



УДК: 534.015.1; 534-6

MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

## Связанные осцилляторы на упругой подложке в условиях акустического вакуума

И. П. Кикоть, Л. И. Маневич

В работе представлены результаты аналитического и численного исследования нестационарной плоской динамики невесомой ненапрянутой струны с двумя симметрично закрепленными на ней массами, каждая из которых испытывает упругую реакцию подложки с чисто кубической характеристикой. Рассмотрен наиболее важный предельный случай, соответствующий доминированию резонансных низкоэнергетических поперечных колебаний. Поскольку такие колебания описываются приближенными уравнениями, которые содержат лишь кубические члены, фактически поперечная динамика реализуется в условиях акустического вакуума. Если подложка отсутствует, нелинейные нормальные моды исследуемой системы в конфигурационном пространстве совпадают с нормальными модами соответствующей линейной системы осцилляторов или близки к ним. Однако при наличии подложки, в отличие от линейной системы, одна из нелинейных нормальных мод претерпевает неустойчивость, следствием чего является формирование двух новых асимметричных мод и разделяющей их сепаратрисы. Этот динамический переход, происходящий при определенном соотношении между упругими характеристиками собственно струны и упругой подложки, относится к стационарной резонансной динамике. В то же время он предопределяет и возможность второго динамического перехода, относящегося уже к нестационарной резонансной динамике, при увеличении вклада упругой подложки в динамику системы. В условиях резонанса и, следовательно, интенсивного межмодового взаимодействия, сам модальный подход оказывается неадекватным. Эффективное же описание обоих динамических переходов достигается в терминах слабо взаимодействующих осцилляторов и предельных фазовых траекторий, соответствующих полному или максимально возможному при данных условиях энергообмену между осцилляторами.

Ключевые слова: струна с симметрично закрепленными массами, упругая подложка, нелинейная динамика, асимптотический метод, полный энергообмен, предельная фазовая траектория, локализация энергии

---

Получено 23 июня 2014 года

После доработки 11 сентября 2014 года

---

Авторы выражают благодарность РФФИ (грант 14-01-00284 А).

---

Кикоть Ирина Павловна

[irakikotx@gmail.com](mailto:irakikotx@gmail.com)

Маневич Леонид Исакович

[manevitchleonid3@gmail.com](mailto:manevitchleonid3@gmail.com)

Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук

119991, г. Москва, ул. Косыгина, д. 4



## 1. Введение

Системы с нулевыми собственными значениями привлекают в последние годы все больше внимания в связи с их использованием в эффективных энергетических ловушках [6, 11]. При этом динамическая модель такой ловушки, как правило, может быть представлена схематически невесомой струной без предварительного натяжения с центрально расположенной массой, совершающей поперечные колебания. Подобная ловушка, соединенная с испытывающей действие интенсивных импульсов линейной системой, неизбежно резонирует с последней при уменьшении амплитуды ее колебаний из-за диссипации энергии. Благодаря этому и достигается эффективный перенос колебательной энергии к ловушке. Сколь-нибудь заметный обратный ее поток также отсутствует вследствие вызванного диссипацией энергии уменьшения амплитуды колебаний ловушки (поскольку парциальная частота колебаний ловушки определяется их амплитудой).

Следует ожидать, что увеличение числа степеней свободы энергетической ловушки может существенно повысить ее эффективность за счет использования дополнительных резонансов. При этом в качестве простейшего обобщения можно рассматривать ту же струну без начального натяжения, но с большим числом масс. Ранее было показано [7], что оптимальные параметры энергетической ловушки могут быть определены в рамках консервативного приближения, без учета диссипации энергии.

Случай произвольного конечного числа масс, но при отсутствии упругой подложки, рассмотрен в работе [9]. В этом случае число нелинейных нормальных мод то же, что и при линейных колебаниях струны с предварительным натяжением, то есть совпадает с числом масс, но, в отличие от линейной системы, в которой резонировать могут лишь высокочастотные моды в верхней части колебательного спектра, в нелинейной системе возникает большое число внутренних резонансов, что позволяет резко повысить «энергоемкость» энергетической ловушки. Однако в низкоэнергетической области, когда волновые числа относительно малы, число резонансов существенно уменьшается.

Введение упругой подложки как раз и позволяет преодолеть этот недостаток, что продемонстрировано в данной статье на двухмассовой модели. В случае свободной струны возможен лишь один внутренний резонанс при существенно отличающихся амплитудах нелинейных нормальных мод. Если же вклад подложки в потенциальную энергию соизмерим с вкладом собственно струны или доминирует, то сам модальный подход оказывается неадекватным. Эффективный анализ удалось провести применительно к системе слабо взаимодействующих осцилляторов, при этом естественно возникает второй временной масштаб («медленное время»). В медленном времени система становится интегрируемой, а стационарные состояния, соответствующие нелинейным нормальным модам (ННМ), можно описать аналитически. При увеличении интенсивности возбуждения возможны неустойчивость и бифуркации таких состояний с формированием новых стационарных состояний (нормальных мод) и разделяющей их сепаратрисы [2, 7]. Что же касается существенно нестационарных процессов в системах слабо связанных осцилляторов, то здесь, как было показано в [2, 4, 5, 8], фундаментальную роль играют предельные фазовые траектории (ПФТ), соответствующие полному энергообмену между осцилляторами либо кластерами осцилляторов («эффективными частицами»). Несмотря на качественную трансформацию стационарных состояний, полный энергообмен, описываемый ПФТ, остается возможным, пока при втором критическом значении соотношения между энергетическими вкладами собственно струны и подложки сепаратриса не становится предельной фазовой траекторией. При дальнейшем увеличении этого соотношения в пользу подложки полный энергообмен между осциллято-

рами становится невозможным, и «большая» ПФТ скачком трансформируется в «малую» ПФТ, характеризующую максимально возможный при данных условиях, но существенно меньший энергообмен. Соответствующий нестационарный процесс характеризуется доминированием (локализацией) энергии на первоначально возбужденном осцилляторе, которое становится все более выраженным при увеличении относительного энергетического вклада подложки.

Рассматриваемая система отличается от исследованной ранее консервативной двухчастичной модели «нелокальностью» потенциала взаимодействия и необходимостью учета меньших по амплитуде продольных колебаний, имеющих низкочастотную и высокочастотную составляющие. Именно наличие высокочастотной составляющей объясняет формирование нелокальной нелинейности при анализе поперечных колебаний. От случая же струны без подложки рассматриваемую систему отличает возможность качественной трансформации как стационарных, так и существенно нестационарных режимов и связанная с этим возможность превышения числом ННМ размерности системы (числа степеней свободы).

Статья построена следующим образом: сначала получены уравнения движения и выполнена их редукция для описания поперечных колебаний, затем подробно исследуется полученная система — ее ННМ, ПФТ, возможность энергообмена между осцилляторами, динамические переходы. Выполнено также интегрирование уравнений продольной динамики. Анализ численных решений нередуцированной системы подтверждает правомерность сделанных предположений. Приведены сечения Пуанкаре, полученные интегрированием редуцированных уравнений поперечной динамики, что позволяет установить связь выявленных динамических переходов с формированием областей стохастичности.

## 2. Уравнения движения и их редукция

Рассмотрим систему двух осцилляторов, схематически показанную на рисунке 1. Продольные пружины имеют обычный гармонический потенциал (сила натяжения в  $j$ -ом звене  $T_j = K\varepsilon_j$ , где  $\varepsilon_{1,2,3}$  — относительная деформация, а  $K$  — продольная жесткость), поперечные (вертикальные на рисунке) пружины отражают влияние упругой подложки ( $\tilde{T}_j = cV_j^3$ , где  $V_j, j = 1, 2$  — поперечные смещения). Концы закреплены; подложка действует только в поперечном направлении, что можно обеспечить, допустив свободное перемещение точек крепления соответствующих пружин по неподвижным горизонтальным опорам.

