Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 711–719.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.38
MSC 2010: 70E18, 37J60, 37J35

О шаре Чаплыгина в абсолютном пространстве

А. В. Цыганов

Обсуждается применение теоремы Ли об интегрируемости векторного поля к неголономной системе, описывающей качение динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости, при условии, что шар катится без проскальзывания в точке контакта.

Ключевые слова: неголономная механика, интегрируемые системы, пуассонова геометрия

1. Введение

Рассмотрим пространство с координатами

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad M = (M_1, M_2, M_3)$$

и векторное поле X, определяемое уравнениями движения

$$\dot\alpha = \alpha \times \omega, \quad \dot\beta = \beta \times \omega, \quad \dot\gamma = \gamma \times \omega, \quad \dot M = M \times \omega. \tag{1.1}$$

При любом значении векторной функции $w(\alpha, \beta, \gamma, M)$ это поле обладает десятью геометрическими интегралами движения вида

$$(x, y),$$

где x и y — любой из векторов α, β, γ или M. Из них девять интегралов движения функционально независимы.

Рассмотрим далее частный случай, когда существует еще один интеграл движения (кинетическая энергия)

$$H = \frac{1}{2}\,(M, \omega), \tag{1.2}$$

Получено 11 ноября 2012 года
После доработки 4 декабря 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00061.

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

а угловая скорость является линейной функцией моментов

$$\omega = \mathbf{A}_x M. \tag{1.3}$$

В случае волчка Эйлера матрица $\mathbf{A}_x$ постоянна

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad a_k \in \mathbf{R}, \tag{1.4}$$

а в случае шара Чаплыгина имеет вид

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A} + \frac{d\mathbf{A}\,\gamma \otimes \gamma\,\mathbf{A}}{g^2(\gamma)}, \tag{1.5}$$

в это определение входит функция $g(\gamma)$ вида

$$g(\gamma) = \sqrt{1 - d(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}. \tag{1.6}$$

Физический смысл параметра d и матрицы $\mathbf{A}$ подробно обсуждается в работах [4–6].

И в случае Эйлера, и в случае Чаплыгина векторное поле X обладает инвариантной мерой

$$\Omega = \mu\, \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}M$$

плотностью $\mu = 1$ и $\mu = g^{-1}(\gamma)$ соответственно.

Итак, на 12-мерном фазовом пространстве векторное поле X (1.1) обладает только десятью функционально независимыми интегралами движения и инвариантной мерой, и, поэтому интегрируемо в квадратурах.

Напомним, что, согласно Эйлеру и Якоби, система уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.7}$$

интегрируется в квадратурах, если имеется $n-2$ функционально независимых первых интегралов $f_1, \ldots, f_{n-2}$ и инвариантная n-форма объема

$$\Omega = \mu\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Поведение динамической системы (1.7) в окрестности компактных интегральных многообразий без особых точек описывается с помощью классических результатов Пуанкаре, Зигеля и Колмогорова о динамических системах на двумерном торе (см. например [1, 2]).

В общем случае, для k-мерных интегральных многообразий, в качестве определения интегрируемости поля можно использовать либо теорему Фробениуса, либо некоторые другие определения. Например, согласно теореме Ли, если есть k функционально независимых интегралов движения

$$f_1, \ldots, f_k \tag{1.8}$$

и $n-k$ линейно независимых векторных полей

$$u_1 = X,\; u_2, \ldots, u_{n-k}, \tag{1.9}$$

порождающих разрешимую алгебру, а производные Ли вдоль любого из полей u_i от любого из интегралов f_j равны нулю

$$\mathcal{L}_{u_i} f_j = 0, \tag{1.10}$$

то векторное поле X (1.7) интегрируется в квадратурах [8, 9].

Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы являются частным случаем этой конструкции, когда $n = 2k$, а k функционально независимых интегралов движения f_j (1.8) находятся в инволюции относительно скобки Пуассона

$$\{f_i, f_j\} = \sum_{lm=1}^{n} P_{lm} \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \frac{\partial f_j}{\partial x_m} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Как следствие, k гамильтоновых векторных полей $u_i = P\mathrm{d}f_i$ (1.9) линейно независимы в каждой точке, попарно коммутируют и удовлетворяют условию (1.10).

Целью данной работы является доказательство интегрируемости векторного поля X (1.1) с помощью теоремы Ли. Подчеркнем, что интегрируемость системы Эйлера — это давно известный факт, так что мы включили в рассмотрение этот случай исключительно для того, чтобы сравнить, как используется теорема Ли в голономном и неголономном случае.

Мы надеемся, что данный опыт может быть полезен для формального доказательства интегрируемости уравнений движения для шара Чаплыгина в поле Бруна, когда

$$M = M \times \omega + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma, \quad U = c(a_2, a_3\gamma_1^2 + a_1 a_3 \gamma_2^2 + a_1 a_2 \gamma_3^2),$$

а проекции момента (α, M) и (β, M) уже не являются интегралами движения. Интегрируемость данной модели на 6-мерном фазовом пространстве с координатами (γ, M) доказывается с помощью теоремы Эйлера – Якоби [7]. Однако на 12-мерном фазовом пространстве мы имеет только 9 интегралов движения и инвариантную меру, что недостаточно для применимости данной теоремы в абсолютном пространстве.

2. Пуассонова геометрия

Для того чтобы применять теорему Ли и ее обобщения, нам необходимо научиться строить дополнительные векторные поля (1.9) для исходного векторного поля X (1.1). Это удобно делать в рамках пуассоновой геометрии.

В случае Эйлера

$$X = P\,\mathrm{d}H,$$

векторное поле X гамильтоново относительно канонического бивектора Пуассона

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{M} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{Z}$ — кососимметрическая матрица, отвечающая вектору z:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 0 & z_3 & -z_2 \\ -z_3 & 0 & z_1 \\ z_2 & -z_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шесть геометрических интегралов

$$\begin{aligned} &C_1 = (\alpha, \alpha), \qquad C_2 = (\beta, \beta), \quad C_3 = (\gamma, \gamma), \\ &C_4 = (\alpha, \beta), \qquad C_5 = (\alpha, \gamma), \quad C_6 = (\beta, \gamma) \end{aligned} \tag{2.2}$$

являются функциями Казимира бивектора Пуассона, порождающими тривиальные векторные поля $P\mathrm{d}C_k = 0$.

Три интеграла

$$J_1 = (\alpha, M), \quad J_2 = (\beta, M), \quad J_3 = (\gamma, M) \tag{2.3}$$

образуют алгебру $so(3)$

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k,$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, равно как и соответствующие интегралам векторные поля $P\,\mathrm{d}J_i$. Так как J_k — проекции момента на оси неподвижной ортогональной системы координат, то

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = M^2.$$

Интегралы движения H и $M^2 = (M, M)$ находятся в инволюции со всеми остальными интегралами движения, а отвечающие им векторные поля $P\,\mathrm{d}H$ и $P\,\mathrm{d}M^2$ являются полями симметрий.

Таким образом, в случае Эйлера мы имеем девять функционально независимых интегралов движения

$$C_1, \ldots, C_6, \quad f_1 = H, \quad f_2 = M^2, \quad f_3 = (\gamma, M)$$

и три поля (гамильтоновы, независимые и коммутирующие друг с другом)

$$u_1 = P\mathrm{d}f_1, \quad u_2 = P\mathrm{d}f_2, \quad u_3 = P\mathrm{d}f_3,$$

включая исходное векторное поле $u_1 = X$. При этом производные Ли вдоль векторных полей u_i от интегралов движения f_j равны нулю:

$$\mathcal{L}_{u_i} f_j = 0, \quad \forall i, j.$$

Этого достаточно для доказательства интегрируемости поля X по теореме Ли [8].

