$  через каскад бифуркаций удвоения периода.

Предположим, что у нас каскад локальных бифуркаций отвечает последовательности Фейгенбаума. Рассмотрим подробнее каскад локальных бифуркаций, связанных с точкой  $F_n$ . Мы обнаружили, что начало цепочки бифуркаций выглядит следующим образом: два удвоения периода, обратная бифуркация Неймарка–Сакера и пять последовательных удвоений периода. Предположим, что дальнейшие бифуркации проходят по сценарию Фейгенбаума (отследить следующую после пятого удвоения бифуркацию не удалось из-за погрешностей счета). Оценим скорость сходимости по пяти указанным бифуркациям. В таблице 1 приведены значения параметра  $a_g$ , при которых происходят удвоения, а также текущая скорость сходимости.

Таблица 1. Оценка константы Фейгенбаума для удвоений фокуса  $F_n$

Период	4 → 8	8 → 16	16 → 32	32 → 64	64 → 128
$a_g$	9.71368720	9.71484863	9.71498427	9.71499811	9.7150003
$\delta_{a_g}$	—	8.5627	9.7976	6.2910	—

Как видно из таблицы, получить сходимость к какой-либо из универсальных констант Фейгенбаума не удалось. Вероятно, это связано со сложным знакопеременным поведением дивергенции исследуемой системы, в результате которого бифуркации удвоения периода конкурируют с бифуркациями Неймарка–Сакера. Как известно, именно благодаря «знакопеременности» дивергенции у мультипликаторов периодических точек появляется дополнительная возможность покинуть единичную окружность через  $e^{i\phi}$ , а не только двигаться по ней, проходя через  $-1$ . В результате такой конкуренции после череды бифуркаций удвоения могут встретиться бифуркации Неймарка–Сакера, что в итоге сказывается на финальной асимптотической константе.

## 5.2. Свойства странного аттрактора

Приведем ряд количественных и качественных характеристик хаотического множества, расположенного в области  $\mathcal{L}$ .

Бассейном притяжения странного аттрактора является область  $\mathfrak{X}$  на отображении. Расположение устойчивых сепаратрис седловых точек (см. рис. 5) позволяет построить границу странного аттрактора. Слева он ограничен устойчивой сепаратрисой (голубого цвета) седла  $S_r$ , а справа — устойчивой сепаратрисой (синего цвета) седла  $S_l$  (см. рис. 5). В верхней и нижней частях эти сепаратрисы приближаются друг к другу, как бы замыкая область со странным аттрактором. Таким образом траектории, стартующие из области  $\mathfrak{X}$  переходят на странный аттрактор в области  $\mathcal{L}$  и в дальнейшем не покидают его.

Приведем анализ показателей Ляпунова для потока (2.2) в области  $\mathcal{L}$ , отвечающей странному аттрактору. Три из шести ляпуновских показателей исследуемой системы являются нулевыми благодаря наличию трех интегралов движения (2.4), еще один нулевой показатель отвечает сдвигу по времени. Таким образом, исследуемый поток обладает двумя ненулевыми показателями Ляпунова. Для вычисления полного спектра ляпуновских показателей применялся известный алгоритм Бенетина [19]. Для определения погрешности численного счета вычисление ляпуновских показателей выполняется многократно из различных точек на аттракторе. Полученный набор значений рассматривается как выборка случайной величины, для которой оценивается математическое ожидание и выборочная дисперсия. В качестве оценки погрешности вычислений используется среднеквадратичное отклонение — корень из выборочной дисперсии. Ниже приведены ненулевые ляпуновские показатели для странного аттрактора, а также их сумма с учетом погрешностей счета:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= 0.083368 \pm 0.000422, \\ \Lambda_2 &= -0.084553 \pm 0.000423, \\ \Lambda_1 + \Lambda_2 &= -0.001184 \pm 0.000011.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Положительный показатель Ляпунова подтверждает хаотическую природу исследуемого множества. Отрицательная сумма свидетельствует о сжатии объемов, характерном для настоящих аттракторов.

Подсчитаем размерность аттрактора по формуле Каплана – Йорке [18]:

$$D = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \simeq 1.986.\tag{5.3}$$

Из формулы видно, что размерность близка к двум, в связи с чем аттрактор занимает соизмеримую с пространством отображения область.

Перечисленные свойства позволяют утверждать, что обнаруженное хаотическое притягивающее множество действительно является странным аттрактором. При этом его нельзя отнести ни к одному из известных, хорошо исследованных аттракторов (лоренцовского типа, типа Эно или т. д.).

## 6. Смешанная динамика

Как отмечалось выше, при смещении центра масс шара в плоскости (вдоль двух осей) в системе (2.2) существует дополнительная инволюция, связанная с отражением относительно этой плоскости. Для отображения она порождает одну из трех инволюций семейства (4.6). В этом случае в исследуемой системе обнаружен еще один интересный феномен —

так называемая смешанная хаотическая динамика [23, 24]. Не будем вводить определение смешанной хаотической динамики в общем случае (с этим определением можно ознакомиться, например, в [22]), а лишь разъясним это понятие для двумерных обратимых отображений. В указанном случае смешанная динамика — это хаотическое инвариантное множество, обладающее следующими свойствами:

- оно содержит счетное множество асимптотически устойчивых, неустойчивых и седловых траекторий, а также счетное множество симметричных эллиптических траекторий,
- замыкания множеств траекторий разных типов имеют непустое пересечение.

