Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2. С. 223–236.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 523.5
MSC 2010: 70H20, 37K10

Об одной интегрируемой деформации волчка Ковалевской

А. В. Вершилов, Ю. А. Григорьев, А. В. Цыганов

В данной работе обсуждается возможность использования теории деформаций скобок Пуассона для построения интегрируемых возмущений известных интегрируемых систем. В качестве примера изучаются интегрируемые возмущения волчка Ковалевской, которые были получены ранее другими методами. Соответствующие бигамильтоновы структуры для этих возмущений, полученные в рамках обсуждаемого подхода, получены впервые.

Ключевые слова: пуассонова геометрия, волчок Ковалевской

1. Введение

В гамильтоновой механике любая функция H на фазовом пространстве M порождает описывающее некоторую динамическую систему векторное поле X

$$X = P\,dH. \tag{1.1}$$

Здесь dH — дифференциал H, а P — бивектор Пуассона на многообразии M. Такая динамическая система называется интегрируемой по Лиувиллю, если существует достаточное число функционально независимых функций H_i на M, попарно взятые скобки Пуассона от которых равны нулю:

$$\{H_i, H_k\} = (P\,dH_i, dH_k) = 0. \tag{1.2}$$

Получено 4 июня 2014 года
После доработки 20 июня 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00061, и гранта СПбГУ 11.38.664.2013.

Вершилов Александр Владимирович
alexander.vershilov@gmail.com
Григорьев Юрий Александрович
yury.grigoryev@gmail.com
Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

В гамильтоновой динамике интегрируемые системы составляют скорее исключение, чем правило. В связи с этим представляет интерес вопрос о том, как меняется динамика системы в результате различных возмущений исходного векторного поля X (1.1). В частности, нас будет интересовать вопрос о построении интегрируемых возмущений уже известных интегрируемых систем.

Для каждой интегрируемой системы можно по известным первым интегралам H_i построить инфинитезимальные симметрии

$$X_i = P\,dH_i, \quad H = H_1$$

и семейство совместимых пуассоновых структур ранга два

$$P^{(ij)} = X_i \wedge X_j. \tag{1.3}$$

Как обычно, мы будем называть инфинитезимальной симметрией динамической системы $\dot{x} = X$ гладкое векторное поле Y, которое коммутирует с исходным векторным полем X, то есть $[X, Y] = 0$ (см. [10]).

Напомним также, что бивектор P является пуассоновым бивектором тогда и только тогда, когда

$$[\![P, P]\!] = 0. \tag{1.4}$$

Здесь $[\![\,.\,,\,.\,]\!]$ — скобка Схоутена, задаваемая выражением

$$[\![A, B]\!]_{ijk} = -\sum_{m=1}^{\dim M}\left(B_{mk}\frac{\partial A_{ij}}{\partial z_m} + A_{mk}\frac{\partial B_{ij}}{\partial z_m} + \mathrm{cycle}(i, j, k)\right),$$

и, следовательно,

$$[\![P^{(i,j)}, P^{(i,j)}]\!] = 2X_i \wedge X_j \wedge [X_i, X_j] = 0.$$

Бивекторы Пуассона P и P' называются совместными, если любая их линейная комбинация $P + \lambda P'$ также является бивектором Пуассона [2, 3].

Рассмотрим теперь какое-либо аддитивное возмущение исходной функции Гамильтона H

$$\widetilde{H} = H + c\Delta H, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

которое порождает сдвиг исходного векторного поля

$$\widetilde{X}_1 = P\,d\widetilde{H} = P\,dH + cP\,d\Delta H = X_1 + c\Delta X.$$

Если и для возмущенной, и для исходной системы существует одна и та же не зависящая от константы добавляемого взаимодействия c инфинитезимальная симметрия X_2, то существует бивектор Пуассона вида

$$\widetilde{P}^{(1,2)} = \widetilde{X}_1 \wedge X_2 = X_1 \wedge X_2 + c\Delta X_1 \wedge X_2 = P^{(1,2)} + c\Delta P^{(1,2)}, \tag{1.6}$$

который можно рассматривать как аддитивную деформацию исходного бивектора $P^{(1,2)}$, которая линейно зависит от параметра деформации c. Данный простой пример показывает, насколько тесно теория возмущений гамильтоновых интегрируемых систем связана с теорией деформаций скобок Пуассона.

Напомним, что изучение деформаций скобок Пуассона является одним из центральных алгебро-групповых вопросов теории интегрируемых систем, который напрямую связан с геометрическим квантованием, теорией поля, бесконечномерными интегрируемыми системами математической физики, уравнениями ассоциативности, инвариантами Громова–Виттена, многообразиями Фробениуса, с теорией представлений бесконечномерных алгебр Ли, с теорией квантовых деформаций алгебры Вирасора и W-алгебр, и т. д. Следует также добавить, что развитие именно этого аспекта привело в свое время к одному из наиболее впечатляющих достижений в математике конца XX столетия — к открытию понятия квантовых групп [12].

Подавляющее большинство таких деформаций напрямую связано с геометрическими и топологическими особенностями самого многообразия, то есть деформации зависят от различных инвариантов этого многообразия и не зависят от конкретной динамической системы на многообразии. В отличие от этих весьма изученных и широко используемых методов деформаций скобок Пуассона мы отождествляем константу взаимодействия в интегрируемом возмущении исходного гамильтониана (1.5) и параметр деформации пуассоновой структуры (1.6). При этом параметр деформации произволен и ни в коей мере не является малым параметром.

