Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 35–48.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.925.5, 51-73, 537.611.44
MSC 2010: 34G20, 15A90, 15A24

Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау – Лифшица

В. М. Журавлёв

В работе излагаются основные элементы теории матричных функциональных подстановок к построению интегрируемых конечномерных динамических систем и применение этой теории к интегрированию уравнений Ландау – Лифшица для однородных магнетиков в переменных внешних полях. Развита общая схема построения решений и приведен пример построения точного решения для циркулярно поляризованного поля.

Ключевые слова: интегрируемые динамические конечномерные системы, матричные функциональные подстановки, уравнения Ландау – Лифшица

1. Введение

К настоящему времени методы интегрирования нелинейных уравнений математической физики в частных производных представлены несколькими достаточно общими методами, среди которых важную роль играет метод обратной задачи (МОЗ) в разных вариантах [1, 2]. В частности, МОЗ применяется к дискретным моделям на решетках (см. [5] и библиографию там). Еще один метод был развит в работах [3, 4] и представляет собой метод функциональных подстановок типа Коула – Хопфа (МПКХ).

Для интегрирования конечномерных систем общие результаты в основном сводятся к отысканию уравнений, обладающих некоторым набором интегралов движения, как это имеет место для случая конечномерных гамильтоновых систем. Подробное описание результатов такого подхода для различных задач динамики твердого тела приведено в [6]. При решении ряда задач такого рода вместо непосредственного отыскания законов сохранения

Получено 10 августа 2013 года
После доработки 27 октября 2013 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00747-а) и частичной поддержке Министерства образования и науки РФ.

Журавлёв Виктор Михайлович
zhvictorm@gmail.com
Ульяновский государственный университет
432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

используется МОЗ [6]. В этом случае задача предъявления нужного количества законов сохранения для данного конкретного уравнения заменяется на задачу отыскания представления Лакса. Характерным элементом представления Лакса является наличие свободного нетривиального спектрального параметра в записи операторов этого представления. В отличие от этого, метод функциональных подстановок типа Коула – Хопфа устанавливает связь между некоторым интегрируемым уравнением (не обязательно линейным) относительно вспомогательной функции и исследуемым нелинейным уравнением с помощью совокупности дифференциальных подстановок [4]. Дифференциальные подстановки в некотором смысле аналогичны операторам представления Лакса, но играют существенно иную роль при построении решений. В частности, условие их совместности лишь определяет общие условия связи, но не определяет вид конкретного уравнения, которое интегрируется данным методом.

В работе [7] метод обобщенных подстановок был перенесен на случай конечномерных динамических систем. В этой работе были изложены общие идеи этого метода и указан способ вычисления интегралов движения для таких динамических систем. Основная идея переноса МПКХ на конечномерные динамические системы состоит в замене производных по пространственной координате на производную на матричной алгебре, эквивалентную матричному коммутатору по одной из образующих алгебры.

Одной из важных прикладных задач теории магнетиков является нелинейное уравнение Ландау – Лифшица, которое описывает поведение магнитного момента в магнетиках с учетом релаксационных процессов под действием внешнего магнитного поля. В случае однородных магнетиков уравнения Ландау – Лифшица представляют собой неавтономную конечномерную нелинейную динамическую систему, которая играет важную роль в описание целого ряда явлений в прикладных задачах магнитных материалов [8–10] и исследуется до сих пор для различных типов внешних полей намагничивания, меняющихся со временем [11, 12]. Эта же система играет важную роль и в некоторых квантовых задачах, на что было обращено внимание в [8]. В настоящей работе развитая схема построения точных решений для динамических систем с помощью функциональных матричных подстановок применяется к решению уравнений Ландау – Лифшица для однородного магнетика с релаксацией в произвольном переменном магнитном поле. Строится общая схема вычисления решений уравнений Ландау – Лифшица для этого случая и приводится пример построения точного решения для циркулярно поляризованного магнитного поля [11].

2. Дифференциально-алгебраический аналог обобщенных подстановок типа Коула – Хопфа

Рассмотрим матричные функции времени $\widehat{T}(t)$, заданные на некоторой матричной алгебре $\mathcal{A}$ с конечным числом образующих $\widehat{g}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, N$:

$$\widehat{T} = \sum_{\alpha=1}^{N} \tau_\alpha(t)\widehat{g}_\alpha. \tag{2.1}$$

На алгебре $\mathcal{A}$ рассмотрим оператор, действующий на любую функцию $\widehat{F} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha(t)\widehat{g}_\alpha$ на этой алгебре по правилу

$$\widehat{D}_x\widehat{F} = [\widehat{X}, \widehat{F}] = \sum_{\alpha=1}^{N} \phi_\alpha(t)[\widehat{X}, \widehat{g}_\alpha], \tag{2.2}$$

где $\widehat{X} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha \widehat{g}_\alpha$ — некоторый выделенный, не зависящий от времени t элемент алгебры $\mathcal{A}$. Из (2.2) следует

$$\widehat{D}_x \widehat{F} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \phi_\alpha(t) \xi_\beta [\widehat{g}_\beta, \widehat{g}_\alpha].$$

