Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 3. С. 603–610.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

Частные случаи задачи трех тел

П. Пиццетти

Для трех тел, на которые действует взаимное ньютоново притяжение, единственные случаи, когда отношения между расстояниями неизменны, — это, как известно, случаи, когда начальные положения и скорости тел таковы, что три тела либо все время *лежат на одной прямой*, либо все время находятся в вершинах *равностороннего треугольника.* (Лаплас, «Небесная механика», книга X).

Р. Леман-Филе[1] показал, что, аналогично случаю 2, *четыре тела*[2] могут двигаться так, чтобы все время служить вершинами правильного тетраэдра, и что, в обобщение случая 1, произвольное количество тел может все время лежать на одной прямой так, чтобы отношения расстояний не изменялись. Г. Дзиобек[3] изучал интересные случаи плоской конфигурации 4 тел, когда может возникать гомографическое движение. Он исходит из замечания о том, что движение заведомо будет гомографическим (разумеется, если оговорить простые условия, которым должны удовлетворять начальные скорости), когда конфигурация такова, что в любой момент времени потенциал ньютоновых сил взаимного притяжения принимает такое же значение, которое он имел бы, если бы сила взаимодействия была пропорциональна простому расстоянию. Но то, что гомографическое движение может реализовываться только одним этим способом, *a priori* не очевидно.

Здесь мы будем рассматривать общую и непосредственную задачу о гомографическом движении n тел, которые притягиваются друг к другу по закону Ньютона (наши рассуждения сохраняют свою силу и в случае, когда притяжение пропорционально произвольной степени расстояния). Мы покажем, что в случае тел, *не лежащих на одной плоскости*, единственно возможное гомографическое движение будет *гомотетическим* (центр гомотетии совпадает с общим центром масс); в частности, в случае *четырех* тел *правильный тетраэдр*, рассмотренный Леманом-Филе, — это *единственная* возможность. В случае тел, лежащих на одной плоскости, мы без труда найдем известные результаты; наконец, мы покажем, что для n тел, лежащих на одной прямой, инвариантность отношений между взаимными расстояниями представляет собой (если отбросить исключительный случай) *необ-*

Pizzetti P. Casi particolari del problema dei tre corpi // Rendiconti, 1904, vol. XIII, 1° Sem., p. 17–26.
Перевод с французского В. В. Шуликовская.

[1] Lehmann-Filhés, «Astr. Nachr.», 1891, № 3033.

[2] В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что на тела действует только взаимное притяжение.

[3] Dziobek, «Astr. Nachr.», 1900, № 3627.

ходимое следствие гипотезы о линейном расположении. Для краткости мы в дальнейшем всегда будем опускать формулировку условий, которым удовлетворяют начальные скорости; в отдельных случаях эти условия очевидны.

2. *Тела, не лежащие в одной плоскости.* Рассмотрим декартовы оси координат, постоянные по направлению, и пусть начало координат находится в общем центре масс, x_i, y_i, z_i обозначают координаты массы m_i в момент времени t, а A_i, B_i, C_i — их значения при $t = 0$. Далее, пусть α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы подвижного ортогонального трехгранника, жестко связанного с прямыми, которые соединяют начало координат и n тел, а θ — функция от времени, принимающая значение 1 при $t = 0$. В соответствии с гипотезой о гомографическом движении мы можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} x_i = (\alpha_1\mathrm{A}_i + \alpha_2\mathrm{B}_i + \alpha_3\mathrm{C}_i)\theta, \\ y_i = (\beta_1\mathrm{A}_i + \beta_2\mathrm{B}_i + \beta_3\mathrm{C}_i)\theta, \\ z_i = (\gamma_1\mathrm{A}_i + \gamma_2\mathrm{B}_i + \gamma_3\mathrm{C}_i)\theta. \end{cases} \tag{1}$$

Дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\mathit{\Delta}_{si}^3} \qquad (s \neq i) \tag{2}$$

