



УДК: 517.9+534

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

## Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов СТОЯЧИХ ВОЛН

В. П. Круглов, А. С. Кузнецов, С. П. Кузнецов

Показана возможность реализации аттракторов типа Смейла–Вильямса с разной кратностью растяжения угловой координаты  $n = 3, 5, 7, 9, 11$  у отображений, описывающих эволюцию параметрически возбуждаемых паттернов стоячих волн на нелинейной струне за период модуляции накачки при попеременном возбуждении мод с отношением длин волн  $1 : n$ .

Ключевые слова: параметрические колебания, струна, аттрактор, хаос, показатель Ляпунова

### 1. Введение

Недавно предложен подход к построению систем со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, основанный на попеременном возбуждении в нелинейной среде длинноволновых и коротковолновых паттернов, пространственная фаза которых за характерный

---

Получено 05 сентября 2014 года

После доработки 18 сентября 2014 года

---

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-02-31162 (В. П. К. и А. С. К.).

---

Круглов Вячеслав Павлович  
[kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com)

Кузнецов Сергей Петрович  
[spkuz@rambler.ru](mailto:spkuz@rambler.ru)

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кузнецов Алексей Сергеевич  
[alek.art@mail.ru](mailto:alek.art@mail.ru)

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

временной период изменяется в соответствии с растягивающим отображением окружности. Этот подход был реализован для систем, сконструированных на основе модификации уравнения типа Свифта–Хоенберга [1, 2], а также для параметрически возбуждаемых стоячих волн на нелинейной струне [3, 4]. Было показано, что в этих системах реализуются аттракторы типа соленоида Смейла–Вильямса.

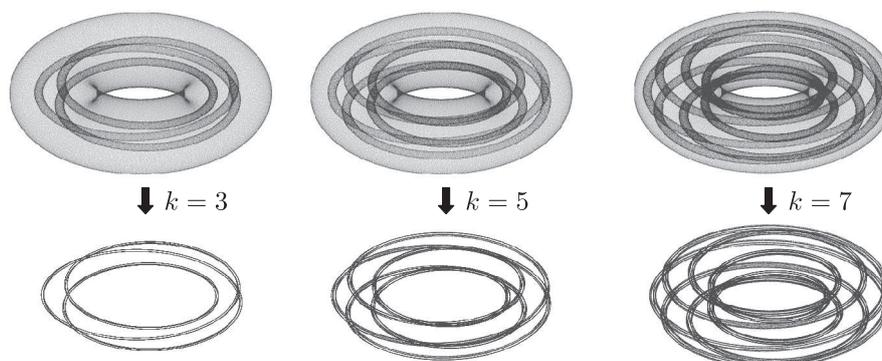


Рис. 1. Преобразование области в форме тора за один шаг эволюции в дискретном времени (вверху) и предельный объект-аттрактор в виде соленоида (внизу) при кратности растяжения по угловой координате  $k = 3, 5$  и  $7$ .

Наиболее распространенный в литературе и учебных курсах вариант построения соленоида Смейла–Вильямса заключается в том, что в трехмерном пространстве рассматривается область в виде тора, которая за один шаг эволюции претерпевает продольное растяжение, поперечное сжатие и складывание двойной петлей, оказываясь расположенной внутри исходного тора. С увеличением числа шагов количество витков трансформируемого объекта стремится к бесконечности, и возникает аттрактор-соленоид, имеющий в поперечном направлении структуру типа канторова множества. Такие аттракторы могут иметь место также и в пространстве размерности выше трех.

Очевидное обобщение конструкции состоит в том, что растяжение вдоль витков можно производить не в два, а в большее число раз (рис. 1). В частности, в работах [1, 3, 4] речь идет о трехкратном растяжении, причем роль угловой координаты, отсчитываемой вдоль витков соленоида, вложенного в бесконечномерное фазовое пространство, играет пространственная фаза паттернов, возбуждающихся на последовательных этапах эволюции нелинейной среды. В настоящей работе будут рассмотрены варианты систем с параметрическим возбуждением стоячих волн, отличающиеся разной кратностью растяжения вдоль витков аттрактора Смейла–Вильямса на одном шаге его построения.