Конечно, изучение деформаций бивекторов Пуассона $P^{(i,j)}$ (1.3) второго ранга полностью эквивалентно изучению возмущений соответствующих векторных полей X_k. Однако далее мы покажем, что подобные линейные деформации бивекторов Пуассона старших рангов также могут быть весьма полезны для поиска интегрируемых возмущений известных интегрируемых систем. В качестве примера мы выбрали волчок Ковалевской — одну из наиболее изученных интегрируемых систем, для которой известно достаточно много аддитивных интегрируемых возмущений, детально описанных в книгах [3] и [4].

2. Гиростат Ковалевской в двух постоянных полях

Следуя работам [5, 11], рассмотрим десятимерное фазовое пространство M с координатами $z = (x, y, J, \varkappa)$, где x, y и J — трехмерные векторы

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad J = (J_1, J_2, J_3),$$

физический смысл которых мы опишем немного позже.

Многообразие M можно отождествить с бигамильтоновым многообразием, если определить на нем два совместных друг с другом бивектора Пуассона

$$P = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -\varkappa & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\varkappa & 0 & -x_3 & 0 & x_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varkappa & x_2 & -x_1 & 0 & 0 \\
\varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 & -y_2 & 0 \\
0 & \varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_3 & 0 & y_1 & 0 \\
0 & 0 & \varkappa & 0 & 0 & 0 & y_2 & -y_1 & 0 & 0 \\
0 & x_3 & -x_2 & 0 & y_3 & -y_2 & 0 & J_3 & -J_2 & 0 \\
-x_3 & 0 & x_1 & -y_3 & 0 & y_1 & -J_3 & 0 & J_1 & 0 \\
x_2 & -x_1 & 0 & y_2 & -y_1 & 0 & J_2 & -J_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$
P' = \begin{pmatrix}
0 & J_3 & -J_2 & -J_3+\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2+y_1 \\
-J_3 & 0 & J_1 & 0 & -J_3+\rho & 0 & 0 & 0 & 1 & -x_1+y_2 \\
J_2 & -J_1 & 0 & 0 & 0 & -J_3+\rho & 0 & -1 & 0 & y_3 \\
J_3-\rho & 0 & 0 & 0 & J_3 & -J_2 & 0 & 0 & -1 & -x_1+y_2 \\
0 & J_3-\rho & 0 & -J_3 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & -x_2-y_1 \\
0 & 0 & J_3-\rho & J_2 & -J_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & J_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x_2-y_1 & x_1-y_2 & -y_3 & x_1-y_2 & x_2+y_1 & x_3 & -J_2 & J_1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Условие совместности означает, что любая линейная комбинация $P+\lambda P'$ данных бивекторов также является бивектором Пуассона, то есть удовлетворяет тождеству Якоби при любом значении параметра λ. Напомним, что тождество Якоби для скобок Пуассона и условие совместности можно переписать в виде

$$[\![P, P]\!] = [\![P, P']\!] = [\![P', P']\!] = 0,$$

используя скобки Схоутена для бивекторов P и P'. В нашем случае переменные на пуассоновом многообразии M — это $z = (x, y, J, \varkappa)$.

Следуя [5], рассмотрим на бигамильтоновом многообразии M две цепочки Ленарда

$$P'\,dH_0 = 0, \quad X_1 = P'\,dH_1 = P\,dH_0, \quad X_2 = P'\,dH_2 = P\,dH_1, \quad P\,dH_2 = 0$$

и

$$P'\,dK_0 = 0, \quad Y_1 = P'\,dK_1 = P\,dK_0, \quad Y_2 = P'\,dK_2 = P\,dK_1, \quad P\,dK_2 = 0,$$

которые можно представить в виде следующих диаграмм:

$$
\begin{tikzcd}
0 & & \\
dH_0 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & X_1 & \\
& dH_1 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & X_2 \\
& & dH_2 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & & \\
dK_0 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & Y_1 & \\
& dK_1 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & Y_2 \\
& & dK_2 \arrow[u, "P'"'] \arrow[r, "P"'] & 0
\end{tikzcd}
.
$$

Напомним, что дифференциал dH функции H можно представлять себе как вектор с компонентами $(dH)_k = \partial H/\partial z_k$, $k = 1, \ldots, 10$, а бивекторы Пуассона как матрицы (2.1).

Входящие в эти цепочки Ленарда функции H_i и K_j находятся в биинволюции относительно совместных скобок Пуассона

$$\{H_i, K_j\} = \{H_i, K_j\}' = 0.$$

Первые три функции имеют относительно простой вид:

$$H_0 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\rho J_3 + 2(x_1 + y_2), \quad H_1 = -(x, x) - (y, y) - 2\varkappa(J_3 - \rho), \quad H_2 = \varkappa^2;$$