Уравнения движения имеют следующий вид ( $U_j, V_j$  — продольные и поперечные смещения,  $\theta_j$  — угол поворота  $j$ -го звена):

$$\begin{aligned} m\ddot{U}_j + T_j \cos \theta_j - T_{j+1} \cos \theta_{j+1} &= 0, & j = 1, 2, \\ m\ddot{V}_j + cV_j^3 + T_j \sin \theta_j - T_{j+1} \sin \theta_{j+1} &= 0, & j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

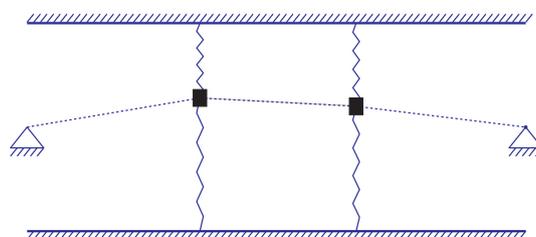


Рис. 1. Схематическое изображение струны с дискретными распределенными массами без предварительного натяжения при наличии подложки.

Сила натяжения  $j$ -го элемента струны зависит от смещений следующим образом:

$$T_j = K \frac{1}{l} \left[ (U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{2l} (V_j - V_{j-1})^2 \right]. \quad (2.2)$$

Исходная нелинейная система (2.1) весьма сложна и не допускает аналитического решения. Однако в наиболее важной для приложений области, когда доминируют низкочастотные низкоэнергетические поперечные колебания, при амплитудах поперечных колебаний, значительно меньших длины звена  $l$  ( $\varepsilon = \frac{a}{l} \ll 1$ ),

$$\cos \theta_j \approx 1, \sin \theta_j \approx \frac{V_j - V_{j-1}}{l} \sim \varepsilon; T_j \sim \varepsilon^2, \quad (2.3)$$

и, как будет показано ниже, рассматриваемая система становится интегрируемой в главном асимптотическом приближении по малому параметру  $\varepsilon$ . В первом уравнении все слагаемые имеют порядок  $\sim \varepsilon^2$ , в то время как во втором слагаемые  $m\ddot{V}_j \sim \varepsilon$  и  $cV_j^3 + T_j \sin \theta_j - T_{j+1} \sin \theta_{j+1} \sim \varepsilon^3$ . Это упрощение соответствует относительно медленному движению в поперечном направлении. Благодаря ему можно ввести «медленное» время:  $\tau_1 = \varepsilon \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{lm}}$ . Тогда система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2U_j}{d\tau_1^2} + T_j - T_{j+1} &= 0, \quad j = 1, 2, \\ m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2V_j}{d\tau_1^2} + cV_j^3 + T_j \frac{V_j - V_{j-1}}{l} - T_{j+1} \frac{V_{j+1} - V_j}{l} &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь во втором уравнении все члены имеют одинаковый порядок  $\sim \varepsilon^3$ , а в первом уравнении  $m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2U_j}{d\tau_1^2} \sim \varepsilon^4, T_j - T_{j+1} \sim \varepsilon^2$ .

Это означает, что слагаемое  $m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2U_j}{d\tau_1^2}$  пренебрежимо мало, и можно утверждать, что  $T_j \approx T_{j+1}$ . Таким образом, имеем  $T_1 = T_2 = T_3 = \langle T \rangle$ . В разделе 7 мы обсудим механизмы формирования нелокальной средней силы натяжения струны  $\langle T \rangle$ . Таким образом,

$$T = \langle T_j \rangle = \frac{1}{3} K \frac{1}{2l^2} \sum_{s=0}^2 (V_{s+1} - V_s)^2. \quad (2.5)$$

При продольном движении система не испытывает влияния подложки.

Рассмотрим более подробно поперечное движение. Оно описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2V_1}{d\tau_1^2} + cV_1^3 + \frac{K}{6l^2} [V_1^2 + (V_2 - V_1)^2 + V_2^2] \left( \frac{V_1}{l} + \frac{V_1 - V_2}{l} \right) = 0, \\ m\varepsilon^2\omega_0^2 \frac{d^2V_2}{d\tau_1^2} + cV_2^3 + \frac{K}{6l^2} [V_1^2 + (V_2 - V_1)^2 + V_2^2] \left( \frac{V_2}{l} + \frac{V_2 - V_1}{l} \right) = 0. \end{cases}$$

Переходя к нормированным смещениям  $V_j = \varepsilon v_j$  и учитывая, что  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{lm}}$ , получаем систему с одним эффективным параметром  $\mu = \frac{K}{Cl^3}$ , характеризующим относительный вклад подложки: вклад самой струны становится основным при  $\mu \rightarrow \infty$ , а вклад подложки оказывается существенным при  $\mu \leq 1$ :

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 v_1}{d\tau_1^2} + v_1^3 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_1 - v_2) = 0, \\ \mu \frac{d^2 v_2}{d\tau_1^2} + v_2^3 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_2 - v_1) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Гамильтоновой системе соответствует потенциал  $\Pi$ :

$$\mu \Pi = \frac{v_1^4}{4} + \frac{v_2^4}{4} + \mu/6 (v_1^4 + v_2^4 - 2v_2^3 v_1 - 2v_1^3 v_2 + 3v_1^2 v_2^2). \quad (2.7)$$

Если же не вводить предположение (2.5) о равенстве натяжений всех сегментов струны, то уравнения движения в нормированных координатах для поперечных смещений будут иметь более сложный вид:

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 + \frac{1}{\mu} v_1^3 + \left[ u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right] v_1 - \left[ (u_2 - u_1) + \frac{1}{2} (v_2 - v_1)^2 \right] (v_2 - v_1) = 0, \\ \ddot{v}_2 + \frac{1}{\mu} v_2^3 + \left[ u_2 - u_1 + \frac{1}{2} (v_2 - v_1)^2 \right] (v_2 - v_1) - \left[ -u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right] (-v_2) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

### 3. Нелинейные нормальные моды

Найдем, прежде всего, нелинейные нормальные моды, рассматривая исходную систему (2.6). Нормальные моды соответствуют согласованному синхронному движению частиц:  $v_2 = kv_1$ . Подставим это соотношение в уравнения движения. Приравняв левые части с соответствующими коэффициентами, приходим к следующему алгебраическому уравнению четвертой степени относительно модального параметра  $k$ :

$$k \left\{ 1 + \frac{\mu}{6} [1 + (k-1)^2 + k^2] (2-k) \right\} = k^3 + \frac{\mu}{6} [1 + (k-1)^2 + k^2] (2k-1).$$

Отсюда

$$(k^2 - 1) \left[ k + \frac{\mu}{3} (k^2 - k + 1) \right] = 0.$$

Два очевидных решения  $k = 1, k = -1$  соответствуют синфазной и антифазной модам, другие два являются корнями уравнения

$$\begin{aligned} \mu k^2 + (3 - \mu)k + \mu &= 0, \\ k &= \frac{\mu - 3 \pm \sqrt{(\mu - 3)^2 - 4\mu^2}}{2\mu}. \end{aligned}$$

Условие существования дополнительных вещественных корней имеет вид:

$$(\mu - 3)^2 - 4\mu^2 = (-\mu - 3)(\mu - 1) = 0.$$

Если  $\varepsilon < \mu < 1$ , имеем 4 корня (при  $\mu < \varepsilon$  наше приближение некорректно, так как в системе возникает дополнительный малый параметр). Это означает появление двух дополнительных к синфазной и антифазной мод. Их значение в стационарной и нестационарной динамике будет обсуждаться ниже.