Последнее означает, что аттракторы и репеллеры могут пересекаться. Более того в численном эксперименте в этом случае может казаться, что аттрактор и репеллер образуют единое целое.

Как и в работе [14], аттрактором будем называть итерации линии неподвижных точек инволюции в прямом времени, а репеллером — итерации этой линии в обратном времени. Экспериментальным подтверждением того, что хаос имеет смешанную природу, служит отличие аттрактора от репеллера, которое возникает из-за асимметрии устойчивых периодических точек, принадлежащих аттрактору и неустойчивых периодических точек, принадлежащих репеллеру.

Так как мы итерируем линию неподвижных точек инволюции, то этому пересечению принадлежат симметричные эллиптические и симметричные седловые периодические точки [11]. Кроме этого, к этому пересечению должны примыкать устойчивые и неустойчивые точки очень больших периодов. Однако численно обнаружить последние невозможно, поэтому вместо точек очень больших периодов требуется обнаружить точки достаточно высокого периода. При этом требование пересечения замыканий устойчивых и неустойчивых точек заменяется требованием их близости (соседства).

Для отображения Пуанкаре на рисунке 12а изображен аттрактор, а на рисунке 12b — репеллер, получаемые итерированием линии неподвижных точек инволюции при следующих параметрах системы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 50, & a_g &= 9.7715, \\ R &= 3, & m &= 1, \\ I_1 &= 1, & I_2 &= 2, & I_3 &= 3, \\ a_1 &= 1, & a_2 &= 1.5, & a_3 &= 0, & g &= \pi/2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

На рисунке 12а, б можно выделить две части. Первой из них принадлежат две большие белые области. В каждой из них содержатся по устойчивой (вверху) и неустойчивой (внизу) фокусной точке. Траектории, запущенные с неустойчивых фокусов, неизбежно попадают на устойчивые. Более того, эти две области являются инвариантными в описанном выше смысле (траектории их не покидают и не попадают на них извне). Вторая часть это интересующая нас хаотическая область. Можно заметить, что вид хаоса на рисунках 12а и 12b различен, хотя явно имеет непустую общую часть. Кроме того, внутри хаоса численно обнаружены соседствующие устойчивые и неустойчивые точки периода 19 и периода 133 (см. рис. 12d, e). Приведенные факты позволяют сделать вывод, что рассматриваемый хаос является смешанной динамикой.

Автор благодарит А. В. Борисова, С. В. Гонченко, И. С. Мамаева за ценные советы, без которых выполнение данной работы было бы невозможным.