остальные три функции из второй цепочки Ленарда являются немного более громоздкими:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= J_3(J_3-2\rho)(J_1^2+J_2^2+J_3^2-\rho^2)+2(x_2+y_1)J_1J_2+2(J_2^2+J_3^2-\rho J_3-\rho^2)y_2+\\
&\quad+2(J_1^2+J_3^2-\rho J_3-\rho^2+2y_2)x_1+2\rho(x_3J_1+y_3J_2+\varkappa)-(x_2+y_1)^2,\\
K_1 &= \varkappa^2-2\varkappa\Big((J_3-\rho)(J_1^2+J_2^2+J_3^2-\rho^2+x_1+y_2)+\rho(x_1+y_2)-x_3J_1-y_3J_2\Big)-\\
&\quad-(x,J)^2-(y,J^2)-2(J_3-\rho)(J,x\times y)+2(x,y)(y_1+x_2)-\\
&\quad-(2x_1-\rho^2)(y,y)-(2y_2-\rho^2)(x,x),\\
K_2 &= \Big(J_1^2+J_2^2+J_3^2-\rho^2\Big)\varkappa^2+2\varkappa(J,x\times y)+(x,x)(y,y)-(x,y)^2.
\end{aligned}
$$

Здесь (x,y) и $x\times y$ обозначают скалярное и векторное произведение трехмерных векторов x и y.

Координата $\varkappa$ является функцией Казимира для первого бивектора Пуассона P, то есть $Pd\varkappa=0$. Если положить

$$\varkappa=0,$$

то бивектор P на соответствующих симплектических листах порождает канонические скобки Ли – Пуассона алгебры $e^*(3,2)$

$$
\begin{aligned}
&\{J_i,J_j\}=\varepsilon_{ijk}J_k,\quad \{J_i,x_j\}=\varepsilon_{ijk}x_k,\quad \{J_i,y_j\}=\varepsilon_{ijk}y_k,\\
&\{x_i,x_j\}=0,\qquad \{y_i,y_j\}=0,\qquad \{x_i,y_j\}=0,
\end{aligned}
$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор. В этом случае функции H_i и K_j являются интегралами движения гамильтонова векторного поля

$$X=P\,dH_0,$$

описывающего динамику двухполевого гиростата Ковалевской [5, 11, 12]. В механике трехмерные векторы x, y и J являются проекциями двух силовых полей и кинетического момента на оси, жестко связанные с твердым телом, а параметр ρ отвечает гиростатическому моменту, направленному вдоль оси динамической симметрии тела.

Таким образом, на расширенном фазовом пространстве M данная динамическая система является бигамильтоновой интегрируемой системой. Далее мы рассмотрим линейные деформации бивекторов Пуассона P и P' и соответствующие им интегрируемые возмущения функции Гамильтона H_0, которые не зависят от дополнительной динамической переменной $\varkappa$.

Отметим, что для построения бигамильтоновых структур для систем типа Штеккеля нам всегда приходится расширять исходное физическое фазовое пространство, добавляя параметры, аналогичные $\varkappa$ [7]. Обсуждение соответствующих линейных деформаций тензоров Пуассона выходит за рамки данной работы и будет опубликовано отдельно.

3. Интегрируемое возмущение гиростата Ковалевской в двух постоянных полях

Рассмотрим тривиальные деформации $\widetilde{P}$ первого бивектора Пуассона P (2.1), которые определяются какой-либо заменой координат

$$z_i\to f_i(z_1,\ldots,z_{10}),\quad i=1,\ldots,10.$$

Предположим, что функции $f_i(z)$ являются линейными функциями от всех координат z и что полученные после замены координат скобки Пуассона при $\varkappa = 0$ порождают скобки на алгебре $e^*(3,2)$ (2.2). Удовлетворяющие этим условиям допустимые замены координат имеют вид

$$z_i \to z_i - \varkappa\, a_i, \quad a_i \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

а соответствующая тривиальная 10-параметрическая деформация исходного бивектора Пуассона выглядит следующим образом:

$$\widetilde{P} = P + \frac{\varkappa}{1 - a_{10}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{10} & 0 & 0 & 0 & a_3 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{10} & 0 & -a_3 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{10} & a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & -a_5 & 0 \\ 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_6 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & a_5 & -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -a_2 & 0 & a_6 & -a_5 & 0 & a_9 & -a_8 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 & -a_6 & 0 & a_4 & -a_9 & 0 & a_7 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 & a_5 & -a_4 & 0 & a_8 & -a_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Необходимый нам второй бивектор Пуассона $\widetilde{P}'$ в общем случае находится из условия совместности и тождества Якоби

$$[\widetilde{P}, \widetilde{P}'] = 0, \quad [\widetilde{P}', \widetilde{P}'] = 0. \tag{3.3}$$

Однако эти уравнения имеют бесконечно много решений, а значит, для нахождения некоторых частных решений нам необходимо сузить пространство поиска решений, накладывая некоторые дополнительные условия.

Например, если предположить, что

$$\widetilde{P}' = P' + \Delta P', \tag{3.4}$$

где P' — бивектор Пуассона (2.1), а элементы бивектора $\Delta P'$ — линейные функции не только от динамических переменных z_i, но и от параметров a_k, то уравнения (3.3) имеют единственное решение с точностью до перестановок векторов $x \leftrightarrow y$ и вращений

$$x \to \alpha U x, \quad y \to \beta U y, \quad J \to UJ,$$

где α, β — произвольные постоянные и U — ортогональная постоянная матрица. Таким образом, свойство линейности деформаций по параметрам, аналогичное (1.6), позволило нам сузить пространство поиска решений уравнений (3.3) и получить одно из частных решений явно.