#### 4. Введение комплексных переменных

Для анализа резонансной нестационарной динамики целесообразно перейти к комплексным комбинациям скоростей и перемещений осцилляторов. Предварительно перепишем систему (2.6) в трансформированном виде. Предполагая, что резонанс достигается вблизи некоторой частоты  $\omega$ , введем явно эту частоту в уравнения движения, добавив и вычтя величину  $\omega^2 v_1$ . Параметр  $\varepsilon$  отражает относительную малость комбинации членов, содержащихся в скобках. Введение компенсирующего параметра  $\gamma = \varepsilon^{-1}$  позволяет сохранить эквивалентность систем (2.6) и (4.1). Получаем

$$\begin{cases} \mu (\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1) + \varepsilon \gamma \left( v_1^3 - \mu \omega^2 v_1 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_1 - v_2) \right) = 0, \\ \mu (\ddot{v}_2 + \omega^2 v_2) + \varepsilon \gamma \left( v_2^3 - \mu \omega^2 v_2 + \frac{\mu}{6} [v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + v_2^2] (2v_2 - v_1) \right) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Введем теперь комплексные переменные следующим образом:

$$\psi_1 = \dot{v}_1 + i\omega v_1, \quad \psi_2 = \dot{v}_2 + i\omega v_2.$$

Обозначим для краткости  $\Phi = \psi_1 - \psi_2$ . Подстановка в систему (4.1) дает

$$\begin{cases} \mu (\dot{\psi}_1 - i\omega \psi_1) = -\varepsilon \gamma \left\{ \left( \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\omega} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{6} \left[ \left( \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\Phi - \Phi^*}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\omega} \right)^2 \right] \left( 2 \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\omega} - \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\omega} \right) + \mu \frac{i\omega}{2} (\psi_1 - \psi_1^*) \right\}, \\ \mu (\dot{\psi}_2 - i\omega \psi_2) = -\varepsilon \gamma \left\{ \left( \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\omega} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{6} \left[ \left( \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\Phi - \Phi^*}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\omega} \right)^2 \right] \left( 2 \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\omega} - \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\omega} \right) + \mu \frac{i\omega}{2} (\psi_2 - \psi_2^*) \right\}. \end{cases}$$

Используем теперь метод двухмасштабных разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :  $\psi_j = \psi_{0,j} + \varepsilon \psi_{1,j} + \dots$ ,  $\frac{d}{d\tau_1} = \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots$ . В нулевом приближении имеем:  $\frac{\partial \psi_{j,0}}{\partial \tau_1} - i\omega \psi_{j,0} = 0$ , так что  $\psi_{j,0} = e^{i\omega \tau_1} \varphi_{j,0}$ . Подставим это выражение в уравнение и рассмотрим следующее приближение, приравнявая к нулю сумму членов порядка  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi_{j,0}}{\partial \tau_2} e^{i\omega \tau_1} + \mu \frac{\partial \psi_{j,1}}{\partial \tau_1} - i\mu \omega \psi_{j,1} = -\gamma \left\{ \left( \frac{\varphi_{j,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{6} \left[ \left( \frac{\varphi_{1,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{1,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\Phi_0 - \Phi_0^*}{2i\omega} \right)^2 + \left( \frac{\varphi_{2,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{2,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right)^2 \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left( 2 \frac{\varphi_{j,0} e^{i\omega\tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{-i\omega\tau_1}}{2i\omega} - \frac{\varphi_{3-j,0} e^{i\omega\tau_1} - \varphi_{3-j,0}^* e^{-i\omega\tau_1}}{2i\omega} \right) + \mu \frac{i\omega}{2} (\varphi_{j,0} e^{i\omega\tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{i\omega\tau_1}) \Bigg\},$$

$$j = 1, 2.$$

Чтобы избежать появления секулярных членов при интегрировании по времени  $\tau_1$ , суммарный коэффициент при  $e^{i\omega\tau_1}$  должен быть равен нулю. Это условие приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi_{1,0}}{\partial \tau_2} &= \gamma \left\{ 3i \frac{\varphi_{1,0} |\varphi_{1,0}|^2}{(2\omega)^3} - \mu \frac{i\omega}{2} \varphi_{1,0} + \frac{\mu i}{6(2\omega)^3} (\varphi_{1,0}^2 + (\varphi_{1,0} - \varphi_{2,0})^2 + \varphi_{2,0}^2) (2\varphi_{1,0}^* - \varphi_{2,0}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu i}{6(2\omega)^3} (2|\varphi_{1,0}|^2 + 2|\varphi_{1,0} - \varphi_{2,0}|^2 + 2|\varphi_{2,0}|^2) (2\varphi_{1,0} - \varphi_{2,0}) \right\}, \\ \mu \frac{\partial \varphi_{2,0}}{\partial \tau_2} &= \gamma \left\{ 3i \frac{\varphi_{2,0} |\varphi_{2,0}|^2}{(2\omega)^3} - \mu \frac{i\omega}{2} \varphi_{2,0} + \frac{\mu i}{6(2\omega)^3} (\varphi_{1,0}^2 + (\varphi_{1,0} - \varphi_{2,0})^2 + \varphi_{2,0}^2) (2\varphi_{2,0}^* - \varphi_{1,0}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu i}{6(2\omega)^3} (2|\varphi_{1,0}|^2 + 2|\varphi_{1,0} - \varphi_{2,0}|^2 + 2|\varphi_{2,0}|^2) (2\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эта система является интегрируемой, поскольку, кроме интеграла энергии (2.7), она допускает также второй интеграл («углового момента»)

$$N = |\varphi_{1,0}|^2 + |\varphi_{2,0}|^2, \quad (4.3)$$

что может быть проверено непосредственно.

## 5. Угловые переменные

Имея интеграл момента  $N$  (4.3), можно ввести действительные угловые переменные  $\theta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ :

$$\varphi_{1,0} = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\delta_1}, \quad \varphi_{2,0} = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\delta_2}. \quad (5.1)$$

Введем также обозначение  $\Delta = \delta_2 - \delta_1$ . Подставив (5.1) в уравнения (4.2) и сократив на  $\sqrt{N} e^{i\delta_1}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \mu \left( -\dot{\theta} \sin \theta + i \dot{\delta}_1 \cos \theta \right) &= \gamma \left\{ 3iN \frac{\cos^3 \theta}{(2\omega)^3} - \mu \frac{i\omega}{2} \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu iN}{6(2\omega)^3} (2 \cos^3 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta e^{-i\Delta} - 2 \cos^2 \theta \sin \theta e^{i\Delta} + \cos \theta \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \theta \sin^2 \theta e^{2i\Delta} - \sin^3 \theta e^{i\Delta}) + \frac{2\mu iN}{6(2\omega)^3} (2 - \sin 2\theta \cos \Delta) (2 \cos \theta - \sin \theta e^{i\Delta}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Второе уравнение трансформируется следующим образом:

$$\mu (\dot{\theta} \cos \theta + i \dot{\delta}_2 \sin \theta) = \gamma \left\{ 3iN \frac{\sin^3 \theta}{(2\omega)^3} - \mu \frac{i\omega}{2} \sin \theta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu i N}{6(2\omega)^3} (2 \cos^2 \theta \sin \theta e^{-2i\Delta} - \cos^3 \theta e^{-i\Delta} - 2 \cos \theta \sin^2 \theta e^{-i\Delta} + \cos^2 \theta \sin \theta + \\
& + 2 \sin^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta e^{i\Delta}) + \frac{2\mu i N}{6(2\omega)^3} (2 - \sin 2\theta \cos \Delta) (2 \sin \theta - \cos \theta e^{-i\Delta}) \Big\}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Умножив уравнение (5.3) на  $\cos \theta$ , уравнение (5.2) на  $\sin \theta$  и вычитая первое из второго, получим

$$\begin{aligned}
\mu(\dot{\theta} + i \sin \theta \cos \theta \dot{\Delta}) = \gamma \Big\{ & -\frac{3iN}{4(2\omega)^3} \sin 4\theta + \frac{2\mu i N}{6(2\omega)^3} \left( 2 \cos^3 \theta \sin \theta e^{-2i\Delta} - \cos^2 \theta e^{-i\Delta} - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \right. \\
& \left. + \sin^2 \theta e^{i\Delta} - 2 \cos \theta \sin^3 \theta e^{2i\Delta} \right) + \frac{2\mu i N}{6(2\omega)^3} (2 - \sin 2\theta \cos \Delta) (-\cos^2 \theta e^{-i\Delta} + \sin^2 \theta e^{i\Delta}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Разделяя комплексную и действительную части, приходим после упрощения к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \gamma \frac{2N}{4(2\omega)^3} (\sin 2\theta \sin 2\Delta - 2 \sin \Delta), \\ \mu \frac{1}{2} \sin 2\theta \dot{\Delta} = \gamma \left\{ -\frac{3N}{4(2\omega)^3} \sin 4\theta + \frac{\mu N}{4(2\omega)^3} (\sin 4\theta \cos 2\Delta - 4 \cos 2\theta \cos \Delta) \right\}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Легко проверить, что  $\theta = \pi/4, \Delta = 0$  и  $\theta = \pi/4, \Delta = \pi$  — стационарные точки, соответствующие значениям  $k = 1$  (то есть синфазному движению:  $v_1 = C \sin(\omega\tau_0 + \delta_1)$ ,  $v_2 = C \sin(\omega\tau_0 + \delta_1) = v_1$ ) и  $k = -1$  (то есть антифазному движению:  $v_1 = C \sin(\omega\tau_0 + \delta_1)$ ,  $v_2 = C \sin(\omega\tau_0 + \delta_1 + \pi) = -v_1$ ).