2.1. Случай Чаплыгина

Согласно [4], в случае Чаплыгина ограничение исходного векторного поля X на шестимерное фазовое подпространство с координатами γ и M является конформно-гамильтоновым векторным полем

$$\widehat{X} = g^{-1}\,\widehat{P}_g\,\mathrm{d}H$$

относительно бивектора Пуассона

$$\widehat{P}_g = g\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma} \\ \Gamma & \mathbf{M} \end{pmatrix} - dg^{-1}(M, \mathbf{A}\gamma)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Исходное векторное поле X на 12-мерном фазовом пространстве тоже можно представить в виде

$$X = g^{-1}\,\widetilde{P}_g\,\mathrm{d}H \tag{2.4}$$

относительно бивектора

$$\widetilde{P}_g = g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Gamma} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \mathbf{\Gamma} & \boldsymbol{M} \end{pmatrix} - dg^{-1}(M, \mathbf{A}\gamma)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Gamma} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Однако на 12-мерном фазовом пространстве поле X перестанет быть конформно-гамильтоновым полем: бивектор $\widetilde{P}_g$ не удовлетворяет тождеству Якоби, а значит, поле $\widetilde{P}_g\,\mathrm{d}H$ не является гамильтоновым.

Итак, для исходного 12-мерного пространства бивектор $\widetilde{P}_g$ является почти-пуассоновым и не удовлетворяет тождеству Якоби. Поэтому закономерным будет вопрос о приведении данного почти-пуассонова бивектора к бивектору Пуассона.

Предложение 1. *Бивектор*

$$P_g = \widetilde{P}_g + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_g \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B}_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{A}_g^{\top} & -\boldsymbol{B}_g^{\top} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где

$$(\boldsymbol{A}_g)_{ij} = (\alpha\times\gamma)_i\,\sigma_j, \quad (\boldsymbol{B}_g)_{ij} = (\beta\times\gamma)_i\,\sigma_j,$$

удовлетворяет тождеству Пуассона, если

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}(1+g-\gamma_3\sigma_3), \quad \sigma_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\sigma_1, \quad \sigma_3 = \frac{d\gamma_3(a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2)}{d(a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2)-\gamma_1^2-\gamma_2^2}. \tag{2.7}$$

Здесь $x\times y$ — векторное произведение трехмерных векторов.

Функциями Казимира данного бивектора Пуассона шестого ранга

$$P_g\,\mathrm{d}C_k = 0, \quad k = 1, \ldots, 6,$$

являются геометрические интегралы $C_1, \ldots, C_6$ (2.2).

Доказательство состоит в непосредственной проверке равенства нулю скобки Схоутена $[\![P_g, P_g]\!] = 0$ и других свойств бивектора Пуассона P_g.

В механике векторы α, β, γ — это орты неподвижной ортогональнй системы координат; в этом случае элементы $\boldsymbol{A}_g$ и $\boldsymbol{B}_g$ можно записать в виде

$$(\boldsymbol{A}_g)_{ij} = -\beta_i\,\sigma_j, \quad (\boldsymbol{B}_g)_{ij} = \alpha_i\,\sigma_j,$$

а соответствующий бивектор P_g будет удовлетворять тождеству Якоби только при фиксированных значениях функций Казимира $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ и $C_4 = C_5 = C_6 = 0$.

Замена переменных

$$\begin{gathered} L_1 = g^{-1}\Big(M_1 + \frac{(g-\gamma_3\sigma_3-1)(\gamma,M)}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,\gamma_1\Big), \quad L_3 = g^{-1}\Big(M_3 + \sigma_3(\gamma,M)\Big), \\ L_2 = g^{-1}\Big(M_2 + \frac{(g-\gamma_3\sigma_3-1)(\gamma,M)}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,\gamma_2\Big) \end{gathered} \tag{2.8}$$

переводит бивектор P_g в канонический бивектор Пуассона P (2.1) (см. [11]). При этом

$$(\gamma, M) = (\gamma, L).$$

Девять функционально независимых интегралов движения

$$C_1, \ldots, C_6, \quad f_1 = H, \quad f_2 = M^2, \quad f_3 = (\gamma, M)$$

находятся в инволюции относительно скобки Пуассона $\{.,.\}_g$, отвечающей бивектору P_g, а скобки Пуассона между интегралами J_k (2.3) имеют вид

$$\{J_2, J_3\}_g = J_1, \quad \{J_1, J_3\}_g = -J_2.$$

Скобка Пуассона между интегралами J_1 и J_2 не является интегралом движения, в отличие от голономного случая.