Предложение 1. *Для бивектора Пуассона* $\widetilde{P}$ (3.2) *уравнения* (3.3) *имеют единственное с точностью до перестановок и вращений решение* $\widetilde{P}'$ *вида* (3.4)*, если и только если*

$$a_2 = c, \quad a_1 = a_3 = \dots = a_{10} = 0.$$

Соответствующая однопараметрическая деформация первого бивектора P имеет вид

$$\widetilde{P} = P + c\varkappa \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

а деформация второго бивектора — вид

$$\widetilde{P}' = P' + c \begin{pmatrix} 0 & -y_1 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & -J_2 & -J_3 & \varkappa \\ y_1 & 0 & y_3 & 0 & -x_2 & 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & -y_3 & 0 & -y_3 & 0 & -x_2+y_1 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ x_2 & 0 & y_3 & 0 & -y_1 & 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_1 & 0 & y_3 & -J_1 & 0 & -J_3 & -\varkappa \\ 0 & 0 & x_2-y_1 & 0 & -y_3 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & -J_2 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_3 & 0 & -J_1 & 0 & J_3 & -J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varkappa & 0 & 0 & 0 & \varkappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Доказательство сводится к решению переопределенной системы из примерно 2000 уравнений относительно 45 неизвестных линейных функций $\Delta P_{ij}(z,a)$.

Подставляя полученные нами бивекторы Пуассона в цепочки Ленарда

$$\widetilde{P}'\,d\widetilde{H}_0 = 0, \quad \widetilde{P}'\,d\widetilde{H_1} = \widetilde{P}\,d\widetilde{H}_0, \quad \widetilde{P}'\,d\widetilde{H}_2 = \widetilde{P}\,d\widetilde{H}_1, \quad \widetilde{P}\,d\widetilde{H}_2 = 0$$

и

$$\widetilde{P}'\,d\widetilde{K}_0 = 0, \quad \widetilde{P}'\,d\widetilde{K_1} = \widetilde{P}\,d\widetilde{K}_0, \quad \widetilde{P}'\,d\widetilde{K}_2 = \widetilde{P}\,d\widetilde{K}_1, \quad \widetilde{P}\,d\widetilde{K}_2 = 0,$$

мы найдем аддитивные возмущения исходных интегралов движения

$$\widetilde{H}_0 = H_0 + 2c\Big(J_1y_3 - J_2x_3 + J_3(x_2 - y_1)\Big), \quad \widetilde{H}_1 = H_1 - 2c\varkappa x_2, \quad \widetilde{H}_2 = H_2 \tag{3.7}$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_0 = K_0 - 2\varkappa c^3(x_2 - y_1)J_2^2 + c^2\Big((x_2 - y_1)\big(2(x,J)J_2 - 2(y,J)J_1 - (x_2 - y_1)(J,J)\big) - \\ - 2\varkappa J_2\big(J_2(J_3 - \rho) - 2y_3\big)\Big) + 2c\Big(\varkappa(J_1J_2 - x_2 - y_1) + (x_2J_1^2 - y_1J_2^2)(J_3 - \rho) + \\ + \big(y_3J_1 - x_3J_2 + (x_2 - y_1)J_3\big)(J_3^2 - \rho J_3 - \rho^2) - (x_1 - y_2)J_1J_2(J_3 - \rho) + \\ + (2x_1y_3 - x_2x_3 - x_3y_1)J_1 + (x_2y_3 - 2x_3y_2 + y_1y_3)J_2 + (x_2 - y_1)(x_1 + y_2)J_3\Big), \end{aligned}$$

$$\widetilde{K}_1 = K_1 + \varkappa c^2\Big(\varkappa J_2^2 - 2J_1x_2y_3 - 2(x_1y_3 - x_3y_1 + y_2y_3)J_2 + 2(x_2y_1 - y_1^2 - y_3^2)J_3\Big) +$$
$$+ 2c\Big(\varkappa(J_2^2 + 2J_3^2 + y_2)y_1 - \varkappa(y_2J_1J_2 + 2y_3J_1J_3 + x_2y_2) + \varkappa(y_3J_1 - y_1J_3)\rho -$$
$$- \varkappa\big((J,J) - \rho^2\big)x_2 - (y_3J_1 - y_1J_3)(x,x) + (x_3J_1 - y_3J_2 - x_1J_3 + y_2J_3 + \varkappa)(x,y) +$$
$$+ (x_3J_2 - x_2J_3)(y,y)\Big),$$
$$\widetilde{K}_2 = K_2 + c\varkappa^2\Big(c(y_1^2 + y_3^2) + 2(y_3J_1 - y_1J_3)\Big) + 2c\varkappa\Big((y_1^2 + y_3^2)x_2 - (x_1y_1 + x_3y_3)y_2\Big).$$

Входящие в эти цепочки Ленарда интегралы движения $\widetilde{H}_i$ и $\widetilde{K}_j$ находятся в биинволюции относительно совместных скобок Пуассона

$$\{\widetilde{H}_i, \widetilde{K}_j\} = \{\widetilde{H}_i, \widetilde{K}_j\}' = 0,$$

порождаемых бивекторами Пуассона $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}'$. Данная бигамильтонова структура для обобщения двухполевого гиростата Ковалевской не была известна.