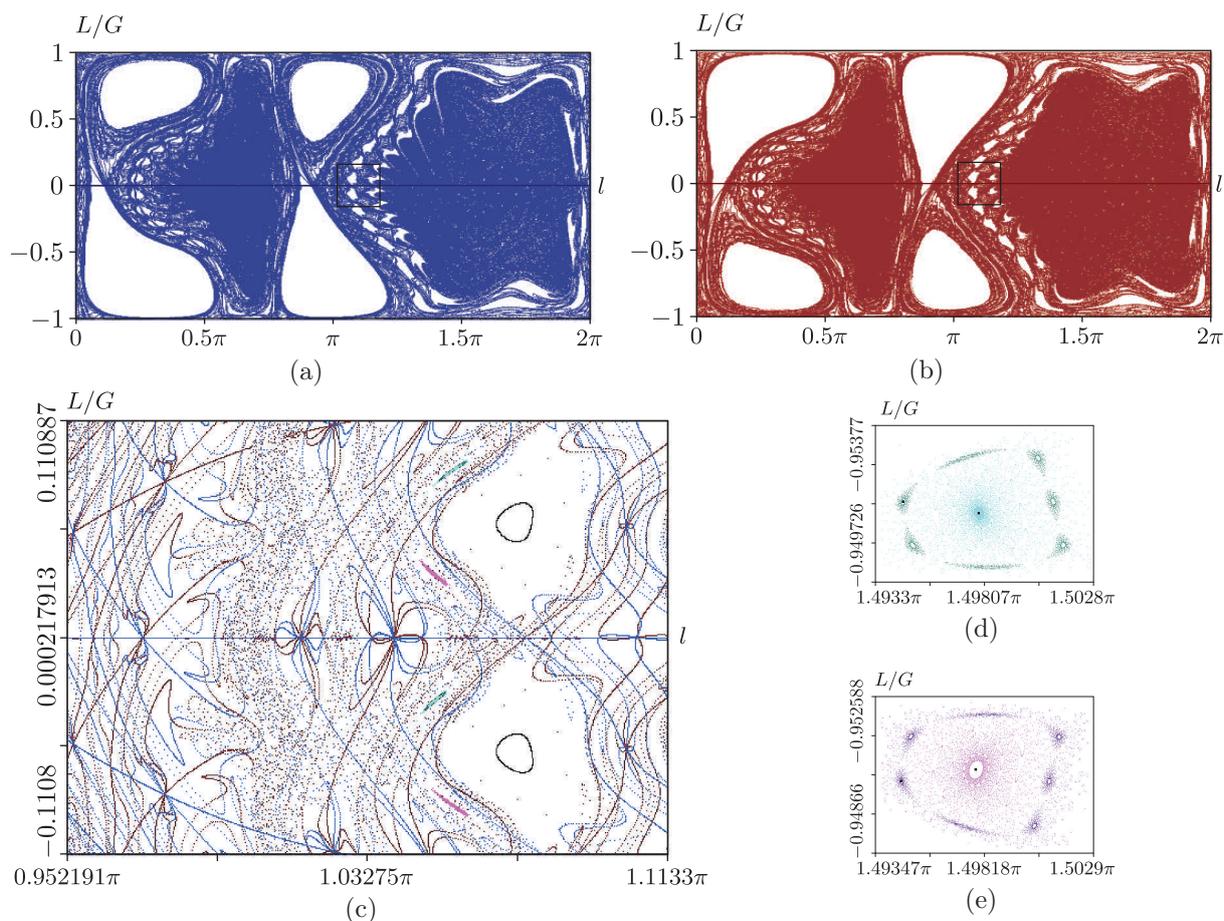


Рис. 12. (a), (b) Аттрактор (репеллер) — 100 итераций линии  $L/G = 0$  в прямом (обратном) времени с шагом 0.001. (c) Увеличенная область совмещенных аттрактора и репеллера. (d) Устойчивы и неустойчивые фокусы внутри смешанной динамики.

## Список литературы

- [1] Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2-3-5 distributions // Proc. IUTAM Symp. on Hamiltonian dynamics, vortex structures, turbulence (Moscow, Russia, 25–30 August 2006), pp. 469–480.
- [2] Koiler J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [3] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4 sér., 1895, vol. 5, pp. 397–417.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Hierarchy of Dynamics of a Rigid Body Rolling without Slipping and Spinning on a Plane and a Sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 63, pp. 277–328.)
- [5] Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 328 с.

- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.
- [7] Бизяев И. А., Казаков А. О. Интегрируемость и стохастичность некоторых задач неголономной механики // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 257–265.
- [8] Lynch P., Bustamante M. D. Precession and recession of the rock'n'roller // *J. Phys. A*, 2009, vol. 42, no. 42, 425203, 25 pp.
- [9] Lynch P., Bustamante M. D. Quaternion solution for the rock'n'roller: Box orbits, loop orbits and recession. arXiv:1207.6022 (2012).
- [10] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [11] Chavoya-Aceves O., Piña E. Symmetry lines of the dynamics of a heavy rigid body with a fixed point // *Il Nuovo Cimento B*, 1989, vol. 103, no. 4, pp. 369–387.
- [12] Devaney R. L. Reversible diffeomorphisms and flows // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 218, pp. 89–113.
- [13] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616. (*См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.)
- [14] Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Phys. D*, 2002, vol. 170, pp. 118–130.
- [15] Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // *Докл. АН СССР*, 1978, т. 243, № 1, с. 26–29.
- [16] Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // *Докл. АН СССР*, 1974, т. 219, № 6, с. 1281–1285.
- [17] Gonchenko S. V., Simó C., Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 3, pp. 621–678.
- [18] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня» // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.
- [19] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1, 2 // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [20] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*, 1983, т. 141, с. 343–374.
- [21] Борисов А. В., Симаков Н. Н. Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела // *Регулярная и хаотическая динамика*, 1997, т. 2, № 1, с. 64–75.
- [22] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 507–518.
- [23] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*, 2004, vol. 17, no. 4, pp. 1217–1244.
- [24] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O. V. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 1, pp. 1–33.

## Chaotic dynamics phenomena in the rubber rock-n-roller on a plane problem

Alexey O. Kazakov

Institute of Computer Science  
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

Kazakovdz@yandex.ru

In this paper we study a problem of rolling of the dynamically asymmetric ball with displacement center of gravity on a plane without slipping and vertical rotating. It is shown that the dynamics of the ball is significantly affected by the type of reversibility. Depending on the type of the reversibility we found two different types of dynamical chaos: strange attractors and mixed chaotic dynamics. In this paper we describe a strange attractor development, and then its basic properties. A set of criteria by which in numerical experiments mixed dynamics may be distinguished from other types of dynamical chaos are given.

MSC 2010: 37J60, 37J35

Keywords: rock-n-roller, rubber rolling, reversibility, bifurcation, focus, saddle, separatrix, homoclinic tangency, Lyapunov's exponents, mixed dynamics, strange attractor

Received April 22, 2013, accepted May 30, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 309–325 (Russian)