## 2. Модельное уравнение и механизм функционирования системы

Уравнение в частных производных, описывающее распространение волн в одномерной среде в линейном приближении, имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

и может использоваться во многих физических ситуациях, одна из которых относится к механическим колебаниям струны. В этом случае переменная  $y(x, t)$  отвечает поперечному смещению струны в точке с координатой  $x$  в момент  $t$ ,  $\rho$  — линейная плотность струны (масса на единицу длины),  $G$  — сила продольного натяжения струны. Для однородной струны при постоянном натяжении величина  $c = \sqrt{G/\rho}$  определяет скорость распространения волн.

В классическом опыте Мельде [5, 6] при периодическом изменении во времени силы натяжения струны с частотой  $2\omega_0$ , где  $\omega_0$  отвечает одной из мод, возбуждаются параметрические колебания на этой моде (рис. 2). Начальная стадия параметрического возбуждения (пока колебания можно полагать линейными) описывается уравнением вида (2.1), где коэффициент  $G$  является функцией времени (скажем,  $G = T_0(1 + a \sin 2\omega_0 t)$ ,  $0 < a = \text{const} < 1$ ). Колебания силы натяжения выступают в качестве накачки — источника энергии, поддерживающего параметрические колебания.

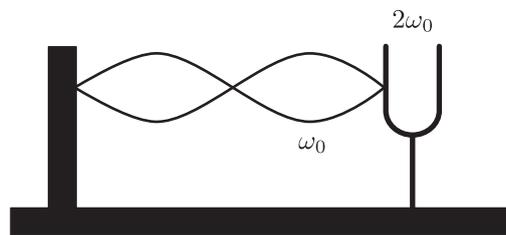


Рис. 2. Опыт Мельде (1859 год): колебания камертона на частоте  $2\omega_0$  вызывают периодическое изменение силы натяжения струны, благодаря чему происходит возбуждение параметрических колебаний на частоте  $\omega_0$ .

Пусть в уравнении (2.1) сила натяжения колеблется по закону

$$G(t) = T_0 \cdot [1 + A(t) \sin 2\omega_0 t + B(t) \sin 2n\omega_0 t], \tag{2.2}$$

где коэффициенты  $A, B$  изменяются во времени с некоторым периодом  $T$ , поочередно оказываясь по величине большими или малыми, близкими к нулю. Конкретно, мы задаем

$$A(t) = a \cos^2(\pi t/T), \quad B(t) = b \sin^2(\pi t/T), \tag{2.3}$$

где неотрицательные постоянные величины  $a, b$  подчинены условию  $a + b < 1$ .

Распределение массы по струне будем считать слабонеоднородным, зависящим от пространственной координаты по закону

$$\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon \sin mk_0 x), \tag{2.4}$$

где  $k_0 = \omega_0/c_0$ ,  $c_0 = \sqrt{T_0/\rho_0}$  и  $m$  — некоторое целое число.

Кроме того, добавим в правую часть уравнения член вида  $-(\alpha + \beta u^2)\partial y/\partial t$ , где параметр  $\alpha$  отвечает за линейную, а  $\beta$  — за нелинейную диссипацию при колебаниях струны. Присутствие нелинейной диссипации необходимо для стабилизации параметрической неустойчивости на некотором уровне амплитуды колебаний, однако для рассматриваемой здесь системы весьма существенным является еще и то обстоятельство, что кубическая нелинейность обеспечивает возникновение третьей и других нечетных гармоник при колебательно-волновых движениях.

Используя нормировку переменных и параметров, такую, что  $c_0 = 1$ ,  $k_0 = \omega_0$ ,  $\beta = 1$ , приходим к системе, описываемой уравнением в частных производных следующего вида:

$$(1 + \varepsilon \sin mk_0x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(\alpha + y^2) \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma y + \left\{ 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2n\omega_0 t \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Будем считать наложенными граничные условия периодичности:

$$y(x + L, t) \equiv y(x, t); \quad (2.6)$$

длину  $L$  примем равной целому числу длин волн с волновым числом  $k_0$ :  $L = 2\pi N/k_0$ . Добавление в уравнение линейного члена вида  $-\gamma y$  в системе с периодическими граничными условиями обеспечивает затухание колебательно-волновых возмущений с нулевым волновым числом.