Порождаемая интегралами движения H_i и K_j динамическая гамильтонова система с тремя степенями свободы была найдена В. В. Соколовым и А. В. Цыгановым [15] при изучении различных возможных обобщений представления Лакса для гиростата Ковалевской в двойном поле, найденного А. Г. Рейманом и М. А. Семёновым-Тян-Шанским [1, 12]. Соответствующие деформации классической r-матрицы обсуждаются в работах [6, 16]. Исследования фазовой топологии данной системы и качественное описание бифуркаций двумерных и трехмерных торов приведены в работе [13].

Отметим, что соответствующие деформации матриц Лакса и r-матриц достаточно сложны и для их получения и изучения требуется привлечение весьма изощренного математического аппарата. С другой стороны, в рамках бигамильтоновой геометрии данное интегрируемое возмущение системы Ковалевской получено с помощью тривиальных замен координат (3.1) и наложения условий о линейности деформаций второго бивектора Пуассона (3.4).

4. Бигамильтонова структура для системы Соколова

После замены координат

$$x_i \to ax_i, \quad y_i \to ay_i, \quad \varkappa \to a^2\varkappa \tag{4.1}$$

и параметра $c \to ca^{-1}$ функция Гамильтона $\widetilde{H}_0$ (3.7) примет вид

$$\widetilde{H}_0 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\rho J_3 + 2a(x_1 + y_2) + 2c\Big(J_1y_3 - J_2x_3 + J_3(x_2 - y_1)\Big).$$

На подмногообразии

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad \varkappa = 0 \tag{4.2}$$

эта функция Гамильтона

$$\widehat{H}_0 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\rho J_3 + 2ax_1 + 2c(J_3x_2 - J_2x_3) \tag{4.3}$$

является деформацией гамильтониана волчка Ковалевской [9]. Если затем положить $a = 0$, то мы получим гамильтониан системы Соколова [14]

$$\widehat{H} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\rho J_3 + 2c(J_3x_2 - J_2x_3),$$

с точностью до канонических преобразований алгебры $e^*(3)$ [9].

После преобразований (4.1), замены параметра $c \to ca^{-1}$ и редукции по Дираку, отвечающей связям (4.2), первый бивектор Пуассона $\widetilde{P}$ (3.5) будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{P}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -J_3 & 0 & J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

(см. [5] относительно проведения редукции по Дираку). Этот бивектор порождает канонические скобки Ли–Пуассона на алгебре Ли $e^*(3)$

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0. \tag{4.5}$$

Второй бивектор Пуассона $\widetilde{P}'$ (3.6) после аналогичных преобразований имеет вид

$$\widetilde{P}'_D = A + (x, J)^{-1} B, \tag{4.6}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J_3 & cx_3 - J_2 & 0 & -cJ_2 & -cJ_3 \\ -J_3 & 0 & J_1 & cJ_2 & 0 & a \\ -cx_3 + J_2 & -J_1 & 0 & 0 & -a & cJ_1 \\ 0 & -cJ_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cJ_2 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ cJ_3 & -a & -cJ_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а элементы второй кососимметрической матрицы —

$$\begin{aligned}
&B_{12} = (cx_2 + J_3 - \rho)\,(-cx_2 x_3 + J_1 x_1 + J_2 x_2 - J_3 x_3 + \rho x_3)\,,\\
&B_{13} = (cx_2 + J_3 - \rho)\,x_2\,(cx_2 + 2J_3 - \rho)\,,\\
&B_{14} = ax_2(cx_2 + 2J_3 - \rho) - J_1(cx_2 + J_3 - \rho)(J_2 - cx_3),\\
&B_{15} = (cx_2 + J_3 - \rho)\,J_1^2, \quad B_{16} = -ax_2 J_1 + c(cx_2 + J_3 - \rho)(x_2 J_2 + x_3 J_3),\\
&B_{23} = -\,(cx_2 + J_3 - \rho)\,x_1\,(cx_2 + 2J_3 - \rho)\,, \quad B_{25} = (cx_2 + J_3 - \rho)\,J_1 J_2,\\
&B_{24} = -ax_1(cx_2 + 2J_3 - \rho) - J_2(cx_2 + J_3 - \rho)(J_2 - cx_3),\\
&B_{26} = a\big(x_1 J_1 - (cx_2 + J_3 - \rho)x_3\big) - cx_1 J_2(cx_2 + J_3 - \rho),\\
&B_{34} = -\,(cx_2 + J_3 - \rho)\,(J_1 cx_1 + J_2 cx_2 + J_2 J_3)\,, \quad B_{35} = (cx_2 + J_3 - \rho)\,J_3 J_1,\\
&B_{36} = ax_2(cx_2 + J_3 - \rho) - cx_1 J_3(cx_2 + J_3 - \rho), \quad B_{45} = aJ_3 J_1,\\
&B_{46} = a^2 x_2 + a\big(c(x_3 J_1 - x_1 J_3) - J_1 J_2\big) + c^2 J_2(x, J), \quad B_{56} = aJ_1^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

После редукции по Дираку цепочки Ленарда

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}'_D d\widehat{H}_0 = 0, \quad \widetilde{P}'_D d\widehat{H_1} = \widetilde{P}_D \widehat{H}_0, \quad \widetilde{P}_D d\widetilde{H}_1 = 0,\\
\widetilde{P}'_D d\widehat{K}_0 = 0, \quad \widetilde{P}'_D d\widehat{K_1} = \widetilde{P}_D \widehat{K}_0, \quad \widetilde{P}_D d\widetilde{K}_1 = 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