Пусть для образующих алгебры выполнены следующие соотношения:

$$\widehat{g}_\alpha \widehat{g}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{N} C_{\alpha\beta\gamma} \widehat{g}_\gamma,$$

где $C_{\alpha\beta\gamma}$ — структурные постоянные алгебры. Тогда имеем:

$$\widehat{D}_x \widehat{F} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{\gamma=1}^{N} \phi_\alpha(t) \xi_\beta \Big[C_{\beta\alpha\gamma} - C_{\alpha\beta\gamma} \Big] \widehat{g}_\gamma.$$

Можно видеть, что оператор $\widehat{D}_x$ представляет собой оператор дифференцирования в том смысле, что он удовлетворяет правилу Лейбница. Еще одним свойством оператора $\widehat{D}_x$ является его перестановочность (коммутативность) с производной по переменной t, что обеспечивается независимостью от t выделенного элемента $\widehat{X}$. Эти два свойства позволяют применить к уравнениям на любой матричной алгебре $\mathcal{A}$ метод обобщенных подстановок Коула–Хопфа, развитый в [4].

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\widehat{T}_t = \frac{d}{dt} \widehat{T}, \quad \widehat{T}_x = \widehat{D}_x \widehat{T} = [\widehat{X}, \widehat{T}], \quad \widehat{T}_{xx} = \widehat{D}_x \widehat{D}_x \widehat{T} = [\widehat{X}, [\widehat{X}, \widehat{T}]], \quad \ldots .$$

Аналогичные обозначения вводятся и для других матриц.

В [7] был рассмотрен вариант МПКХ, построенный на совокупности дифференциальных соотношений для вспомогательной функции $\widehat{T}$ и используемый в работах [3, 4]. Этот вариант строится на системе базовых уравнений первого и второго порядка, что особенно полезно в случае анализа гидродинамических задач. Для рассматриваемых в данной работе динамических систем более простым и полезным является метод, основанный на базовых уравнениях для вспомогательной функции первого порядка. Рассмотрим для вспомогательной матричной функции $\widehat{T}$ два базовых уравнения

$$\widehat{T}_t = \widehat{V} \widehat{T}, \quad \widehat{T}_x \equiv [\widehat{X}, \widehat{T}] = \widehat{S} \widehat{T}, \tag{2.3}$$

где $\widehat{V}$ и $\widehat{S}$ — матричные функции t. При заданной матричной функции $\widehat{T}$, матрицы $\widehat{V}$ и $\widehat{S}$ удовлетворяют уравнению связи

$$\widehat{S}_t + [\widehat{S} - \widehat{X}, \widehat{V}] = 0. \tag{2.4}$$

Полагая

$$\widehat{V} = \sum_{\alpha=1}^{N} v_\alpha \widehat{g}_\alpha, \quad \widehat{S} = \sum_{\beta=1}^{N} s_\beta \widehat{g}_\beta,$$

приходим к системе уравнений для коэффициентов разложения матриц по образующим алгебры $\mathcal{A}$:

$$\dot{v}_\gamma + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \Big(C_{\beta\alpha\gamma} - C_{\alpha\beta\gamma}\Big)(v_\alpha - \xi_\alpha)s_\beta, \quad \gamma = 1, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Эта система представляет собой совокупность дифференциальных тождеств, которым удовлетворяют функции $v_\alpha(t)$, $s_\alpha(t)$ в случае, если они вычисляются из соотношений (2.3) при произвольной матричной функции $\widehat{T}$, заданной соотношением (2.1) на алгебре $\mathcal{A}$.

3. Дифференциально-алгебраические подстановки

Общий метод построения интегрируемых с помощью матричных подстановок конечномерных динамических систем, как и в случае уравнений в частных производных, состоит в явном вычислении нелинейного уравнения исходя из конкретного вида произвольного интегрируемого уравнения (например, линейного) с помощью дифференциальных соотношений (2.3) и их произвольного порядка дифференциальных следствий относительно вспомогательной матричной функции $\widehat{T}$. Из (2.3) по аналогии с [4] можно получить все возможные дифференциальные соотношения следующего вида:

$$\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\widehat{X}, \cdots, [\widehat{X}, \widehat{T}]]}_{k} = \widehat{A}^{(n,k)}\widehat{T}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.1}$$

Матричные коэффициенты $\widehat{A}^{(n,k)}$ могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений:

$$\widehat{A}^{(n+1,k)} = \frac{d}{dt}\widehat{A}^{(n,k)} + \widehat{A}^{(n,k)}\widehat{V}, \quad \widehat{A}^{(n,k+1)} = [\widehat{X}, \widehat{A}^{(n,k)}] + \widehat{A}^{(n,k)}\widehat{S},$$

при начальных условиях

$$\widehat{A}^{(0,0)} = \widehat{1}, \quad \widehat{A}^{(1,0)} = \widehat{V}, \quad \widehat{A}^{(0,1)} = \widehat{S}.$$

Матричные коэффициенты $\widehat{A}^{(n,k)}$ являются дифференциальными полиномами от функций $\widehat{V}$ и $\widehat{S}$.