Условие, при котором существуют дополнительные стационарные точки, имеет вид

$$\sin 2\theta \sin 2\Delta - 2 \sin \Delta = 0$$

и выполняется, когда либо  $\sin \Delta = 0$ , либо  $\sin 2\theta \cos \Delta = 1$ . Подставив  $\Delta = 0$  во второе уравнение, получаем следующее уравнение для  $\theta$ :

$$(\mu - 3) \sin 4\theta - 4\mu \cos 2\theta = 0.$$

Таким образом,  $\cos 2\theta = 0$  (что соответствует значению  $\theta = \pi/4$ ) и  $\sin 2\theta = 2\mu/(\mu - 3)$ . Поскольку  $0 < \mu < 3$ , вещественное решение отсутствует. Для  $\Delta = \pi$  имеем  $\sin 2\theta = -2\mu/(\mu - 3)$  — решение существует, если  $\mu < 1$ , что согласуется с полученным выше условием для системы (2.6).

Вводя масштабированное время  $\tau_3 = \gamma \frac{N}{4(2\omega)^3} \tau_2$ , получаем следующую упрощенную систему, содержащую лишь один параметр  $\mu$ :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 2 (\sin 2\theta \sin 2\Delta - 2 \sin \Delta), \\ \dot{\Delta} = \frac{2}{\mu \sin 2\theta} \{-3 \sin 4\theta + \mu (\sin 4\theta \cos 2\Delta - 4 \cos 2\theta \cos \Delta)\}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Разделив второе из этих уравнений на первое,

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = \frac{-3 \sin 4\theta + \mu (\sin 4\theta \cos 2\Delta - 4 \cos 2\theta \cos \Delta)}{\mu \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot 2 (\sin 2\theta \sin 2\Delta - 2 \sin \Delta)},$$

приходим к уравнению в полных дифференциалах

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta} / \frac{\partial H_1}{\partial \Delta}$$

с интегралом энергии

$$H_1 = \mu \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cos 2\Delta - 2 \sin 2\theta \cos \Delta \right) + \frac{3}{4} \cos 4\theta, \quad (5.6)$$

который также может быть получен подстановкой (5.1) в интеграл энергии (2.7).

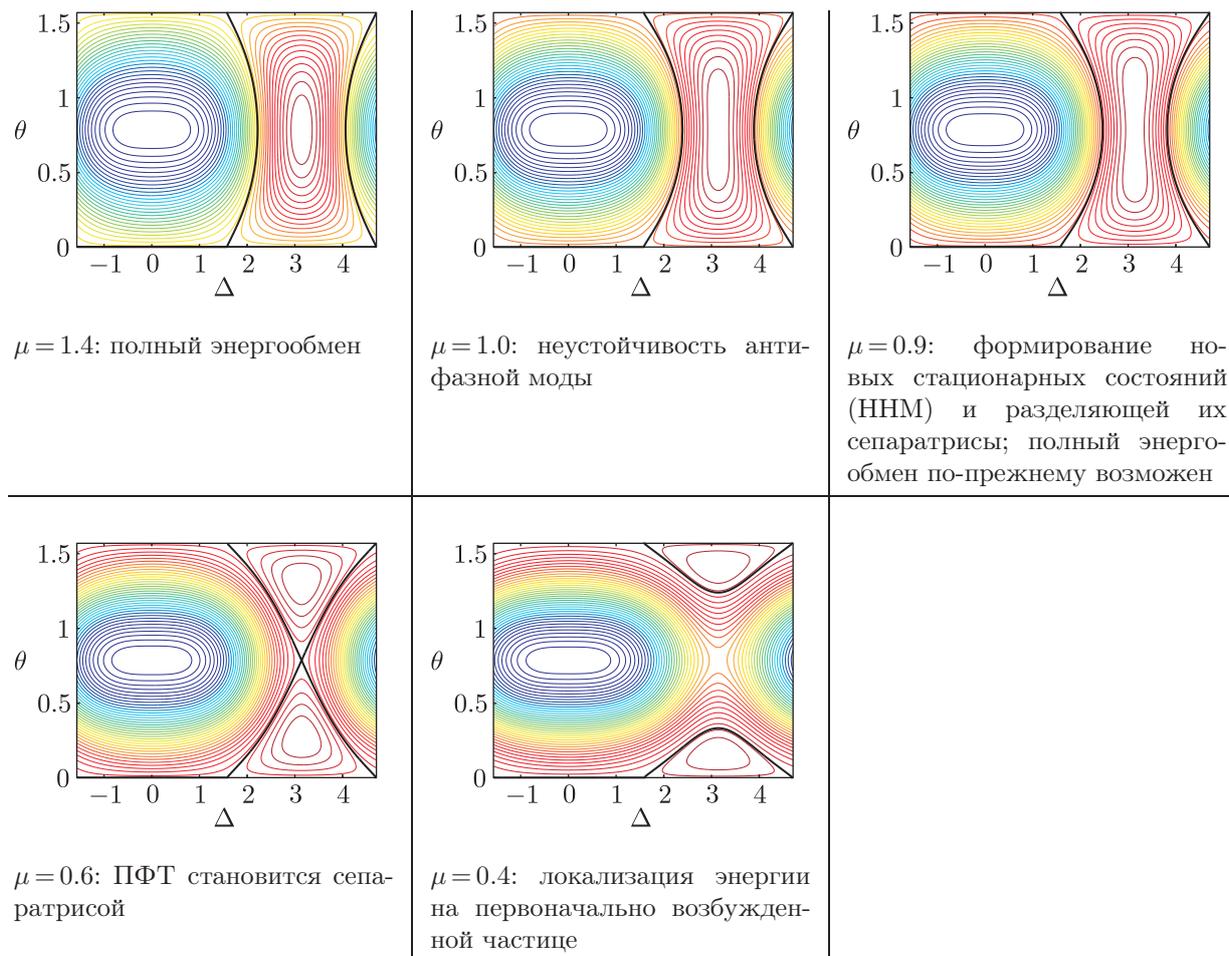
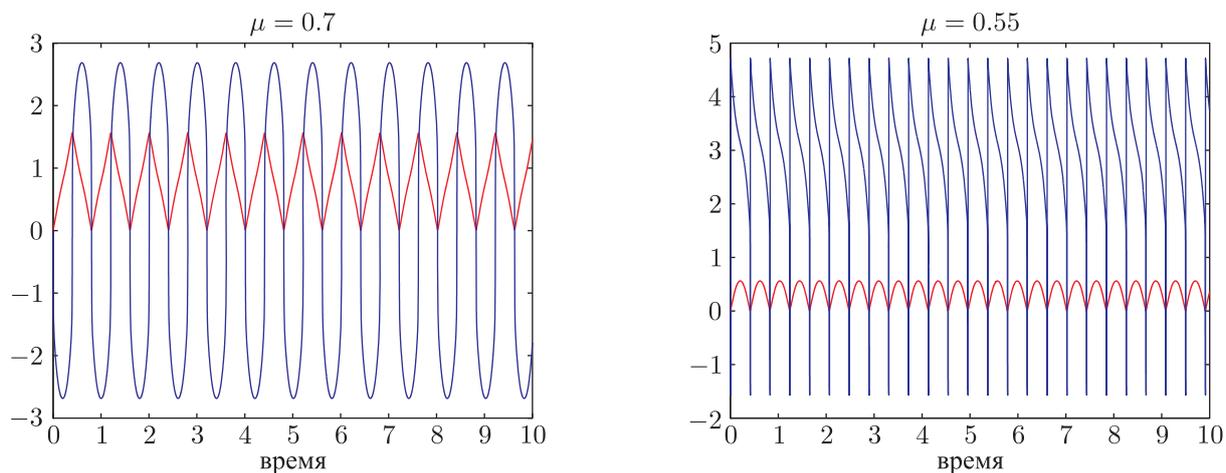
Параметр  $\mu$  имеет два критических значения. Одно из них — это  $\mu = 1$  (при  $\mu > 1$  существуют две стационарные точки (ННМ), при  $\mu < 1$  — четыре). Это значение соответствует неустойчивости антифазной ННМ, ее бифуркации с появлением двух дополнительных устойчивых ННМ и разделяющей их сепаратрисы. Соответствующий первый динамический переход определяет эволюцию стационарных состояний системы, каковыми являются ННМ. Второй же переход происходит при таком значении  $\mu$ , когда сепаратриса становится предельной фазовой траекторией. Это значение можно найти аналитически из условия, что точке  $(\theta = 0, \Delta = 0)$ , принадлежащей ПФТ, и седловой точке сепаратрисы  $(\theta = \pi/4, \Delta = \pi)$  отвечает одно и то же значение интеграла  $H_1$ :