Механизм функционирования системы состоит в следующем.

Предположим, что при накачке на частоте  $2\omega_0$  в системе возбуждена стоячая волна на частоте  $\omega_0$  с волновым числом  $k_0$ , у которой расположение узлов и пучностей характеризуется фазовой постоянной  $\theta$ , так что в грубом приближении

$$y \sim \cos \omega_0 t \sin(k_0 x + \theta). \quad (2.7)$$

Амплитуда волны стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейной диссипации, и из-за ее присутствия колебательно-волновое движение будет иметь также составляющие на третьей, пятой, седьмой и других нечетных гармониках. Пространственная фаза гармоники на частоте  $n\omega_0$  будет, очевидно, даваться величиной  $n\theta$ , где  $n$  — нечетное число.

На следующем этапе временной эволюции амплитуда накачки на частоте  $2\omega_0$  становится малой, и колебания на частоте  $\omega_0$  затухают. Амплитуда накачки на частоте  $2n\omega_0$ , с другой стороны, с какого-то момента оказывается достаточной для развития параметрической неустойчивости стоячей волны с частотой  $n\omega_0$  и волновым числом  $nk_0$ . Эта волна формируется из начального возмущения, отвечающего  $n$ -й гармонике волны, существовавшей на предыдущей стадии, так что пространственная фаза будет определяться величиной  $n\theta$ .

Затем вновь возникает ситуация, когда интенсивная накачка имеет место на частоте  $2\omega_0$ . Затравочное колебательно-волновое возбуждение с волновым числом  $k_0$  обеспечивается теперь благодаря комбинации возмущения  $y \sim \sin(nk_0x + n\theta)$ , оставшегося от предыдущей стадии процесса, и пространственно-периодического возмущения, обусловленного неоднородным распределением массы  $\rho(x)$  и пропорционального  $\varepsilon \sin mk_0x$ .

Чтобы присутствовала составляющая, находящаяся в пространственном резонансе с параметрически возбуждаемой модой с волновым числом  $k_0$ , величину  $m$  нужно выбрать на единицу больше или меньше, чем  $n$ . В самом деле, из тригонометрического тождества

$$\sin mk_0x \sin(nk_0x + n\theta) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)k_0x - n\theta) - \cos((m+n)k_0x + n\theta)] \quad (2.8)$$

видно, что при  $m = n+1$  резонансным является первый член в правой части (2.8), которому отвечает волновое число  $k_0$ . Поэтому новая величина пространственного фазового сдвига  $\theta'$  получается как результат применения  $n$ -кратно растягивающего отображения окружности

вида  $\theta' = -n\theta + \text{const}$ . Если же  $m = n - 1$ , то резонансным является второй член, и отображение имеет вид  $\theta' = n\theta + \text{const}$ .<sup>1</sup>

Знак минус в отображении соответствует случаю, когда направление обхода вокруг витков соленоида инвертируется на каждом шаге построения, а знак плюс — случаю, когда направления совпадают. И в том, и в другом случае для превышающих единицу чисел  $n$  (рассматриваться будут только нечетные  $n$ ) это отображение с хаотической динамикой, характеризуемое положительным показателем Ляпунова  $\Lambda = \ln n$ .

При наличии сжатия в фазовом пространстве по остальным направлениям, для отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции накачки, на этом основании можно предположить присутствие аттрактора типа соленоида Смейла – Вильямса.

### 3. Численные результаты

Для численного решения уравнения (2.5) используем схему «крест», имеющую второй порядок аппроксимации по пространственному и временному шагу и являющуюся явной [7]. Решение находится в узлах сетки с шагом по координате  $h$  и по времени  $\tau$ . Аппроксимируя производные разностными соотношениями, на основании (2.5) запишем

$$\begin{aligned}
 [1 + \varepsilon \sin(mk_0ih)] \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = & - \left[ \alpha + (y_i^j)^2 \right] \frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} + \\
 + [1 + A(j\tau) \sin(2\omega_0j\tau) + B(j\tau) \sin(2n\omega_0j\tau)] \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - & \gamma y_i^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Нижний индекс  $i$  нумерует узлы сетки по пространственной координате, а верхний индекс  $j$  — по времени. Решение можно искать слой за слоем по времени, сохраняя в памяти компьютера на каждом этапе значения переменной, относящиеся к двум предыдущим слоям.<sup>2</sup>