В результате любому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\widehat{T}$ вида

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L} \widehat{C}_{k,n}(t)\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\widehat{X}, \cdots, [\widehat{X}, \widehat{T}]]}_{k} = 0 \tag{3.2}$$

с произвольными функциями $\widehat{C}_{k,n}(t)$ с помощью дифференциальных соотношений (3.1) можно сопоставить нелинейное уравнение относительно функций $\widehat{V}$ и $\widehat{U}$:

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L} \widehat{C}_{k,n}(t)\widehat{A}^{(n,k)} = 0. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) образуют замкнутую нелинейную систему уравнений для вычисления матричных функций $\widehat{V}$ и $\widehat{S}$ (и их коэффициентов в разложении по базисным элементам алгебры $\mathcal{A}$). В дальнейшем уравнения (3.2) будем называть *замыкающими*.

Из самого принципа построения уравнений (3.3) следует, что их интегрируемость связана напрямую с интегрируемостью уравнений (3.2). Действительно, в случае интегрируемости уравнений (3.2) имеется возможность явно вычислить решения для матричной функции $\widehat{T}$. Тогда, в силу дифференциальных соотношений (2.3), вычисляются явно функции $\widehat{U}$, $\widehat{V}$, $\widehat{Q}$, которые заведомо обращают уравнения (3.3) в тождество. Соотношения (2.3) и являются собственно матричными подстановками типа Коула – Хопфа. Эти подстановки будем называть *дифференциально-алгебраическими* или *DA-подстановками.*

Утверждение 1. *Система уравнений* (3.3) *и* (2.4) *является полностью интегрируемой, а ее решения полностью определяются решениями системы линейных уравнений* (3.2) *и вычисляются с помощью соотношений* (2.3), *которые представляют собой матричные подстановки типа Коула – Хопфа.*

4. Законы сохранения

Факт полной интегрируемости динамических систем тесно связан с вопросом о наличии у системы достаточного числа интегралов движения. Поскольку системы, которые строятся с помощью предложенного метода, полностью интегрируемы в смысле исходного определения этого понятия, то есть возможно представить их решения в форме квадратур, то эти системы обладают набором функционально независимых интегралов движения. Вычисление этих интегралов представляется важным элементом анализа таких систем с точки зрения прикладных задач. В рамках развитого подхода удается построить общий способ вычисления интегралов движения динамических систем, которые строятся с помощью матричных подстановок.

Для вычисления интегралов движения воспользуемся общим тождеством

$$\mathrm{Sp}\Big([\widehat{A},\widehat{B}]\Big)=0,$$

выполняющимся для любых матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Вычисляя след второго уравнения (2.3) и уравнения связи (2.4), находим, соответственно:

$$\mathrm{Sp}(\widehat{S})=0,\quad \frac{d}{dt}\mathrm{Sp}(\widehat{S})=0. \tag{4.1}$$

Используя тождество

$$\Big[\widehat{A}^{n+1},\widehat{B}\Big]=\sum_{k=0}^{n}\widehat{A}^{k}\Big[\widehat{A},\widehat{B}\Big]\widehat{A}^{n-k},$$

уравнение связи можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}(\widehat{S}-\widehat{X})^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(\widehat{S}-\widehat{X})^{k}\left[\frac{d}{dt}\widehat{S}\right](\widehat{S}-\widehat{X})^{n-k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(\widehat{S}-\widehat{X})^{k}\Big[\widehat{S}-\widehat{X},\widehat{V}\Big](\widehat{S}-\widehat{X})^{n-k}=\Big[(\widehat{S}-\widehat{X})^{n+1},\widehat{V}\Big].$$

Вычисляя след этого соотношения, находим

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Sp}\Big[(\widehat{S}-\widehat{X})^{n+1}\Big]=0,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{4.2}$$

Отсюда сразу следует

Утверждение 2. *Система уравнений* (3.3) *и* (2.4), *независимо от формы замыкающего уравнения* (3.3), *имеет интегралы движения*

$$I_n = \mathrm{Sp}\Big[(\widehat{S} - \widehat{X})^{n+1}\Big], \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4.3}$$

Число независимых интегралов движения вида (4.3) определяется размерностью N алгебры $\mathcal{A}$ и не превышает ее в силу того, что любая степень матрицы на алгебре $\mathcal{A}$ выражается через образующие этой алгебры.

Остальные интегралы движения общей системы (3.3) и (2.4) определяются интегралами замыкающего уравнения (3.3) и фактически являются их образами при замене элементов матрицы $\widehat{T}$ элементами матриц $\widehat{S}$ и $\widehat{V}$ в результате использования подстановок (2.3).

Замыкающие уравнения вида (3.2) являются линейными. В зависимости от общего порядка системы уравнений (3.2), равного произведению порядка уравнения по t и размерности $\dim\mathcal{A} = N$ алгебры $\mathcal{A}$: $D = MN$, решения относительно функций $\tau_k(t)$ выражаются через D линейно-независимых функций ϕ_a, $a = 1, \ldots, D$, с помощью их линейных комбинаций с постоянными коэффициентами $A_{k,a}$:

$$\tau_\alpha(t) = \sum_a Q_{\alpha,a}\phi_a(t), \quad \alpha = 1, \ldots, N. \tag{4.4}$$

Коэффициенты $Q_{\alpha,a}$ являются постоянными интегрирования.