$$H_1 |_{\theta=0, \Delta=0} = \frac{3}{4} = \mu \left( \frac{1}{2} + 2 \right) - \frac{3}{4},$$

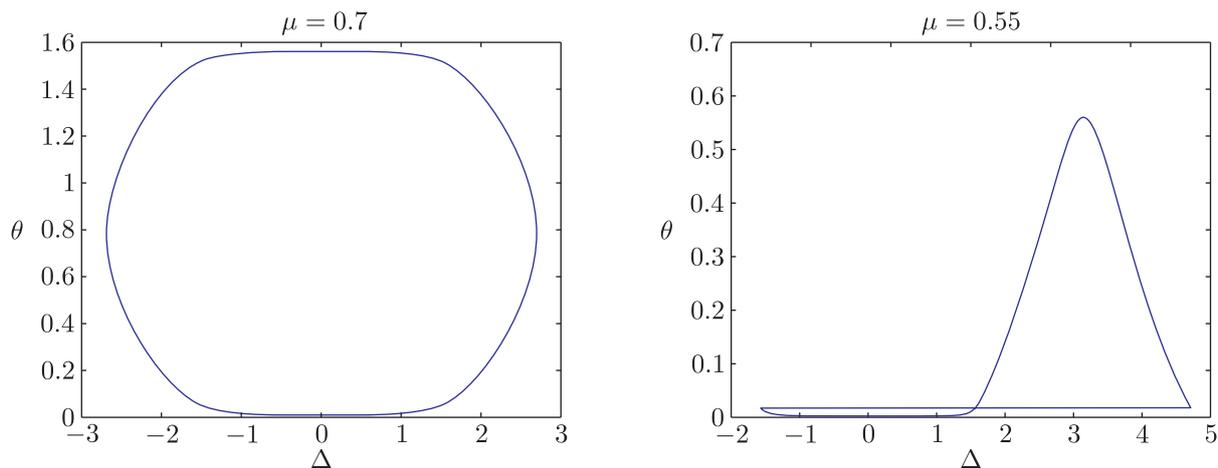
Получаем критическое значение  $\mu = 0.6$ . Данный динамический переход связан с возможностью или невозможностью полного энергообмена между частицами. Сколь угодно малое превышение второго энергетического порога приводит к невозможности полного энергообмена. Фазовая плоскость в угловых переменных при различных значениях параметра  $\mu$  показана на рисунке 2.

Переход от полного энергообмена к локализации энергии можно проиллюстрировать и численным интегрированием системы (5.5) при начальных условиях  $\theta_0 = 0.001$ ,  $\Delta_0 = 0$ , что практически соответствует энергии, первоначально полностью локализованной на первом осцилляторе. Результаты интегрирования приведены на рисунках 3, 4. Можно видеть, что если при  $\mu = 0.7$  все еще наблюдается полный энергообмен, то при  $\mu = 0.55$  энергия локализована преимущественно на первоначально возбужденном (первом) осцилляторе и наблюдается лишь слабый энергообмен.

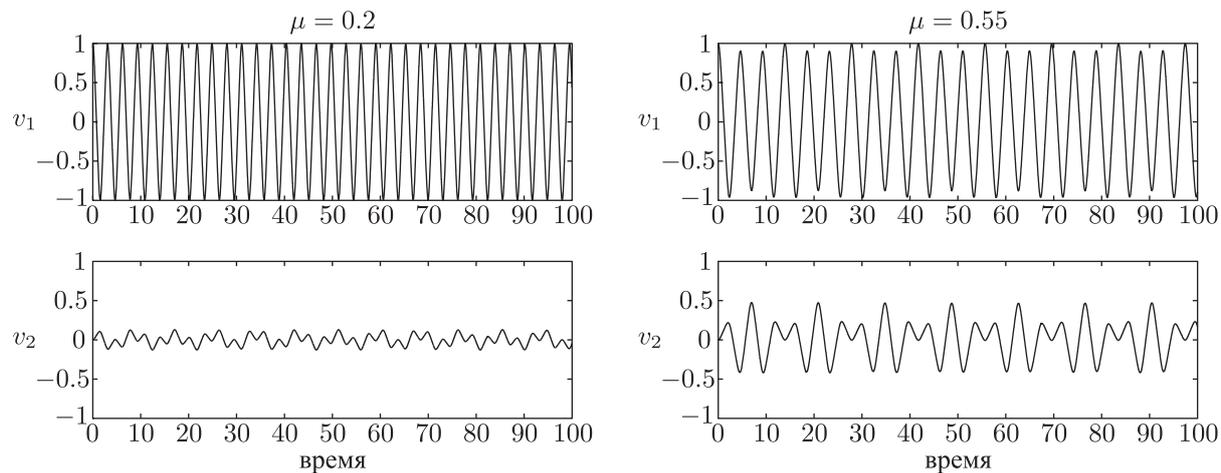
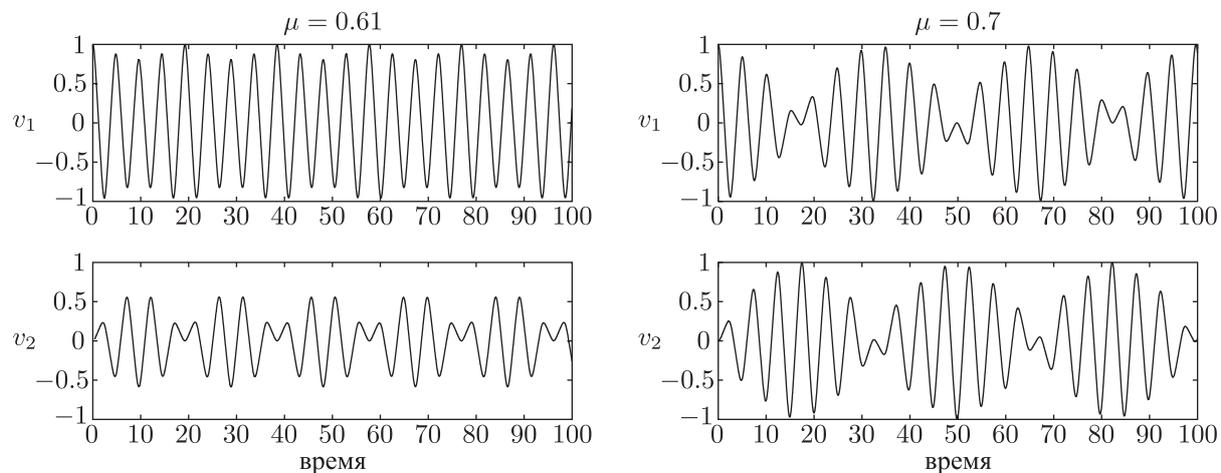
Главное асимптотическое приближение позволило провести полное исследование рассматриваемой системы и выявить не только трансформацию стационарных состояний, но и второй динамический переход, характеризующий качественное изменение нестационарной динамики. При этом условие первого динамического перехода ( $\mu = 1$ ) полностью соответствует найденному аналитически из системы (2.6). Чтобы оценить корректность предсказания второго перехода, система (2.6) в переменных  $v_1, v_2$  была проинтегрирована численно. Начальные условия соответствовали возбуждению лишь первого осциллятора:  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 0$ ,  $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$ . Результаты численного интегрирования показаны на рисунках 5 и 6. Видно, что они хорошо согласуются с аналитическими оценками.