В работах [3, 4] было принято  $n = 3$ ,  $m = 4$  и показано, что пространственная фаза попеременно возбуждающихся длинноволновых и коротковолновых паттернов стоячих волн за период модуляции накачки подчиняется троекратно растягивающему отображению окружности с обратным направлением обхода для фазы-образа. При другом выборе  $n$  и  $m$  оказывается возможным обеспечить иную кратность растяжения, как с прямым, так и с обратным направлением обхода (см. таблицу 1).

Таблица 1

$n$ (кратность растяжения)	3	5	5	7	7	9	9	11	11
$m$	4	4	6	6	8	8	10	10	12
прямой обход (П)/ обратный обход (О)	О	П	О	П	О	П	О	П	О

<sup>1</sup>Присутствующую в этих соотношениях константу можно устранить выбором начала отсчета фазы.

<sup>2</sup>Известно, что для однородной струны при постоянном натяжении условием вычислительной устойчивости схемы служит соотношение  $c_0^2(\tau/h)^2 < 1$ ; можно полагать, что для нашей задачи схема будет устойчива, когда  $\tau^2 h^{-2} [1 + A(j\tau) \sin(2\omega_0j\tau) + B(j\tau) \sin(2n\omega_0j\tau)] < 1$  для всех  $j$ . Это предположение вполне согласуется с результатами расчетов.