Обратим внимание на то, что система соотношений имеет своим следствием следующую систему тождеств:

$$\mathrm{Sp}\Big(\widehat{A}^{(k,n)}\widehat{T}\Big) = \sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{Sp}\Big(\widehat{A}^{(k,n)}\widehat{g}_\alpha\Big)\tau_\alpha = 0, \quad n > 0, \tag{4.5}$$

которые являются следствием общего тождества. Используя (4.4), соотношения (4.5) можно представить в виде

$$\sum_{a=1}^{D}\sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{Sp}\Big(\widehat{A}^{(k,n)}\widehat{g}_\alpha\Big)Q_{\alpha,a}\phi_a(t) = 0, \quad n > 0. \tag{4.6}$$

Эти соотношения означают, что в каждый момент времени векторы $\mathbf{J}_{k,n}$ с компонентами

$$J^a_{k,n} = \sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{Sp}\Big(\widehat{A}^{(k,n)}\widehat{g}_\alpha\Big)Q_{\alpha,a} = 0, \quad a = 1, \ldots, D, \quad k = 1, 2, \ldots, n > 0, \tag{4.7}$$

ортогональны вектору функций $\phi_a(t)$, то есть $\mathbf{J}_{k,n}$ ортогональны функциональному пространству собственных функций замыкающего уравнения.

5. DA-подстановки на алгебре $\mathcal{GL}_2$

Следуя работе [7], рассмотрим матричные функции времени $\widehat{T}(t)$, заданные на матричной алгебре $\mathcal{GL}_2$ с образующими в виде матриц Паули

$$\widehat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и единичной матрицы

$$\widehat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\widehat{\sigma}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\widehat{\sigma}_0\widehat{\sigma}_i = \widehat{\sigma}_i\widehat{\sigma}_0 = \widehat{\sigma}_i, \quad [\widehat{\sigma}_0, \widehat{\sigma}_i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

$$\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta = -\widehat{\sigma}_\beta\widehat{\sigma}_\alpha = i\sum_{\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{\sigma}_\gamma,$$

$$[\widehat{\sigma}_\alpha, \widehat{\sigma}_\beta] = 2i\sum_{\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\widehat{\sigma}_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \tag{5.1}$$

Таким образом, любая матричная функция $\widehat{T}(t)$, заданная на $\mathcal{GL}_2$, имеет следующий общий вид:

$$\widehat{T} = \sum_{i=0}^{3} \tau_i(t)\sigma_i, \tag{5.2}$$

где $\tau_i(t)$ — функции времени. Для любой пары матриц $\widehat{S}$ и $\widehat{V}$ из $\mathcal{GL}_2$, имеющих представление $\widehat{S} = \sum\limits_{i=0}^{3} s_i(t)\widehat{\sigma}_i$ и $\widehat{V} = \sum\limits_{i=0}^{3} v_i(t)\widehat{\sigma}_i$, выполняются следующие соотношения:

$$\widehat{S}\widehat{V} = (s_0v_0 + (\mathbf{s}, \mathbf{v}))\widehat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}\Big(s_0v_\alpha + v_0s_\alpha + i[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]_\alpha\Big)\widehat{\sigma}_\alpha, \tag{5.3}$$

$$[\widehat{S}, \widehat{V}] = 2i\sum_{\alpha=1}^{3}[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]\widehat{\sigma}_\alpha.$$

Здесь $[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]_\alpha = \sum\limits_{\beta}^{3}\sum\limits_{\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\beta v_\gamma$ — векторное произведение двух векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}$ с компонентами $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, а $(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} s_\alpha v_\alpha$ — скалярное произведение тех же векторов.

На алгебре $\mathcal{GL}_2$ рассмотрим оператор $\widehat{D}_x$, действующий на любую функцию $\widehat{P} = \sum\limits_{i=0}^{3} p_i\widehat{\sigma}_i$ на этой алгебре по правилу

$$\widehat{D}_x\widehat{P} = [\widehat{X}, \widehat{P}] = 2i\sum_{\alpha=1}^{3}[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]_\alpha\widehat{\sigma}_\alpha, \tag{5.4}$$

где $\widehat{X} = \sum\limits_{i=0}^{3} x_i\widehat{\sigma}_i$ — некоторый выделенный, не зависящий от времени t элемент алгебры $\mathcal{GL}_2$.