Три независимых коммутирующих интеграла движения f_k порождают независимые и коммутирующие друг с другом гамильтоновы векторные поля

$$u_2 = P_g\,\mathrm{d}H, \quad u_3 = P_g\,\mathrm{d}M^2, \quad u_4 = P_g\,\mathrm{d}(\gamma, M), \quad [u_i, u_j] = 0,$$

по которым можно разложить исходное векторное поле

$$X = g^{-1}\,(u_2 - s_1\,u_4), \tag{2.9}$$

где g — функция определяющая плотность инвариантной меры, а

$$s_1 = (a_1\gamma_1 M_1 + a_2\gamma_2 M_2)\left(\frac{1-da_3\gamma_3^2}{g(\gamma_1^2+\gamma_2^2)} - \frac{1}{d(a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2)-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\right) + \frac{(a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2)da_3\gamma_3 M_3}{g(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}.$$

В отличие от системы Эйлера, только одно гамильтоново поле

$$u_4 = P_g\,\mathrm{d}(\gamma, M)$$

является полем симметрий для исходного поля X, так как $[X, u_4] = 0$, а

$$[X, u_2] \neq 0, \quad [X, u_3] \neq 0.$$

Следуя Чаплыгину [5], сделаем замену времени

$$\mathrm{d}t \to g^{-1}\mathrm{d}t$$

и определим три независимых векторных поля

$$v_1 = gX = u_2 - s_1\, u_4, \quad v_2 = u_3 - s_2\, u_4, \quad v_3 = u_4. \tag{2.10}$$

Входящая в это определение функция s_2 удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}_{u_2} s_2 = \mathcal{L}_{u_3} s_1, \quad \mathcal{L}_{u_4} s_2 = 0, \tag{2.11}$$

так что векторные поля v_1, v_2 и v_3 (2.10) образуют абелеву алгебру относительно операции коммутирования $[.\,,.]$.

Интегрируя (2.11), мы получим

$$s_2 = 2(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)\left(\frac{d(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2) - 1}{d(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2) - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} + \frac{1 - da_3\gamma_3^2}{g(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}\right) + \\ + \frac{2d\gamma_1\gamma_2(a_1 - a_2)(\gamma_2 M_1 - \gamma_1 M_2)}{g(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} + 2d\gamma_3 M_3\left(\frac{a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2}{d(a_1\gamma_1^2 + a_2\gamma_2^2) - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} + \frac{a_3}{g}\right).$$

Итак, для системы Чаплыгина на 12-мерном фазовом пространстве мы имеем девять функционально независимых интегралов движения

$$C_1, \ldots, C_6, \quad f_1 = H, \quad f_2 = M^2, \quad f_3 = (\gamma, M)$$

и три коммутирующих независимых векторных поля

$$v_1 = gX = P_g\,\mathrm{d}f_1 - s_1 P_g\,\mathrm{d}f_3, \quad v_2 = P_g\,\mathrm{d}f_2 - s_2\, P_g\,\mathrm{d}f_3, \quad v_3 = P_g\,\mathrm{d}f_3,$$

что достаточно для интегрируемости векторного поля (1.1) по теореме Ли [8] после замены времени.

Тем самым, мы формально доказали интегрируемость системы Чаплыгина на полном, не редуцированном по действию поля симметрий, фазовом пространстве. Подчеркнем еще раз, что сама процедура явного интегрирования обсуждается уже в исходной статье Чаплыгина [5] (см. также [6]).