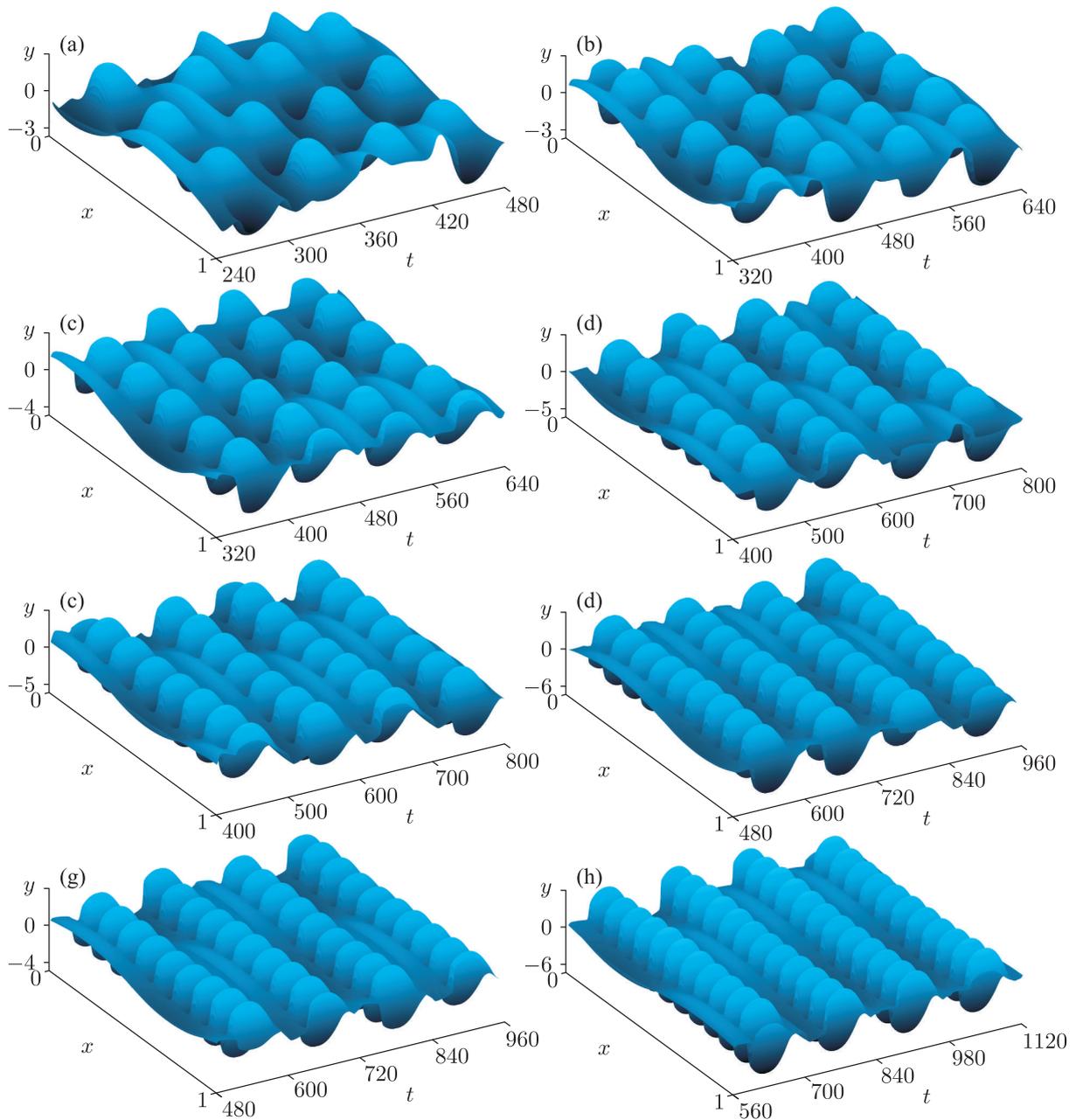


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие параметрические колебания системы (2.5) с периодическими граничными условиями при различных  $m$  и  $n$  при задании параметров согласно (3.2) на четырех полных периодах модуляции накачки.

При численном решении уравнений были заданы следующие параметры:

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= 2\pi, & k_0 &= 2\pi, & L &= 1, \\
 a &= 0.4, & b &= 0.2, & \varepsilon &= 0.2, & \alpha &= 0.4, & \gamma &= 0.03, \\
 T &= 60 (n = 3), & T &= 80 (n = 5), & T &= 100 (n = 7), & T &= 120 (n = 9), & T &= 140 (n = 11).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

При численном моделировании в системе наблюдается поочередное возбуждение длинноволновых и коротковолновых структур, пространственная фаза которых от одного периода модуляции к другому претерпевает растягивающее отображение кратности  $n$ .

На рисунке 3 представлены пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие процесс функционирования системы для разных величин  $n$  и  $m$ . Форма струны показана в моменты времени, кратные периоду быстрых колебаний, что делает наглядным визуальное представление эволюции огибающей паттернов стоячих волн. Как можно видеть, в системе поочередно возбуждаются длинноволновые и коротковолновые структуры, притом пространственная фаза их меняется от одного периода модуляции накачки к другому. Фаза колебаний стоячих волн во времени, с другой стороны, жестко привязана к фазе накачки.

В численных расчетах можно проверить, что пространственная фаза стоячих волн за период модуляции накачки действительно претерпевает  $n$ -кратно растягивающее отображение окружности. Для построения итерационных диаграмм выполняем решение уравнения (2.5) на большом числе периодов модуляции и в моменты времени  $t = t_n = nT$  вычисляем пространственные фазы

$$\theta_n = \arg[y(0, t) + iy_x(0, t)/k_0] \tag{3.3}$$

с представлением результатов в координатах  $(\theta_n, \theta_{n+1})$  (рис. 4).

Вид графиков соответствует растягивающим отображениям окружности с числом ветвей  $n$ , что согласуется с описанным выше механизмом. В самом деле, расположение ветвей таково, что однократный обход окружности для прообраза, то есть изменение аргумента на  $2\pi$ , соответствует  $n$ -кратному обходу для образа (в прямом или обратном направлении в соответствии с таблицей 1), с изменением фазы на величину  $\pm 2\pi n$ .

На рисунке 5 показаны портреты аттракторов в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость двух переменных — смещения струны в некоторой точке и пространственной производной в этой точке. Поперечная фрактальная структура не различима из-за сильного поперечного сжатия, и аттрактор, хотя и представляет собой соленоид, визуально выглядит просто как замкнутая кривая. Расположение изображающих точек на последовательных шагах итераций отображения Пуанкаре описывается отображением окружности с трехкратным и семикратным растяжением (соответственно, для левой и правой картинки: см. диаграммы (а) и (д) на рис. 4).