6. DA-подстановки для уравнений Ландау – Лифшица

Введем обозначения

$$\widehat{V} = v_0\widehat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha\widehat{\sigma}_\alpha, \quad \widehat{S} = s_0\widehat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha\widehat{\sigma}_\alpha.$$

Тогда из (4.1) и свойств матриц Паули $\mathrm{Sp}(\widehat{\sigma}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, сразу следует $s_0 = 0$, а уравнение (2.5) приводится к системе уравнений:

$$\dot{\mathbf{s}} + 2i[(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \times \mathbf{v}] = 0, \quad \dot{s}_0 = 0. \tag{6.1}$$

В качестве замыкающего уравнения рассмотрим следующее матричное уравнение для функции $\widehat{T}$:

$$\widehat{T}_t = \widehat{P}[\widehat{x}, [\widehat{x}, \widehat{T}]] + \widehat{Q}[\widehat{x}, \widehat{T}] + \widehat{U}\widehat{T}. \tag{6.2}$$

В общем случае $\widehat{P}(t)$, $\widehat{U}(t)$ и $\widehat{Q}(t)$ являются матричными функциями t из $\mathcal{GL}_2$ общего вида. В данной работе рассмотрим в качестве матрицы $\widehat{P}$ матрицу вида $\widehat{P} = p_0(t)\widehat{\sigma}_0$, а в качестве матриц $\widehat{Q}$ и $\widehat{U}$ — матрицы общего вида $\widehat{Q} = \sum\limits_{i=0}^{3} q_i(t)\widehat{\sigma}_i$, $\widehat{U} = \sum\limits_{i=0}^{3} u_i(t)\widehat{\sigma}_i$. Функции $q_\alpha(t)$ и $u_\alpha(t)$ являются компонентами векторов $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ и $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$.

Вычислим теперь вид условий, которые накладывает уравнение (6.2) на матрицы $\widehat{S}$ и $\widehat{V}$. Используя (2.3), находим:

$$\widehat{V} = p_0([\widehat{X}, \widehat{S}] + \widehat{S}^2) + \widehat{Q}\widehat{S} + \widehat{U}.$$

Вычислим матрицу $\widehat{S}^2$, используя соотношения (5.1):

$$\widehat{S}^2 = (\mathbf{s}^2 - s_0^2)\widehat{\sigma}_0 + 2s_0\widehat{S} = \mathbf{s}^2\widehat{\sigma}_0. \tag{6.3}$$

Подставляя это соотношение в (2.4), получаем матричное уравнение:

$$\widehat{S}_t - p_0[\widehat{S}, [\widehat{X}, \widehat{S}]] + [\widehat{S}, \widehat{Q}]\widehat{S} + [\widehat{S}, \widehat{U}] = 0. \tag{6.4}$$

Переходя к векторной форме записи этих уравнений с помощью соотношений (5.3), получаем уравнения вида

$$\dot{\mathbf{s}} + 4p_0\Big[(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \times [\mathbf{s} \times \mathbf{x}]\Big] - 2[\mathbf{s} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{q}]] - 2[\mathbf{c} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{x}]] + [\mathbf{s} \times \mathbf{h}] + \mathbf{g} = 0,$$

где введены обозначения

$$\mathbf{h} = 2iq_0\mathbf{x} + 2i\mathbf{u} + 2[\mathbf{q} \times \mathbf{x}], \quad \mathbf{g} = -2i[\mathbf{x} \times \mathbf{u}].$$

Учитывая (6.3) и вводя обозначение $\mathbf{M} = \mathbf{s} - \mathbf{x}$, преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\mathbf{M}_t = -[\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{h}_1]] - [\mathbf{M}, \mathbf{h}]. \tag{6.5}$$

Здесь

$$\mathbf{h}_1 = 4p_0\mathbf{x} + 2\mathbf{q}.$$

Уравнение (6.5) представляет собой обобщение уравнений Ландау – Лифшица [10] для магнитного момента $\mathbf{m}$ однородного магнетика. Отличие уравнения (6.5) от уравнения Ландау – Лифшица в стандартном представлении состоит в том, что поля $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}_1$ здесь не совпадают. В классическом случае $\mathbf{h} = \gamma\mathbf{H}$ и $\mathbf{h}_1 = \nu\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — эффективное магнитное поле в магнетике, γ — гиромагнитное отношение, а ν — постоянная, характеризующая релаксацию в среде. В этом случае первое слагаемое в правой части (6.5) представляет собой релаксационный член.

Для перехода к классической форме уравнений Ландау – Лифшица необходимо потребовать выполнения условий

$$\mathbf{h} = \frac{\gamma}{\nu}\mathbf{h}_1. \tag{6.6}$$

Это соотношение эквивалентно специальному выбору поля $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = -\frac{i\gamma}{\nu}\Big(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\Big) + i[\mathbf{q}\times\mathbf{x}] - q_0\mathbf{x}. \tag{6.7}$$

При этом параметры p_0, q_0 и вектор $\mathbf{q}$ могут быть произвольными функциями времени. Вектор $\mathbf{x}$ является произвольным постоянным вектором. При выполнении условия (6.6) уравнения (6.5) принимают классическую форму уравнений Ландау – Лифшица. Эффективное магнитное поле $\mathbf{H}$ в магнетике при этом будет иметь вид

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\nu}\Big(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\Big). \tag{6.8}$$

Таким образом, имеем

Утверждение 3. *Уравнения Ландау – Лифшица*

$$\mathbf{M}_t = -\nu[\mathbf{M}\times[\mathbf{M}\times\mathbf{H}]] - \gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{H}] \tag{6.9}$$

относительно компонент $\mathbf{M}$ *матрицы* $\widehat{M} = \widehat{S} - \widehat{X}$ *для однородного магнетика связаны с линейным матричным уравнением* (6.2) *подстановками* (2.3) *при выполнении условия* (6.7) *и указанных ограничениях на матрицы* $\widehat{U}$, $\widehat{P}$.