(где постоянную притяжения для простоты взяли равной 1) можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_i\frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + \mathrm{B}_i\frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + \mathrm{C}_i\frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} &= \\ = \frac{1}{\theta^2}\sum_s m_s \frac{\alpha_1(\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i) + \alpha_2(\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i) + \alpha_3(\mathrm{C}_s - \mathrm{C}_i)}{\mathrm{D}_{si}^3}&. \end{aligned} \tag{2*}$$

Обозначим через D_{si}, $\mathit{\Delta}_{si}$ значения, которые принимает расстояние (m_s, m_i) в моменты времени 0 и t соответственно. Тогда, очевидно,

$$\mathit{\Delta}_{si} = \theta\mathrm{D}_{si}.$$

Записывая еще два уравнения, аналогичные уравнению (2), затем умножая на α_1, β_1, γ_1 и складывая, мы получим

$$\mathrm{A}_i\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + \mathrm{B}_i\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + \mathrm{C}_i\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} = \frac{1}{\theta^2}\sum_s m_s\frac{\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где символ S обозначает суммирование по трем буквам α, β, γ.

Поскольку тела не лежат в одной плоскости, характеристика[4] матрицы значений A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равна 3. Поэтому, с учетом уравнений (3), нетрудно выразить интересующие нас значения величин

$$\theta^2\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2}, \quad \theta^2\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2}, \quad \theta^2\mathrm{S}\alpha_1\frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} \tag{4}$$

как функции величин, не зависящих от времени. Таким образом, чтобы в итоге движение было гомографическим, необходимо, чтобы выражения (4) вырождались в константы.

[4] здесь: ранг. — *Прим. перев.*

С другой стороны, если обозначить через π, χ, ϱ компоненты угловой скорости вращения подвижного трехгранника в момент времени t относительно подвижных осей координат и воспользоваться тем, что по нашим формулам

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \varrho\alpha_2 - \chi\alpha_3 \qquad (1,2,3)\ (\pi,\chi,\varrho),$$

мы без труда выразим величины (4) через π, χ, ϱ и их первые производные π', χ', ϱ' по времени. В итоге справедливы уравнения

$$\begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2+\chi^2) = a, \\ -2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = b, \\ 2\theta^2\theta'\chi + \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi = c, \end{cases} \tag{5}$$

где a, b, c — константы. Если вместо коэффициентов α_1, β_1, γ_1 комбинировать уравнения (2) с коэффициентами α_2, β_2, γ_2 или же α_3, β_3, γ_3, то мы получим еще шесть уравнений

$$\begin{cases} 2\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = a', \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2+\pi^2) = b', \\ -2\theta^2\theta'\pi - \theta^3\pi' + \theta^3\varrho\chi = c', \\ -2\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\pi\varrho = a'', \\ 2\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho = b'', \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\pi^2+\chi^2) = c''. \end{cases} \tag{5$'$}$$

Из всего этого сразу следует

$$\theta^3\pi\chi = \text{const}, \quad \theta^3\chi\varrho = \text{const}, \quad \theta^3\varrho\pi = \text{const}.$$

Таким образом, отношения $\pi : \chi : \varrho$ постоянны, то есть направление мгновенной оси вращения не изменяется относительно подвижных осей, а следовательно, и относительно неподвижных осей. Тогда мы можем положить $\pi = \chi = 0$, принимая ось вращения за ось z, в результате девять полученных выше уравнений примут вид

$$\theta^2\theta'' = \text{const}, \quad 2\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' = \text{const}, \quad \theta^3\varrho^2 = \text{const},$$

и эта система может выполняться только в одном из следующих двух случаев:

$$\begin{array}{ll} \text{I}^\circ & \begin{cases} \varrho = 0, \\ \theta^2\theta'' = \text{const}, \end{cases} \\ \text{II}^\circ & \begin{cases} \varrho = \text{const}, \\ \theta = \text{const}. \end{cases} \end{array} \tag{6}$$