также можно представить в виде диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
0 & & \\
d\widehat{H}_0 \arrow[u, "\widetilde{P}'_D"'] \arrow[r, "\widetilde{P}_D"'] & \widehat{X} & \\
& d\widehat{H}_1 \arrow[u, "\widetilde{P}'_D"'] \arrow[r, "\widetilde{P}_D"'] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & & \\
d\widehat{K}_0 \arrow[u, "\widetilde{P}'_D"'] \arrow[r, "\widetilde{P}_D"'] & \widehat{Y} & \\
& d\widehat{K}_1 \arrow[u, "\widetilde{P}'_D"'] \arrow[r, "\widetilde{P}_D"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

для двух бигамильтоновых полей $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$.

Функция Казимира $\widehat{H}_0$ (4.3) второго бивектора порождает деформацию $\widehat{X}$ бигамильтонова векторного поля для волчка Ковалевской. Остальные интегралы движения, входящие в цепочки Ленарда:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{H}_1 = -(x, x), \quad \widehat{K}_1 = \rho^2(x, x) - (x, J)^2,\\
&\widehat{K}_0 = J_3(J_3 - 2\rho)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - \rho^2) - a^2x_2^2 + 2a\Big(x_1(J_1^2 + J_3^2) + x_2J_1J_2 + \rho(J_1x_3 - J_3x_1) -\\
&\quad - \rho^2x_1 - cx_2(J_1x_3 - J_3x_1)\Big) + c^2x_2\Big(x_2(J, J) - 2J_2(x, J)\Big) + 2c\Big(x_2\big(J_1^2(J_3 - \rho) +\\
&\quad + J_3(J_3^2 - \rho J_3 - \rho^2) - \big(x_3(J_3^2 - \rho J_3 - \rho^2) + x_1J_1(J_3 - \rho)\big)J_2\Big).
\end{aligned}
$$

Если положить $a = 0$, то мы получим бигамильтонову структуру для системы Соколова. Данная бигамильтонова структура ранее не была известна.

В работе [18] найден другой бивектор Пуассона, который совместен с бивектором Пуассона $\widetilde{P}_D$ (4.4) на многообразии $e^*(3)$ и имеет с ним общие симплектические листы. Данный бивектор Пуассона порождает другие скобки Пуассона, относительно которых интегралы движения для системы Соколова находятся в инволюции при фиксированном значении функции Казимира $(x, J) = 0$ и при $\rho = 0$. Элементы этого бивектора являются полиномами от моментов J_k, а сам бивектор позволяет найти переменные разделения для системы Соколова.

5. Бигамильтонова структура гиростата Ковалевской на многообразии $so^*(4)$

Рассмотрим пуассоново многообразие $so^*(4)$ с координатами $y = (y_1, y_2, y_3)$, $J = (J_1, J_2, J_3)$ и скобками Ли – Пуассона

$$
\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \quad \{J_i, y_j\} = \varepsilon_{ijk}y_k, \quad \{y_i, y_j\} = \kappa^2\varepsilon_{ijk}J_k, \tag{5.1}
$$

которые определяются бивектором Пуассона

$$P_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^2 J_3 & -\kappa^2 J_2 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -\kappa^2 J_3 & 0 & \kappa^2 J_1 & -x_3 & 0 & x_1 \\ \kappa^2 J_2 & -\kappa^2 J_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -J_3 & 0 & J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Функции Казимира этого бивектора имеют вид

$$C_1 = \kappa^2 (J, J) + (y, y) \quad \text{и} \quad C_2 = (y, J).$$

Построенное с помощью данного бивектора и гамильтониана Ковалевской

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\rho J_3 + 2a x_1$$

векторное поле $X_\kappa = P_\kappa \, dH$ интегрируемо, и дополнительный полиномиальный интеграл имеет вид

$$K = \xi\xi^* - 4\rho(\rho - J_3)(J_1^2 + J_2^2) - 8a\rho J_1 y_3 + 4a^2\kappa^2\rho J_3$$

(см. [8, 9]). Здесь мы используем стандартные обозначения:

$$\xi = (J_1 + \mathrm{i}J_2)^2 - 2a(y_1 + \mathrm{i}y_2) + a^2\kappa^2, \quad \xi^* = (J_1 - \mathrm{i}J_2)^2 - 2a(y_1 - \mathrm{i}y_2) + a^2\kappa^2, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Согласно [9], существует пуассоново отображение $\zeta\colon e^*(3) \to so^*(4)$, отождествляющее векторное поле $\widehat{X} = \widetilde{P}_D \widehat{H}_0$, которое входит в определение первой цепочки Ленарда из предыдущего параграфа, с гамильтоновым векторным полем X_κ на многообразии $so^*(4)$:

$$\zeta\colon \widehat{X} \to X_\kappa, \quad \widetilde{P}_D \to P_\kappa, \quad \text{и} \quad \zeta\left(\widehat{H}_0\right) = H,$$