7. Решения уравнения Ландау – Лифшица для однородного магнетика

Построение решений уравнений (6.5) сводится к решению линейной системы уравнений (6.2) относительно компонент матрицы $\widehat{T}$ и к последующему вычислению функций $\mathbf{s}(t)$ из уравнений (2.3). Для построения решения и выяснения смысла соотношений (2.3) обратим внимание на то, что соотношение для матрицы $\widehat{S}$ можно записать в виде

$$\widehat{S} = (\widehat{X}\widehat{T} - \widehat{T}\widehat{X})\widehat{T}^{-1} = \widehat{X} - \widehat{T}\widehat{X}\widehat{T}^{-1}.$$

Отсюда

$$\widehat{M} = \widehat{S} - \widehat{X} = -\widehat{T}\widehat{X}\widehat{T}^{-1}, \tag{7.1}$$

где $\widehat{M} = m_0\widehat{\sigma}_0 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} M_\alpha\widehat{\sigma}_\alpha$ — матричное представление магнитного момента $\mathbf{M}$. При этом постоянная $m_0 = -x_0$ введена формально для общности. Эту постоянную вместе с x_0 можно полагать равной нулю: $m_0 = -x_0 = 0$. В этом случае имеем:

$$\widehat{M}^2 = \widehat{T}\widehat{X}^2\widehat{T}^{-1} = \mathbf{x}^2\sigma^0 = \text{const}. \tag{7.2}$$

Матрицу $\widehat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\widehat{T}^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}\Big(\tau_0\widehat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_\alpha\widehat{\sigma}_\alpha\Big). \tag{7.3}$$

Используя (7.3), из соотношения (7.1) находим

$$\mathbf{M} = -\frac{2i\tau_0}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}[\mathbf{t}\times\mathbf{x}] - \mathbf{x}\frac{\tau_0^2 + \mathbf{t}^2}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2} - \frac{2(\mathbf{t},\mathbf{x})}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}\mathbf{t}. \tag{7.4}$$

Здесь $\mathbf{t} = \Big(\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t)\Big)$.

Система (6.2) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Таким образом, система **нелинейных** уравнений Ландау – Лифшица сводится с помощью рассмотренного метода матричных подстановок к системе **линейных** дифференциальных уравнений первого порядка, что позволяет применить к анализу динамики магнитного момента во внешнем магнитном поле, в том числе и переменном, методы, развитые для линейных уравнений.

Поскольку магнитный момент является вещественной величиной, то интерес представляют такие решения системы (6.2), для которых вектор $\mathbf{M}$ в (7.4) является вещественным. Наиболее простая возможность получить такие решения состоит в следующем выборе произвольных функций и параметров:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\{x_0\} = 0, \quad \mathrm{Im}\{\mathbf{x}\} = 0, \quad \mathrm{Im}\{\mathbf{q}\} = 0, \quad \mathrm{Im}\{p_0\} = 0,\\ &\mathrm{Re}\{\tau_0\} = 0, \quad \mathrm{Re}\{\mathbf{u}\} = 0, \quad \mathrm{Re}\{q_0\} = 0.\end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{u} = i\mathbf{w}(t)$, $q_0 = ir_0(t)$, $\tau_0 = i\chi_0(t)$, $\mu = \gamma/\nu$, где $\mathbf{w}$, r_0, χ_0, μ — вещественные функции, приходим к записи уравнений и решений, не содержащих мнимой единицы.

Следовательно, доказано

Утверждение 4. *Вещественные решения уравнений Ландау – Лифшица* (6.9) *могут быть представлены в следующей общей форме:*

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta_0}\Big\{-2\chi_0[\mathbf{t}\times\mathbf{x}] + \mathbf{x}(\mathbf{t}^2 - \chi_0^2) + 2(\mathbf{t},\mathbf{x})\mathbf{t}\Big\}, \tag{7.5}$$

$$\dot{\mathbf{t}} = -[\mathbf{h}_1 \times [\mathbf{x}\times\mathbf{t}]] - [(2r_0\mathbf{x} + \mathbf{w})\times\mathbf{t}] - \chi_0\mathbf{w}, \tag{7.6}$$

$$\dot{\chi}_0 = 2\Big(\mathbf{q}, [\mathbf{x}, \times\mathbf{t}]\Big) + (\mathbf{w},\mathbf{t}), \tag{7.7}$$

$$\mathbf{w} = -\mu\Big(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}\Big) + [\mathbf{q}\times\mathbf{x}] - r_0\mathbf{x}. \tag{7.8}$$

Здесь $\Delta_0 = \chi_0^2 + \mathbf{t}^2$.

8. Пример циркулярно поляризованного поля

Одной из задач, которая рассматривается в рамках теории магнетиков, построенной на уравнениях Ландау – Лифшица, является задача о магнитном резонансе [8, 9, 11, 12].