Рис. 2. Фазовая плоскость для разных значений параметра  $\mu$ . Черной линией изображены ПФТ.Рис. 3. Графики зависимости переменных  $\theta$ ,  $\Delta$  от времени.

Условие второго перехода ( $\mu = 0.6$ ) предсказывается с высокой точностью в рамках главного асимптотического приближения. Если при  $\mu = 0.7$  отчетливо виден полный энергообмен, а при  $\mu = 0.61$  заметно слабое доминирование первоначально возбужденного ос-

Рис. 4. Предельные фазовые траектории на фазовой плоскости  $\theta$ ,  $\Delta$ .

циллятора (рис. 6), то при  $\mu = 0.55$  этот эффект уже отчетливо выражен, а при  $\mu = 0.2$  достигается почти полная локализация энергии на первом осцилляторе (рис. 5).

Рис. 5. Локализация энергии ( $\mu < 0.6$ ).Рис. 6. Интенсивный энергообмен ( $\mu > 0.6$ ).

## 6. Аналитическое описание предельной фазовой траектории в терминах негладких функций

Адекватное аналитическое описание полного энергообмена между осцилляторами ( $\mu > 0.6$ ) может быть получено при помощи негладких преобразований [10]. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}\theta &= X_1(\tau) + eY_1(\tau), \\ \Delta &= X_2(\tau) + eY_2(\tau).\end{aligned}$$

Здесь  $\tau$  — пилообразная функция с периодом  $T = 4a$ :

$$\tau(\tau_3) = 0.5 \left( (2/\pi) \arcsin(\sin(\pi\tau_3/a - \pi/2)) + 1 \right);$$

$e(\tau)$  — ее производная в терминах обобщенных функций:  $e(\tau_3) = d\tau/d\tau_3$ . Наша цель — описать траекторию, которая проходит через точку  $(\theta = 0, \Delta = -\pi/2)$ . Тогда значение гамильтониана  $H = \frac{3}{4}$ , и имеем следующее уравнение ПФТ в плоскости  $(\theta, \Delta)$ :

$$\mu \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cos 2\Delta - 2 \sin 2\theta \cos \Delta \right) + \frac{3}{4} \cos 4\theta = \frac{3}{4}.$$

Если обозначить  $\cos \Delta = t$ , то получаем квадратное уравнение

$$\mu \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\theta (2t^2 - 1) - 2 \sin 2\theta t \right) + \frac{3}{4} \cos 4\theta = \frac{3}{4},$$

или, после преобразования,

$$t^2 - \frac{2}{\sin 2\theta} t - \frac{\mu + 3}{2\mu} = 0.$$

Тогда

$$\cos \Delta = t = \frac{1}{\sin 2\theta} - \sqrt{\left( \frac{1}{\sin 2\theta} \right)^2 + \frac{\mu + 3}{2\mu}}.$$

Таким образом, решение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2}\tau, \\ \Delta &= -\arccos \left( \frac{-\frac{\mu + 3}{2\mu} \sin \pi\tau}{1 + \sqrt{1 + \frac{\mu + 3}{2\mu} \sin^2 \pi\tau}} \right) \cdot e.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Для определения полупериода  $a$  в зависимости от параметра  $\mu$  подставим решение (6.1) в уравнение для  $\theta$ :

$$\frac{\pi}{2} e(t/a) \cdot \frac{1}{a} = 4 \sin \Delta (\sin(\pi\tau) \cos \Delta - 1).$$

После ряда преобразований получаем:

$$\frac{\pi}{2} e \cdot \frac{1}{a} = 4e \sqrt{1 - \cos^2 \Delta} \sqrt{1 + \frac{\mu + 3}{2\mu} \sin^2 \pi\tau}.$$

Это уравнение должно выполняться для каждого значения  $\tau$ . Раскладывая правую часть по степеням  $\tau$  и оставляя члены нулевого порядка, получаем, что

$$\frac{\pi}{2}e \cdot \frac{1}{a} = 4e \cdot 1 \quad \text{и} \quad a = \frac{\pi}{8}.$$

Сравнение результатов аналитического приближения и «точного» численного решения системы (5.5) показано на рисунке 7. Видно, что они достаточно близки.

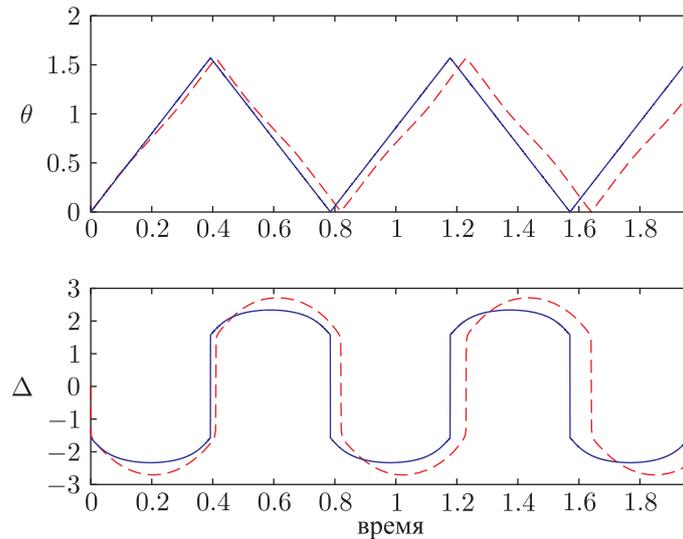


Рис. 7. Случай энергообмена ( $\mu > 0.7$ ). Сплошные линии (синие) — для аналитического приближения, пунктирные (красные) — численно решение.

В терминах функций  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  имеем (первое приближение):

$$X_1(\tau) = \frac{\pi}{2}\tau, Y_1(\tau) = 0,$$

$$X_2(\tau) = 0, Y_2(\tau) = -\arccos \left( \frac{-\frac{\mu+3}{2\mu} \sin \pi\tau}{1 + \sqrt{1 + \frac{\mu+3}{2\mu} \sin^2 \pi\tau}} \right).$$

Запишем теперь соответствующие аналитические выражения для переменных  $\varphi_j$ , а затем и для  $v_j$  ( $j = 1, 2$ ):

$$\varphi_j = (\dot{v}_1 + i\omega v_1)e^{-i\omega\tau_0}, \quad |\varphi_j| = \sqrt{\dot{v}_1^2 + \omega^2 v_1^2},$$

$$N = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = \dot{v}_1^2 + \omega^2 v_1^2 + \dot{v}_2^2 + \omega^2 v_2^2.$$

Поскольку  $N$  является интегралом, можно найти его значение из начальных условий. Если  $v_1(0) = 1, \dot{v}_1(0) = v_2(0) = \dot{v}_2(0) = 0$ , то  $N = \omega^2$ . Можно также записать, что

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\dot{v}_2 + i\omega v_2}{\dot{v}_1 + i\omega v_1} = \operatorname{tg} \theta \cdot e^{i\Delta}.$$

Полагая  $\delta_1 = 0, \delta_2 = \Delta$ , получим:

$$v_1 = \frac{\varphi_1 e^{i\omega\tau_0} - \varphi_1^* e^{-i\omega\tau_0}}{2i\omega} = \frac{\omega \cos \theta \sin(\omega\tau_0)}{\omega} = \sin(\omega\tau_0) \cos \theta,$$

$$v_2 = \sin \theta \sin(\Delta + \omega\tau_0).$$

## 7. Продольные движения

Рассмотрим теперь продольные колебания, описываемые следующими уравнениями движения, полученными из (2.1):

$$m\varepsilon^2 \omega_0^2 \frac{d^2 U_j}{d\tau_1^2} + K \frac{1}{l} [(2U_j - U_{j-1} - U_{j+1})] = -K \frac{1}{2l^2} \left[ (V_j - V_{j-1})^2 - \frac{1}{2l} (V_{j+1} - V_j)^2 \right], \quad j = 1, 2.$$