Первый из них соответствует простому движению растяжения, гомотетичному, при котором каждое из тел движется по прямой, соединяющей его с общим центром тяжести; второй соответствует *жесткому* движению равномерного вращения вокруг оси z. Для начала сразу исключим это второе решение. Действительно, дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2z_i}{dx^2} = \sum_s m_s\frac{z_s - z_i}{\Delta_{si}^3}$$

в этом случае даст нам

$$0 = \sum_s m_s \frac{\mathrm{C}_s - \mathrm{C}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} \qquad (s \neq i). \tag{7}$$

Однако тела не лежат в одной плоскости, и среди них будет одно, для которого значение C_i максимально (либо превосходит все остальные C, либо, по меньшей мере, совпадает со значениями C у некоторых других тел и превосходит значения C у остальных). Для такого тела i все слагаемые в данной сумме меньше нуля (или, по меньшей мере, часть из них равна нулю, а другие меньше), так что (7) выполняться не может.

Итак, единственный возможный случай гомографического движения тел, не лежащих в одной плоскости, — это *гомотетическое* движение, заданное с помощью уравнения (6). Тогда мы можем заменить систему (1) на уравнения

$$x_i = \theta \mathrm{A}_i, \quad y_i = \theta \mathrm{B}_i, \quad z_i = \theta \mathrm{C}_i,$$

а уравнения (2) примут вид

$$\mathrm{A}_i \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i}{\mathrm{D}_{si}^3}. \tag{8}$$

Если оставить в стороне очевидные условия, относящиеся к начальным скоростям, то необходимые и достаточные условия того, что движение происходит требуемым образом, состоят в том, что выполняются уравнения

$$\frac{1}{\mathrm{A}_i} \sum_s m_s \frac{\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = \frac{1}{\mathrm{B}_i} \sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = \frac{1}{\mathrm{C}_i} \sum_s m_s \frac{\mathrm{C}_s - \mathrm{C}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} \tag{9}$$

и что общее значение этих трех соотношений не зависит от индекса i. Тем самым у нас есть $3n - 1$ условных уравнений на A_i, B_i, C_i. Они включают в себя то условие, что начало координат совпадает с центром масс. Действительно, полагая

$$\theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathrm{K}, \tag{10}$$

уравнениям (8), (9) можно придать вид

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_s m_s \frac{\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = -\mathrm{K}\mathrm{A}_i, \\ \displaystyle\sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = -\mathrm{K}\mathrm{B}_i, \\ \displaystyle\sum_s m_s \frac{\mathrm{C}_s - \mathrm{C}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = -\mathrm{K}\mathrm{C}_i. \end{cases} \tag{11}$$

Теперь, умножая их на m_i и суммируя по индексам i, мы получим

$$\sum_i m_i \mathrm{A}_i = \sum_i m_i \mathrm{B}_i = \sum_i m_i \mathrm{C}_i = 0. \tag{12}$$

Обозначая через R, R_0 расстояния от какого-то одного из тел до начала координат в моменты времени t и *нуль* соответственно, мы можем переписать (10) в форме

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} = -\frac{\mathrm{K}\mathrm{R}_0^3}{\mathrm{R}^2}. \tag{13}$$

Иначе говоря, любое из тел движется к центру масс так, как если бы там была сконцентрирована масса $\mathrm{K}\mathrm{R}_0^3$.

3. *Частные случаи.* При $n = 4$ проведем плоскость zy параллельно плоскости трех тел m_1, m_2, m_3, так что $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3$. Тогда первое из уравнений (11), в котором последовательно $i = 1, 2, 3$, дает нам

$$m_4 \frac{\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_1}{\mathrm{D}_{14}^3} = -\mathrm{KA}_1, \quad m_4 \frac{\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_2}{\mathrm{D}_{24}^3} = -\mathrm{KA}_2, \quad m_4 \frac{\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_3}{\mathrm{D}_{34}^3} = -\mathrm{KA}_3$$

и, следовательно,

$$\mathrm{D}_{14} = \mathrm{D}_{24} = \mathrm{D}_{34}.$$

Аналогично проверяется, что $\mathrm{D}_{13} = \mathrm{D}_{23} = \mathrm{D}_{43}$ и т. д., то есть тетраэдр должен быть *правильным.*

Обозначая сторону тетраэдра через D и вновь считая, что ориентация координатных плоскостей произвольна, с учетом (12) легко увидеть, что все уравнения (11) сводятся к одному:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = \mathrm{KD}^3,$$

которое задает константу K, участвующую в дифференциальном уравнении (13).