Рассмотрим в качестве примера задачу о динамике намагниченности в переменном эффективном магнитном поле, которое часто встречается на практике (см.[11] и библиографию там). Будем полагать

$$\mathbf{x} = \eta(0,0,1), \quad \mathbf{q} = \xi(t)(\cos(\psi(t)), \sin(\psi(t)), 0),$$

где $\psi(t)$ и $\xi(t)$ — вещественные функции. При таком выборе параметров эффективное магнитное поле будет иметь вид

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\nu}\xi(t)\Big(\cos(\psi(t))\mathbf{e}_x + \sin(\psi(t))\mathbf{e}_y\Big) + \frac{4p_0(t)}{\nu}\eta\mathbf{e}_z = H_x\mathbf{e}_x + H_y\mathbf{e}_y + H_z\mathbf{e}_z, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты декартовой системы координат,

$$H_x = H_0(t)\cos\psi(t),\ H_y = H_0(t)\sin\psi(t),\ H_z = \frac{4\eta}{\nu}p_0(t),$$

$H_0 = 2\xi(t)/\nu$. В силу произвольности функций $\xi(t)$, $\psi(t)$ и $p_0(t)$ компоненты эффективного поля являются произвольными функциями времени. Поскольку поле $\mathbf{H}$ не зависит от $r_0(t)$, то эта функция не влияет на окончательный результат и ее можно выбрать равной нулю: $r_0 = 0$.

Уравнения (6.5) содержат три постоянных ν, γ и $M_0 = \sqrt{\mathbf{M}^2} = \eta$ (7.2), которые определяют функциональный вид решений при заданном внешнем поле $\mathbf{H}$. В силу этого в параметризации решений некоторые вспомогательные функции особой роли не играют и могут быть выбраны произвольно. В частности, удобно положить $q_0(t) = i\mu p_0(t)$. В этом случае, вводя обозначения $\theta_1(t) = \exp(i\psi(t))((\tau_1(t) + i\tau_2(t))$ и $\theta_2(t) = \tau_3(t) + i\chi_0(t)$, после простых преобразований систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\dot\theta_1 = A_1\theta_1 + B_1\theta_2, \qquad \dot\theta_2 = A_2\theta_1 + B_2\theta_2. \tag{8.2}$$

Здесь $A_1 = k_0H_z\nu/2 - i\Omega$, $B_1 = H_0\nu k_0^*/2$, $A_2 = -H_0\nu(2\eta + k_0)/2$, $B_2 = -i\gamma H_z$, $\Omega = \dot\psi$, $k_0 = 2\eta + i\mu$.

В простейшем случае, если коэффициенты системы (8.2) являются постоянными, то решение можно искать в виде

$$\theta_1 = ae^{\lambda t},\ \ \theta_2 = be^{\lambda t}.$$

В результате приходим к алгебраической системе для комплексных коэффициентов a, b с условием совместности:

$$\lambda^2 - 2(\omega_1 + i\omega_2)\lambda + k_1 + ik_2 = 0. \tag{8.3}$$

Здесь ω_1, ω_2, k_1, k_2 — вещественные параметры, имеющие вид

$$\omega_1 + i\omega_2 = (A_1 + B_2)/2, \quad k_1 + ik_2 = A_1B_2 - B_1A_2.$$

Отсюда, учитывая $\mu = \gamma/\nu$, получаем:

$$\omega_1 = \frac{\eta\nu}{2}H_z, \quad \omega_2 = -\frac{1}{4}(\gamma H_z + 2\Omega),$$

$$k_1 = \frac{\gamma H_z}{2}\Big(H_z\gamma - \Omega\Big) + \frac{H_0^2}{4}\Big(8\nu^2\eta^2 + \gamma^2\Big), \quad k_2 = -\frac{\nu\eta\gamma}{2}\Big(2H_z^2 - H_0^2\Big).$$

Уравнение (8.3) имеет два комплексных корня λ_+ и λ_-, которые можно записать в следующей форме:

$$\lambda_\pm = \omega_1 + i\omega_2 \pm K e^{i\phi_0/2},$$

где

$$K = \left((\omega_1^2 - \omega_2^2 - k_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - k_2)^2\right)^{1/4}, \quad \operatorname{tg}\phi_0 = \frac{2\omega_1\omega_2 - k_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2 - k_1}.$$

Вещественная часть собственных чисел имеет вид

$$Re\{\lambda_\pm\} = \omega_1 \pm K\cos\phi_0/2$$

и определяется параметрами системы, в том числе и частотой вращения внешнего поля Ω. Соответствующие им комплексные амплитуды $a_\pm$ при произвольных $b_\pm$ имеют вид

$$a_\pm = \frac{\nu H_0 k_0^*}{2(\lambda_\pm - A_1)} b_\pm.$$

В результате имеем:

$$\theta_1 = e^{i\Omega t}(\tau_1 + i\tau_2) = \left(a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t}\right), \tag{8.4}$$

$$\theta_2 = \tau_3 + i\chi_0 = \left(b_+ e^{\lambda_+ t} + b_- e^{\lambda_- t}\right). \tag{8.5}$$