При этом функции  $V_1, V_2$  уже известны. В безразмерных переменных ( $\varepsilon^2 u_j = \frac{U_j}{l}, \varepsilon v_j = \frac{V_j}{l}$ ) получаем следующие уравнения:

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_1 + (2u_1 - u_2) = -\frac{1}{2} [v_1^2 - (v_2 - v_1)^2],$$

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_2 + (2u_2 - u_1) = -\frac{1}{2} [(v_2 - v_1)^2 - v_2^2].$$
(7.1)

Частное решение системы (7.1) имеет вид

$$u_1^0 = \frac{(v_2 - v_1)^2 + v_2^2 - 2v_1^2}{6} + O(\varepsilon^2),$$

$$u_2^0 = \frac{2v_2^2 - v_1^2 - (v_2 - v_1)^2}{6} + O(\varepsilon^2).$$
(7.2)

Решение соответствующей однородной системы

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_1 + (2u_1 - u_2) = 0,$$

$$\varepsilon^2 \ddot{u}_2 + (2u_2 - u_1) = 0$$
(7.3)

описывается быстро изменяющимися функциями:

$$\tilde{u}_2 = C_1 \cos\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon} + \varphi_1\right) + C_3 \cos\left(\frac{\tau_1 \sqrt{3}}{\varepsilon} + \varphi_3\right),$$

$$\tilde{u}_1 = C_1 \cos\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon} + \varphi_1\right) - C_3 \cos\left(\frac{\tau_1 \sqrt{3}}{\varepsilon} + \varphi_3\right),$$
(7.4)

а суммы  $u_j = u_j^0 + \tilde{u}_j, j = 1, 2$ , определяют общее решение.

Если рассмотреть в качестве примера синфазную моду  $v_1 = v_2 = v$ , то уравнение поперечных смещений примет вид

$$\ddot{v} + Av^3 = 0, \quad \text{где } A = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3},$$

а его первый интеграл — вид

$$\frac{Av^4}{4} + \frac{u^2}{2} = C,$$

где постоянная  $C$  определяется начальными условиями, так что можно записать

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2C - \frac{Av^4}{2}},$$

$$t = \int \frac{dv}{\sqrt{2C - \frac{Av^4}{2}}},$$

или  $v = cn(\sigma t, 1/\sqrt{2})$ ,  $\sigma = \sqrt{A}$ . Тогда полное решение уравнений для продольных смещений можно записать следующим образом:

$$u_2 = C_1 \cos\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon} + \varphi_1\right) + C_3 \cos\left(\frac{\tau_1\sqrt{3}}{\varepsilon} + \varphi_3\right) + \frac{v^2}{6},$$

$$u_1 = C_1 \cos\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon} + \varphi_1\right) - C_3 \cos\left(\frac{\tau_1\sqrt{3}}{\varepsilon} + \varphi_3\right) - \frac{v^2}{6}. \quad (7.5)$$

Произвольные постоянные  $C_i$  определяются начальными условиями.

Итак, продольные смещения содержат две составляющие — быстрые колебания (частота  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ ) и медленные колебания (частоты которых — обертоны поперечных осцилляций). Именно быстрые продольные колебания обеспечивают формирование нелокального потенциала при описании поперечного движения в медленном времени.

Численное интегрирование полной системы уравнений движения (2.8) показывает, что сделанные нами предположения были обоснованы и не повлияли существенно на решение системы (рис. 8).

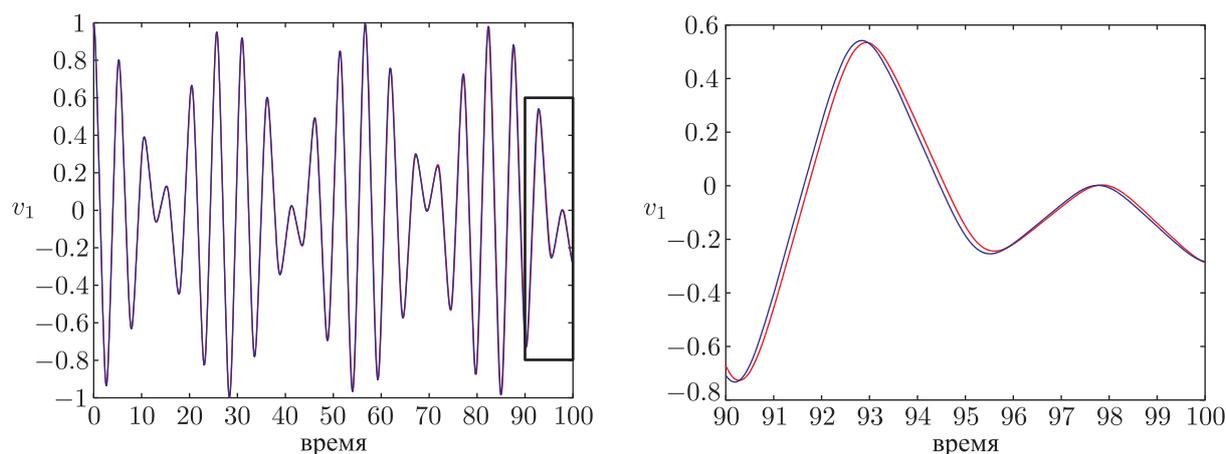


Рис. 8. Сравнение численных решений полной и асимптотической системы (правый рисунок — увеличенный фрагмент графика).

## 8. Сечения Пуанкаре

Сечения Пуанкаре при интегрировании системы (2.6) строились следующим образом: рассматривались случайно распределенные начальные значения, соответствующие одному и тому же значению энергии, а именно, начальные значения были распределены случайно на отрезке  $[-2; 2]$  и затем масштабированы так, чтобы величина гамильтониана была равна 10. Каждая из полученных четырехмерных траекторий пересекает гиперплоскость  $v_2 = 0$ , что определяет множество трехмерных точек  $(v_1, \dot{v}_1, \dot{v}_2)$ . Это множество отображается на плоскость  $(v_1, \dot{v}_1)$ . Черными линиями на сечениях изображены проекции траекторий с начальными условиями, соответствующими ПФТ, то есть случаю, когда первоначально возбужден только один осциллятор.

Поскольку система (2.6) (как и исходная система (2.1)) не является интегрируемой, естественно ожидать появления областей стохастичности наряду с регулярными движениями. Однако роль этих областей существенным образом зависит от значения параметра  $\mu$ . При достаточно больших значениях этого параметра (вдали от обоих динамических переходов) области стохастичности практически не видны (рис. 9). На плоскости есть две стационарные точки, которые соответствуют нелинейным нормальным модам системы (2.6) и стационарным точкам соответствующей системы (5.5) в переменных  $\theta - \Delta$ . Таким образом, в этом случае асимптотический анализ полностью отражает поведение неинтегрируемой системы. После достижения первого перехода (рис. 10) появляется слабовыраженный стохастический слой с набором вторичных устойчивых точек. Наконец, после второго перехода (рис. 11) область стохастичности становится существенной. Линии, соответствующие ПФТ, разграничивают области регулярной и хаотической динамики. Таким образом, эволюция регулярных (стационарных и нестационарных) режимов, исследуемая аналитически в данной статье в рамках асимптотического анализа уравнений движения, отчетливо видна и при численном интегрировании системы в исходных переменных  $v_1$  и  $v_2$  (см. систему (2.6)). Это позволяет судить о надежности асимптотических методов для задач такого типа.