здесь $\widetilde{P}_D$ (4.4) — канонический бивектор на алгебре $e^*(3)$, а $\widehat{H}_0$ — гамильтониан обобщенного гиростата Ковалевской (4.3). Данное отображение определяется следующим образом:

$$\zeta\colon J \to J, \quad x \to y = x + \gamma x \times J;$$

обратное отображение имеет вид

$$\zeta^{-1}\colon J \to J, \quad y \to x = \frac{y + \gamma^2 (x, J) J + \gamma (y \times J)}{1 + \gamma^2 (J, J)}.$$

Здесь γ — алгебраическая функция от элементов Казимира, которая определяется как решение уравнений

$$(x, x)\gamma^2 + \kappa^2 = 0 \quad \text{или} \quad (y, J)\gamma^4 + \big(\kappa^2 (J, J) + (y, y)\big)\gamma^2 + \kappa^2 = 0$$

на симплектических листах многообразий $e^*(3)$ и $so^*(4)$ соответственно.

Таким образом, действуя на цепочки Ленарда (4.8) отображением ζ, мы получим цепочки Ленарда на многообразии $so^*(4)$:

$$\begin{aligned} &P'_\kappa\, dH = 0, \quad P'_\kappa\, dc_1 = P_\kappa H, \quad P_\kappa\, dc_1 = 0,\\ &P'_\kappa\, dK_\kappa = 0, \quad P'_\kappa\, dc_2 = P_\kappa K_\kappa, \quad P_\kappa\, dc_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

В эти цепочки Ленарда входят функции от элементов Казимира

$$c_1 = \kappa^2\gamma^{-1}, \quad c_2 = -\kappa^2\gamma^{-1} + (y, J)^2$$

и интеграл движения

$$\begin{aligned} K_\kappa = {} & J_3(J_3 - 2\rho)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - \rho^2) + 2a\Big(y_1(J_1^2 + J_3^2 - \rho J_3 - \rho^2) + (y_2J_2 + \rho y_3)J_1\Big) - \\ & - \frac{\Big(\gamma^2 J_2(y, J) - \gamma(y_3J_1 - y_1J_3) + y_2\Big)\Big(\gamma^2 J_2(y, J) + \gamma(y_3J_1 - y_1J_3) + y_2\Big)}{1 + \gamma(J, J)}\, a^2, \end{aligned}$$

которые зависят от функции γ, которая является алгебраической функцией от переменных y_i и J_i. Элементы второго тензора также зависят от γ:

$$\begin{aligned} P'_{\kappa 12} = {} & \frac{a\gamma^2}{1 + \gamma^2(J, J)}\Bigg((y_3J_1 - 2y_1J_3 + \rho y_1)\Big(\gamma^2 + \frac{1}{J_2^2}\Big)J_2^2 + \gamma^2 y_2J_1J_2(J_3 - \rho) + \\ & + \gamma^2(y_3J_1 - y_1J_3)(J_1^2 + 2J_3^2 - \rho J_3) + \frac{(y, y)J_1(J_3 - \rho)}{(y, J)}\Bigg) + \gamma^2(J_1^2 + J_2^2 + 2\rho J_3 - \rho^2)J_3 + \\ & + \frac{(2J_3 - \rho)(y_1J_1 + y_2J_2 + \rho y_3)}{(y, J)}, \\ P'_{\kappa 13} = {} & -\gamma^2(J_1^2 + J_2^2 + 2\rho J_3 - \rho^2)J_2 - \frac{y_2(J_2^2 - 2J_3^2 + 3\rho J_3 - \rho^2) + (y_1J_1 + y_3J_3)J_2}{(y, J)}, \\ P'_{\kappa 14} = {} & a\gamma^2(2J_3 - \rho)J_2 - \frac{J_1J_2(J_3 - \rho) - ay_2(2J_3 - \rho)}{(y, J)}, \\ P'_{\kappa 15} = {} & \frac{(J_3 - \rho)J_1^2}{(y, J)}, \quad P'_{\kappa 16} = -a\left(\gamma J_1J_2 + \frac{y_2J_1}{(y, J)}\right), \\ P'_{\kappa 23} = {} & -\frac{a^2\gamma^2}{1 + \gamma^2(J, J)}\Bigg((y_1J_1 + y_2J_2)\big(\gamma^2(J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - \rho J_3) + 1\big) + \gamma^2 y_3J_3^3 + \\ & + \rho y_3(\gamma^2 J_1^2 + \gamma^2 J_2^2 + 1) + \frac{(y, y)J_3(J_3 - \rho)}{(y, J)}\Bigg) + \\ & + \gamma^2 J_1(J_1^2 + J_2^2 + 2\rho J_3 - \rho^2) + \frac{y_1(J_1^2 - 2J_3^2 + 3\rho J_3 - \rho^2) + (y_2J_2 + y_3J_3)J_1}{(y, J)}, \\ P'_{\kappa 24} = {} & \frac{a^2\gamma^2}{1 + \gamma^2(J, J)}\Big(y_3 - \frac{(y, y)J_3}{(y, J)} + \gamma^2 J_1(y_3J_1 - y_1J_3) + \gamma^2 J_2(y_3J_2 - y_2J_3)\Big) - \\ & - a\gamma^2 J_1(J_3 - \rho) - \frac{J_2^2(J_3 - \rho) + ay_1(2J_3 - \rho)}{(y, J)}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P'_{\kappa 25} =& a\gamma^2 J_2 J_3 + \frac{J_1 J_2 (J_3-\rho)}{(y,J)},\\
P'_{\kappa 26} =& \frac{a^2\gamma^2}{1+\gamma^2(J,J)}\left(\gamma^2\big((y_2J_2+y_3J_3)J_1 - y_1(J_2^2+J_3^2)\big) + \frac{J_1(y_2^2+y_3^2) - y_1(y_2J_2+y_3J_3)}{(y,J)}\right)+\\
&+a\left(1+\gamma^2(J_1^2+\rho J_3) + \frac{y_1J_1 - y_3J_3 + \rho y_3}{(y,J)}\right),\\
P'_{\kappa 34} =& -a\gamma^2 J_1 J_2 - \frac{J_2J_3(J_3-\rho)}{(y,J)},\\
P'_{\kappa 35} =& -a(\gamma^2 J_2^2 + 1) + \frac{J_1J_3(J_3-\rho)}{(y,J)},\\
P'_{\kappa 36} =& a\left(-\gamma^2\rho J_2 + \frac{y_2(J_3-\rho)}{(y,J)}\right),\\
P'_{\kappa 45} =& \frac{aJ_1J_3}{(y,J)}, \quad P'_{\kappa 46} = a^2\gamma^2 J_2 - \frac{a(J_1J_2 - ay_2)}{(y,J)}, \qquad P'_{\kappa 56} = \frac{aJ_1^2}{(y,J)}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, элементы второго бивектора Пуассона также являются алгебраическими функциями переменных y_i и J_i. Данная бигамильтонова структура для гиростата Ковалевской на многообразии $so^*(4)$ ранее не была известна.