Разложение исходного векторного поля на гамильтоново поле и поле симметрий (2.9) для других неголономных систем обсуждается в работах [3, 12, 13].

3. Заключение

В данной заметке обсуждается построение дополнительного не гамильтонова поля симметрий для неголомной модели Чаплыгина. Построение данного поля позволяет формально доказать интегрируемость данной не гамильтоновой системы в абсолютном пространстве.

Заметим, что в случае Чаплыгина к двенадцати уравнениям движения (1.1) можно добавить еще два уравнения

$$\dot{x} = b(\omega, \beta), \quad \dot{y} = -b(\omega, \alpha),$$

описывающих движение точки контакта по горизонтальной плоскости, где x и y — координаты точки контакта, а b — радиус шара. Процедура интегрирования этих уравнений обсуждается в [5, 6].

Для формального доказательства интегрируемости необходимо предъявить либо еще два интеграла движения, либо еще два поля симметрий с необходимыми для применимости теоремы Ли свойствами. Если при этом мы хотим сохранить полученное нами разложение векторного поля (2.9)

$$\widehat{X} = g^{-1}(P_g \mathrm{d}f_1 - s_1 P_g \mathrm{d}f_3)$$

на гамильтоново поле и поле симметрий, то к скобкам Пуассона $\{.,.\}_g$, отвечающим бивектору P_g (2.6), необходимо добавить скобки

$$\{x, M_i\}_g = -bg\beta_i, \quad \{y, M_i\}_g = bg\alpha_i.$$

Однако, как и ранее, расширенные таким образом скобки уже не удовлетворяют тождеству Якоби.

С другой стороны, добавляя скобки

$$\{x, y\}_g = 1,$$

мы получим бивектор Пуассона P_g восьмого ранга на 14-мерном фазовом пространстве, с помощью которого легко доказать, что векторное поле $\widehat{X}$ на 14-мерном фазовом пространстве становится более сложной комбинацией гамильтонова поля и дополнительных полей симметрий

$$\widehat{X} = g^{-1}(P_g\,\mathrm{d}f_1 - s_1 P_g\,\mathrm{d}f_3) + b(\omega, \beta) P_g\,\mathrm{d}x - b(\omega, \alpha) P_g\,\mathrm{d}y,$$

отвечающих циклическим переменным x и y. Подчеркнем, что сами переменные x и y не являются интегралами движения.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.

[2] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.

[3] Bizayev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, 085202, 11 pp.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[5] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

[6] Килин А. А. Динамика шара Чаплыгина в абсолютном пространстве // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 76–98.

[7] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107. (*См. также:* Kozlov V. V. On the integration theory of equations of nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.)

[8] Козлов В. В. Теорема Эйлера – Якоби – Ли об интегрируемости // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 229–245. (*См. также:* Kozlov V. V. The Euler – Jacobi – Lie integrability theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 329–343.)

[9] Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations. 2nd ed. (Grad. Texts in Math., vol. 107.) New York: Springer, 1993. 513 pp.

[10] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball // J. Geom. Mech., 2011, vol. 3, no. 3, pp. 337–362.

[11] Tsiganov A. V. On the Poisson structures for the nonholonomic Chaplygin and Veselova problems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 5, pp. 439–450.

[12] Tsiganov A. V. On generalized nonholonomic Chaplygin sphere problem // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2013, vol. 10, no. 6, 1320008, 8 pp.

[13] Tsiganov A. V. On the nonholonomic Stübler model // Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics, 2013, vol. 1, pp. 87–97.

On the absolute dynamics of the Chaplygin ball

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

We discuss an application of the Lie integrability theorem to the nonholonomic system describing the rolling of a dynamically balanced ball on horizontal absolutely rough table without slipping or sliding.

MSC 2010: 70E18, 37J60, 37J35
Keywords: nonholonomic mechanics, integrable systems, Poisson geometry

Received November 11, 2012, accepted December 4, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 711–719 (Russian)