Если при $n = 8$ заранее поставить условие, что тела находятся в вершинах прямоугольного параллелепипеда, то нетрудно найти, что это возможно только в том случае, когда его стороны равны и 8 масс тоже равны между собой. У октаэдра ($n = 6$) есть три ортогональные плоскости симметрии; массы, лежащие в двух противоположных вершинах, должны совпадать, и условия (11) могут выполняться при положительных значениях масс, если отношение между самой длинной и самой короткой диагональю $< \sqrt{3}$.

4. *Случаи n тел, лежащих в одной плоскости.* Примем за плоскость xy ту плоскость, в которой лежат n тел при $t = 0$. Рассмотрим, как и в пункте 2, прямоугольный трехгранник, жестко связанный с радиусами проекции тел на центр масс. Тогда координаты массы m_i в момент времени t выражаются по формулам

$$\begin{cases} x_i = (\alpha_1 \mathrm{A}_i + \alpha_2 \mathrm{B}_i)\theta, \\ y_i = (\beta_1 \mathrm{A}_i + \beta_2 \mathrm{B}_i)\theta, \\ z_i = (\gamma_1 \mathrm{A}_i + \gamma_2 \mathrm{B}_i)\theta, \end{cases} \tag{14}$$

где A_i, B_i, 0 — значения той же самой координаты при $t = 0$. Действуя так же, как в пункте 2, мы получим, что вместо *девяти* уравнений (5), (5′) здесь выполняются шесть:

$$\begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3(\chi^2 + \varrho^2) = a, \\ -2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = b, \\ 2\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = a', \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \pi^2) = b', \\ -2\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi = 0, \\ 2\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Сравнивая первое из них с третьим, а второе с четвертым, мы получим

$$\theta^3(\chi^2 - \pi^2) = \mathrm{const}, \quad \theta^3\pi\chi = \mathrm{const},$$

так что $\dfrac{\chi^2 - \pi^2}{\pi\chi} = \text{const}$, откуда $\dfrac{\pi}{\chi} = \text{const}$. Если нам надо, чтобы плоскость zy изначально содержала мгновенную ось вращения, мы сможем положить $\pi = 0$, и тогда последнее из уравнений (15) дает нам $\chi = 0$ либо $\varrho = 0$.

I. Предположим, что $\pi = 0$, $\varrho = 0$, $\chi \neq 0$, тогда уравнения (15) вырождаются в $\theta^2\theta'' = \text{const}$, $\theta^3\chi^2 = \text{const}$, $2\theta'\chi + \theta\chi' = 0$ и могут выполняться, только если $\chi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$. Это равносильно жесткому равномерному вращению вокруг оси y. Поэтому если здесь $y_i = \mathrm{B}_i$, то второе дифференциальное уравнение движения массы m_i дает нам соотношение

$$0 = \sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}_{si}^3},$$

которое по тем же причинам, о которых было сказано для уравнения (7), не может выполняться при всех значениях i. Иначе говоря, мы должны исключить этот случай.

II. Предположим, что $\pi = 0$, $\chi = 0$ и вращение происходит вокруг оси z. Уравнения (14) принимают вид

$$\begin{cases} x_i = \theta\mathrm{A}_i\cos\alpha - \theta\mathrm{B}_i\sin\alpha, \\ y_i = \theta\mathrm{A}_i\sin\alpha + \theta\mathrm{B}_i\cos\alpha, \end{cases} \qquad z_i = 0, \tag{16}$$

где α обозначает переменный угол, производная которого по времени равна ϱ. Система (15) вырождается в систему

$$\begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3\varrho^2 = a, \\ 2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' = b, \end{cases} \tag{17}$$

из которой легко увидеть, что по теореме о сохранении площадей константа b равна нулю.