Точное решение (7.5) для вектора полной намагниченности $\mathbf{M}$ для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + N(t)\mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{m} = m_x\mathbf{e}_x + \mathbf{m}_y\mathbf{e}_y$ — вектор, интерпретируемый как намагниченность, вызванная внешним полем. Этот вектор ортогонален вектору постоянного поля подмагничивания $\mathbf{h}_0 = 4\eta p_0/\nu\mathbf{e}_z$. Такое представление позволяет сравнивать результаты работ, в которых применялись методы теории возмущений с данным точным решением, которое для вектора $\mathbf{m}$ можно записать так:

$$m_x = 2\eta(\tau_1\tau_3 - \chi_0\tau_2)/\Delta_0, \quad m_y = 2\eta(\tau_2\tau_3 + \chi_0\tau_1)/\Delta_0. \tag{8.6}$$

Вдоль вектора подмагничивания $\mathbf{h}_0$ полная намагниченность изменяется со временем по закону

$$N(t) = (2\tau_3^2(t) + \mathbf{t}^2 - \chi_0^2)/\Delta_0. \tag{8.7}$$

Решения для компонент вектора m_x, m_y и для $N(t)$ магнитного момента являются рациональными вещественными функциями θ_1 и θ_2, причем порядок полиномов в числителе и знаменателе относительно этих функций одинаков. Поэтому в асимптотике при больших t отношение этих полиномов будет содержать незатухающие осциллирующие функции, стоящие при экспонентах с максимально большим положительным показателем. Это соответствует некоторым осцилляциям или вращению вектора магнитного момента. Резонансной является ситуация, когда вещественные части собственных чисел равны друг другу (не обязательно равны нулю). Последнее возможно при условии $\phi_0 = \pi$, что означает

$$2\omega_1\omega_2 - k_2 = \frac{\nu\eta}{4}\left(3H_z^2\gamma - 2H_z\Omega + 2\gamma H_0^2\right) = 0.$$

Это и есть условие резонанса в исходной нелинейной системе для внешнего поля (8.1). Соответствующая резонансная частота вращения внешнего поля определяется как:

$$\Omega = \frac{3\gamma}{2} H_z \left(1 + \frac{2H_0^2}{3H_z^2}\right).$$

9. Заключение

В работе представлен общий метод построения интегрируемых динамических систем и их точных решений с помощью метода дифференциально-алгебраических подстановок. Такие системы связываются с матричными алгебрами различной структуры и размерности. В работе дан алгоритм вычисления интегрируемых динамических систем для произвольной матричной алгебры конечной размерности и указан способ вычисления части интегралов движения таких систем. Одним из важных примеров применения развитого подхода является задача интегрирования системы уравнений Ландау – Лифшица для однородного магнетика во внешнем магнитном поле. В работе дано полное решение данной задачи с помощью приведения этой системы к системе двух комплексных линейных уравнений с переменными коэффициентами первого порядка. Таким образом, показано, что уравнения Ландау – Лифшица полностью линеаризуются с помощью подстановок типа Коула – Хопфа.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Семенцову Д. И. за полезное обсуждение темы данной работы и ценные указания по поводу представления результатов работы.

Список литературы

[1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов и метод обратной задачи рассеяния. Москва: Наука, 1980. 319 с.
[2] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Москва: Мир, 1988. 694 с.
[3] Журавлёв В. М., Никитин А. В. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула – Хопфа // Нелинейный мир, 2007, т. 5, № 9, с. 603–611.
[4] Журавлёв В. М. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // ТМФ, 2009, т. 158, № 1, с. 58–71.
[5] Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б. Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики // Уфимск. матем. журн., 2012, т. 4, № 3, с. 17–85.
[6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 384 с.
[7] Журавлёв В. М., Обрубов К. С. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа в теории конечномерных нелинейных динамических систем // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки, 2011, № 1(22), с. 83–89.
[8] Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. Москва: Наука, 1973. 592 с.
[9] Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. Москва: Физматлит, 1973. 464 с.
[10] Сохоцкий Г. В. Еще раз об уравнении Ландау – Лифшица // УФН, 1984, т. 144, № 4, с. 681–686.
[11] Шамсутдинов М. А., Калякин Л. А., Харисов А. Т. Авторезонанс в ферромагнитной пленке // ЖТФ, 2010, т. 80, № 6, с. 106–111.
[12] Семенцов Д. И., Шутый А. М. Нелинейная регулярная динамика и стохастическая динамика в тонкопленочных структурах // УФН, 2007, т. 177, № 8, с. 831–857.

Matrix functional substitutions for integrable dynamical systems and the Landau – Lifshitz equations

Victor M. Zhuravlev

Ulyanovsk State University
Leo Tolstoy str. 42, Ulyanovsk, 432017, Russia
zhvictorm@gmail.com

The paper sets out the main elements of the theory of matrix functional substitutions to the construction of integrable finite-dimensional dynamical systems and the application of this theory to the integration of the Landau – Lifshitz equation for a homogeneous magnetic field in the external variable fields. Developed a general scheme for constructing solutions and is an example of the construction of the exact solution for a circularly polarized field.

MSC 2010: 34G20, 15A90, 15A24
Keywords: integrable finite-dimensional dynamical systems, matrix functional substitutions, Landau – Lifshitz equations

Received August 10, 2013, accepted October 27, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 35–48 (Russian)