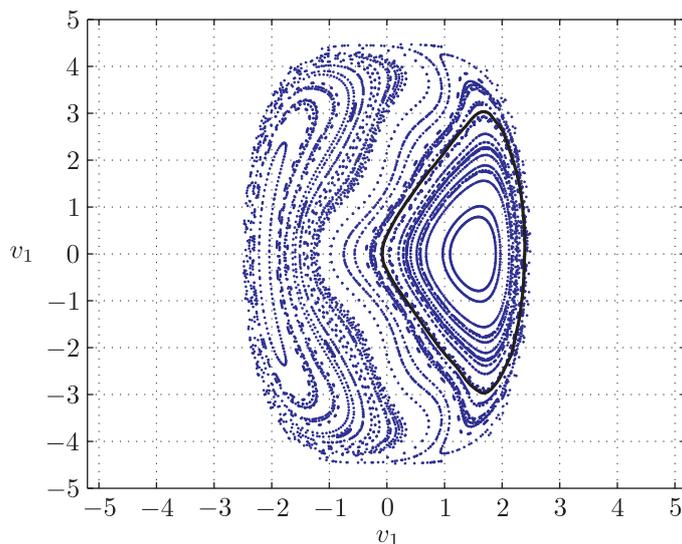
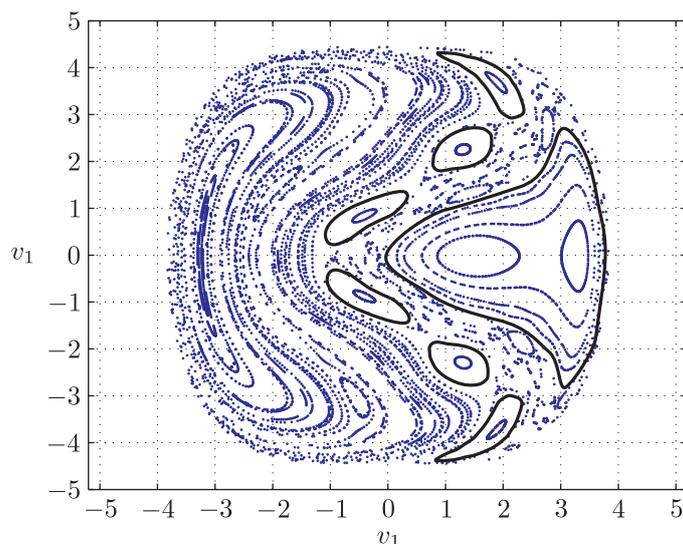
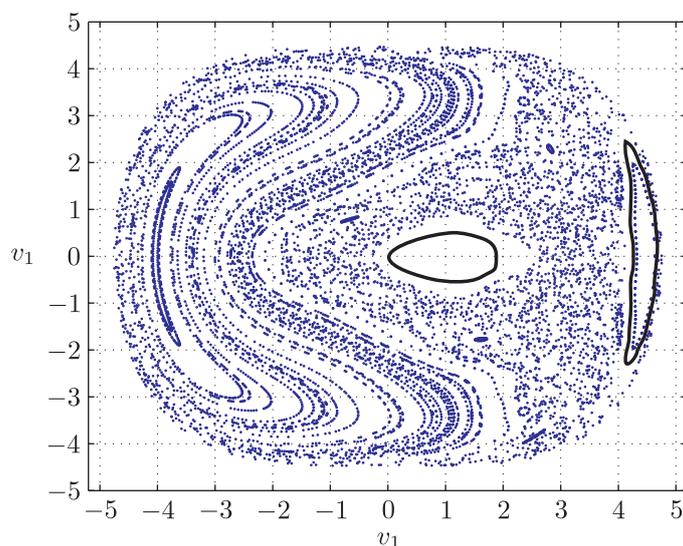


Рис. 9. Сечение Пуанкаре для  $\mu = 1.6$ .

Рис. 10. Сечение Пуанкаре для  $\mu = 0.8$ .Рис. 11. Сечение Пуанкаре для  $\mu = 0.5$ .

## 9. Заключение

Наличие упругой подложки приводит к качественным изменениям в нелинейной динамике струны с дискретно распределенными массами (при отсутствии предварительного натяжения). Эти изменения относятся как к стационарной динамике (появление бифуркаций и неустойчивости нелинейных нормальных мод), так и к нестационарному поведению (возможность полного энергообмена и перехода к локализации энергии) в низкоэнергетической области. В то же время в этой области существенно возрастает проявление стохастических эффектов, которые, тем не менее, не искажают качественно и количественно выявленную трансформацию регулярных движений. При этом адекватное аналитическое описание нестационарной резонансной динамики достигается в терминах предельных фазо-

вых траекторий (ПФТ) (в отличие от стационарной динамики, описываемой нелинейными нормальными модами).

## Список литературы

- [1] Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Proc. of the 8th Conf. «Dynamical Systems: Theory and Applications» (Poland, 2005) / J. Awrejcewicz, D. Sendkowski, and J. Mrozowski (Eds.), Łódź: Politechnika Łódzka, 2005, vol. 1, pp. 119–136.
- [2] Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Arch. Appl. Mech., 2007, vol. 77, no. 5, pp. 301–312.
- [3] Manevitch L. I., Kovaleva A. S., Manevitch E. L. Limiting phase trajectories and resonance energy transfer in a system of two coupled oscillators // Math. Probl. Eng., 2010, Art. ID 760479, 24 pp.
- [4] Manevitch L. I., Kovaleva A. S., Shepelev D. S. Non-smooth approximations of the limiting phase trajectories for the Duffing oscillator near 1 : 1 resonance // Phys. D, 2011, vol. 240, no. 1, pp. 1–12.
- [5] Manevitch L. I., Gendelman O. V. Tractable models of solid mechanics: Formulation, analysis and interpretation. (Foundations of Engineering Mechanics.) Heidelberg: Springer, 2011. 302 pp.
- [6] Vakakis A. F., Manevitch L. I., Gendelman O., Bergman L. Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments // J. Sound Vibration, 2003, vol. 264, no. 3, pp. 559–577.
- [7] Manevitch L. I., Sigalov G., Romeo F., Bergman L. A., Vakakis A. Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment: Analytical study // Trans. ASME J. Appl. Mech., 2014, vol. 81, no. 4, 041011, 9 pp.
- [8] Manevitch L. I., Smirnov V. V. Limiting phase trajectories and the origin of energy localization in nonlinear oscillatory chains // Phys. Rev. E (3), 2010, vol. 82, no. 3, 036602, 9 pp.
- [9] Manevitch L. I., Vakakis A. Nonlinear oscillatory acoustic vacuum // SIAM J. Appl. Math., 2014 (принято к печати).
- [10] Pilipchuk V. N. Nonlinear dynamics: Between linear and impact limits. (Lect. Notes Appl. Comput. Mech., vol. 52.) Berlin: Springer, 2011. 360 pp.
- [11] Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M., Kerschen G., Lee Y. S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. (Solid Mech. Appl., vol. 156.) Dordrecht: Springer, 2009. 1032 pp.

## Weakly coupled oscillators in the presence of elastic support in the conditions of acoustic vacuum

Irina P. Kikot<sup>1</sup>, Leonid I. Manevich<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences  
Kosygina st. 4, Moscow, 117977, Russia

<sup>1</sup>irakikotx@gmail.com, <sup>2</sup>manevitchleonid3@gmail.com

A weightless string without preliminary tension with two symmetric discrete masses, which are influenced by elastic supports with cubic characteristics, is investigated both by numerical and analytical methods. The most important limit case corresponding to domination of resonance low-energy transversal oscillations is considered. Since such oscillations are described by approximate equations only with cubic terms (without linear ones), the transversal dynamics occurs in the conditions of acoustic vacuum. If there is no elastic supports nonlinear normal modes of the system under investigation coincide with (or are close to) those of corresponding linear oscillator system. However within the presence of elastic supports one of NNM can be unstable, that causes formation of two another asymmetric modes and a separatrix which divides them. Such



dynamical transition which is observed under certain relation between elastic constants of the string and of the support, relates to stationary resonance dynamics. This transition determines also a possibility of the second dynamical transition which occurs when the supports contribution grows. It relates already to non-stationary resonance dynamics when the modal approach turns out to be inadequate. Effective description of both dynamical transitions can be attained in terms of weakly interacting oscillators and limiting phase trajectories, corresponding to complete energy exchange between the oscillators.

MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

Keywords: string with discrete masses, elastic support, nonlinear dynamics, asymptotical method, complete energy exchange, limiting phase trajectory, energy localization

Received June 23, 2014, accepted September 11, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 245–263 (Russian)