Теперь, дифференцируя (16) с учетом (17), получаем

$$\left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{ax_i}{\theta^3}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{ay_i}{\theta^3}. \right. \tag{18}$$

Иначе говоря, движение произвольного из тел относительно центра масс будет кеплеровым. Подставляя в левые части уравнений (18) выражения, взятые из дифференциального уравнения (2) и аналогичных ему, мы получим условные уравнения, которым должна удовлетворять начальная конфигурация:

$$\sum_s m_s \frac{\mathrm{A}_s - \mathrm{A}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = a\mathrm{A}_1, \quad \sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} = a\mathrm{B}_i. \tag{19}$$

Если в случае *трех* тел провести ось y параллельно прямой, соединяющей начальные положения масс m_1 и m_2, то мы получим $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$ и уравнения (19) дадут нам

$$m_3 \frac{\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1}{\mathrm{D}_{13}^3} = a\mathrm{A}_1, \quad m_3 \frac{\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_2}{\mathrm{D}_{23}^3} = a\mathrm{A}_2,$$

откуда $\mathrm{D}_{13} = \mathrm{D}_{23}$. Аналогично $\mathrm{D}_{12} = \mathrm{D}_{32}$; треугольник должен быть *равносторонним*; это известный факт.

Уравнения (17), в частности, выполняются, если положить $\theta = 1$, $\varrho^2 = \text{const} = -a$. Иначе говоря, если начальная конфигурация удовлетворяет условиям (19), а начальная скорость вращения равна $\sqrt{-a}$, то движение будет жестким с постоянной скоростью вращения.

5. *Случай n тел, лежащих на одной прямой.* Не ставя a priori условия о том, что движение является гомографическим, положим

$$x_i = \alpha\theta_i, \quad y_i = \beta\theta_i, \quad z_i = \gamma\theta_i, \tag{20}$$

где α, β, γ представляют собой направляющие косинусы прямой, содержащей n тел, а θ_1, $\theta_2, \ldots$, θ_n — определенные функции времени. Подставляя выражения (20) в дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\varDelta_{si}^3}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{y_s - y_i}{\varDelta_{si}^3}, \tag{21}$$

умножая первое из них на β, второе — на α, а затем вычитая, находим

$$\theta_i \left(\beta \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha \frac{d^2\beta}{dt^2}\right) + 2\frac{d\theta_i}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right) = 0. \tag{22}$$

Исключаем тот случай, когда каждый из двучленов

$$\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}, \quad \gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt}, \quad \alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}$$

равен нулю, что выполняется, только если прямая движется параллельно себе самой; тогда из (22) следует, что отношение

$$\frac{1}{\theta_i}\frac{d\theta_i}{dt}$$

принимает значение, не зависящее от индекса i, или, иначе говоря, отношения

$$\theta_1 : \theta_2 : \ldots : \theta_n$$

не изменяются с течением времени. Следовательно, движение обязательно будет гомографическим. Теперь полагаем

$$\theta_1 = h_1\theta, \theta_2 = h_2\theta, \ldots, \theta_n = h_n\theta,$$

где θ — какая-то функция от времени, принимающая значение 1 при $t = 0$, а h_1, $h_2, \ldots$, h_n — константы, для которых

$$\sum_i m_i h_i = 0. \tag{23}$$

Считая, что тела, лежащие на одной прямой, занумерованы в порядке $1, 2, \ldots, n$, и допуская, что косинусы α, β, γ соответствуют направлению на прямой от 1 к n, получаем

$$\varDelta_{si} = \pm(h_s - h_i),$$

где знак + или − выбирается в зависимости от того, $s > i$ или $s < i$.

Теперь (21) можно записать в виде

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{x_i}{(\theta h_i)^3}\sum_s \frac{\pm m_s h_i^2}{(h_s - h_i)^2}$$