В работе [17] построен другой бивектор Пуассона, который не только совместен с бивектором P_κ (5.2), но и имеет общие с ним симплектические листы. Этот бивектор Пуассона, элементы которого являются рациональными функциями переменных y_i и J_i, позволяет построить переменные разделения для волчка Ковалевской на многообразии $so^*(4)$.

Список литературы

[1] Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. The Kowalewski top 99 years later: A Lax pair, generalizations and explicit solutions // Comm. Math. Phys., 1989, vol. 122, no. 2, pp. 321–354.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 464 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 296 с.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[5] Falqui G. Lax representation and Poisson geometry of the Kowalevski top // J. Phys. A, 2001, vol. 34, no. 11, pp. 2077–2085.

[6] Голубчик И. З., Соколов В. В. Факторизация алгебры петель и интегрируемые уравнения типа волчков // ТМФ, 2004, т. 141, № 1, с. 3–23.

[7] Ibort A., Magri F., Marmo G. Bihamiltonian structures and Stäckel separability // J. Geom. Phys., 2000, vol. 33, nos. 3–4, pp. 210–228.

[8] Комаров И. В. Базис Ковалевской для атома водорода // ТМФ, 1981, т. 47, № 1, с. 67–72.

[9] Komarov I. V., Sokolov V. V., Tsiganov A. V. Poisson maps and integrable deformations of the Kowalevski top // J. Phys. A, 2003, vol. 36, no. 29, pp. 8035–8048.

[10] Marsden J. E., Ratiu T. S. Introduction to mechanics and symmetry: A basic exposition of classical mechanical systems. 2nd ed. (Texts Appl. Math., vol. 17.) New York: Springer, 1999. 582 pp.

[11] Marshall I. D. The Kowalevski top: Its r-matrix interpretation and bi-Hamiltonian formulation // Comm. Math. Phys., 1998, vol. 191, no. 3, pp. 723–734.

[12] Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы: Теоретико-групповой подход. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 352 с.

[13] Рябов П. Е. Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // ТМФ, 2013, т. 176, № 2, pp. 205–221.

[14] Sokolov V. V. A generalized Kowalewski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // The Kowalevski property: Proc. of the Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (MMRD), dedicated to the 150th anniversary of Sophie Kowalevski's birth (University of Leeds, Leeds, April 12–15, 2000) / Ed. by V. B. Kuznetsov. (CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32.) Providence, R.I.: AMS, 2002. P. 304–315.

[15] Соколов В. В., Цыганов А. В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева – Чаплыгина // ТМФ, 2002, т. 131, № 1, с. 118–125.

[16] Цыганов А. В. Интегрируемые деформации волчков, связанных с алгеброй $so(p, q)$ // ТМФ, 2004, т. 141, № 1, с. 24–37.

[17] Tsiganov A. V. The Poisson bracket compatible with the classical reflection equation algebra // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 3, pp. 191–203.

[18] Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A, 2011, vol. 44, no. 10, 105203, 21 pp.

On an integrable deformation of the Kowalevski top

Alexander V. Vershilov[1], Yury A. Grigoryev[2], Andrey V. Tsiganov[3]

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
[1]alexander.vershilov@gmail.com, [1]yury.grigoryev@gmail.com, [3]andrey.tsiganov@gmail.com

We discuss an application of the Poisson brackets deformation theory to the construction of the integrable perturbations of the given integrable systems. The main examples are the known integrable perturbations of the Kowalevski top for which we get new bi-Hamiltonian structures in the framework of the deformation theory.

MSC 2010: 70H20, 37K10
Keywords: Poisson geometry, Kowalevski top

Received June 4, 2014, accepted June 20, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 223–236 (Russian)