Для вычисления показателей Ляпунова используем метод Бенеттина [8–10], адаптированный к рассматриваемой распределенной системе. Его содержание состоит в следующем. Наряду с уравнением (2.5) одновременно решаем численно комплект уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon \sin mk_0 x) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = -(\alpha + y^2) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - 2y\tilde{y} \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma \tilde{y} + \\ + \left\{ 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2n\omega_0 t \right\} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

в количестве, равном числу показателей  $S$ , которое требуется найти. При этом используются такие же периодические граничные условия, как для уравнения (2.5), и тот же конечно-разностный метод. По истечении каждого очередного периода модуляции  $T$  производится ортогонализация векторов возмущения  $\mathbf{y}_s$ ,  $s = 1, \dots, S$ , по схеме Грама – Шмидта, что дает набор векторов  $\mathbf{y}'_s$ . После этого для дальнейшего интегрирования уравнений за исходные берутся переопределенные нормированные на единицу векторы возмущения  $\mathbf{y}^0_s = \mathbf{y}'_s / \|\mathbf{y}'_s\|$ .



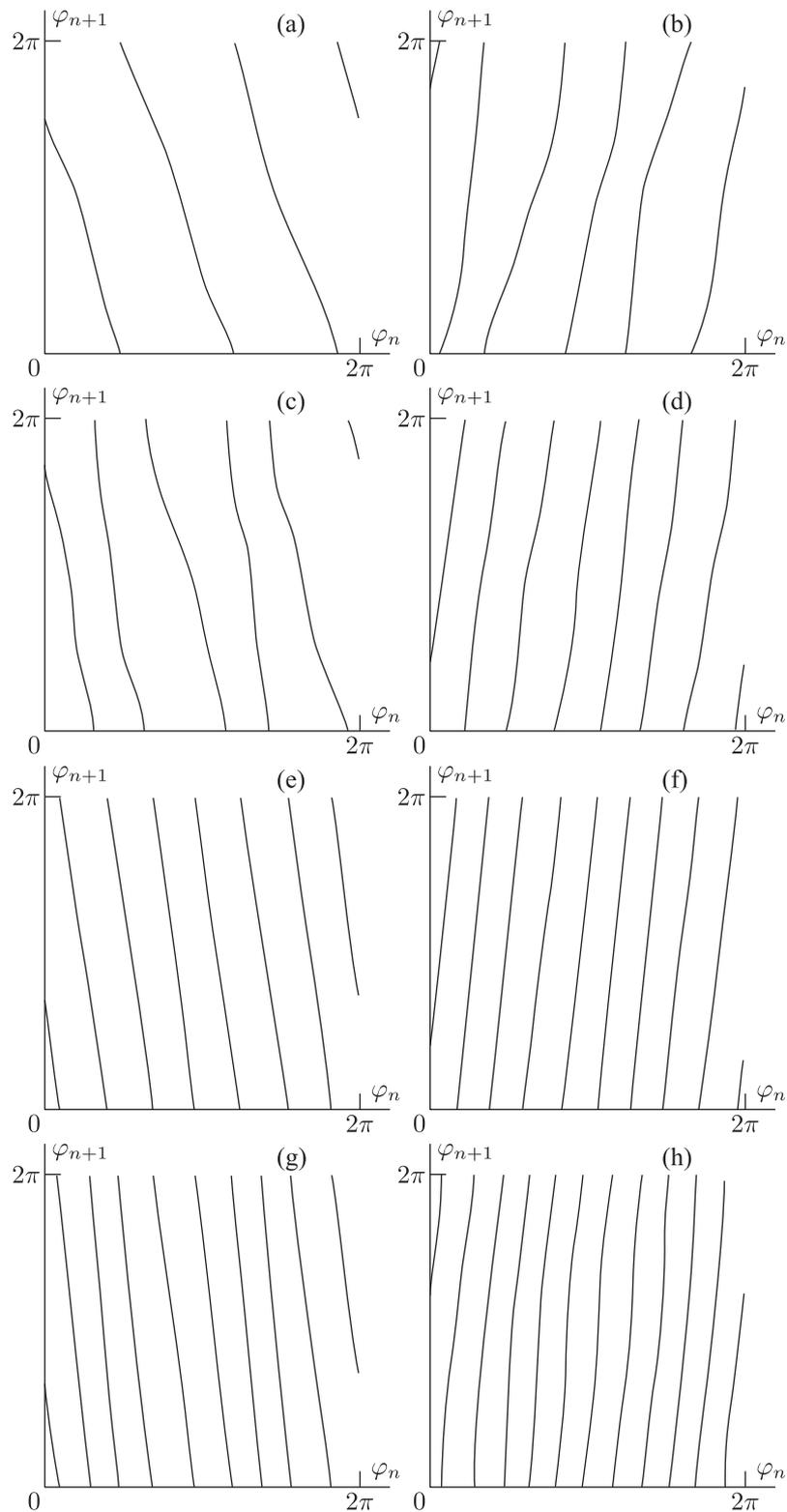


Рис. 4. Диаграммы для пространственных фаз при задании параметров в системе (2.5) согласно (3.2): (a)  $n = 3, m = 4$ , (b)  $n = 5, m = 4$ , (c)  $n = 5, m = 6$ , (d)  $n = 7, m = 6$ , (e)  $n = 7, m = 8$ , (f)  $n = 9, m = 8$ , (g)  $n = 9, m = 10$ , (h)  $n = 11, m = 10$ .

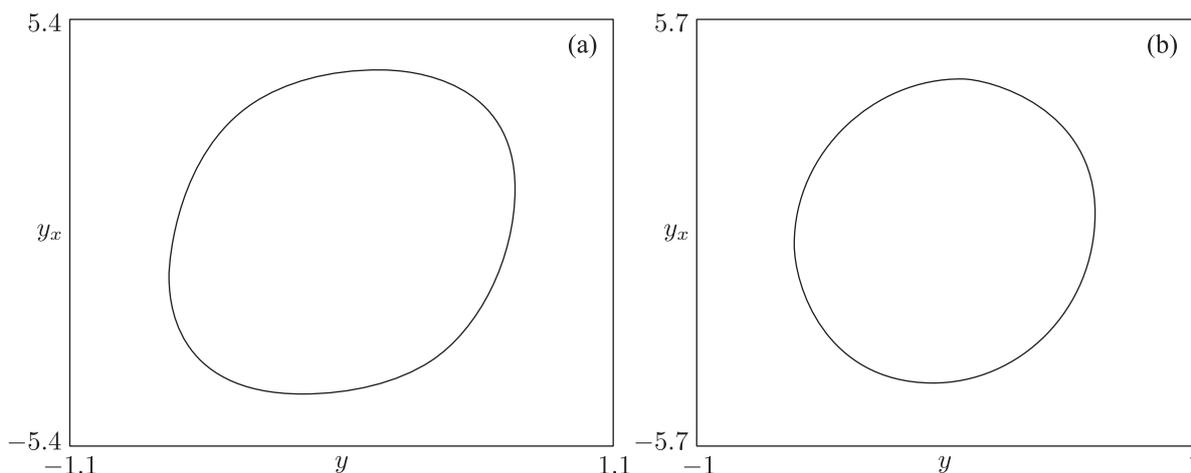


Рис. 5. Портреты аттракторов в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость, где по осям отложены поперечное смещение и пространственная производная в фиксированной точке струны для  $m = 3, n = 4$  (a),  $m = 7, n = 6$  (b). Остальные параметры заданы согласно (3.2).

Тогда показатели Ляпунова, определенные для отображения за период, получаются из соотношений

$$\Lambda_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum \ln |y'_s|, \tag{3.5}$$

где  $N$  — полное число периодов, на протяжении которых проводится вычисление.

В таблице 2 приводятся первые три показателя Ляпунова, рассчитанные для систем с разными значениями  $m$  и  $n$  при задании параметров согласно (3.2). Наибольший показатель, как и ожидалось, во всех рассмотренных случаях близок к величине  $\ln n$ . Остальные показатели отрицательные. Они отвечают за приближение траекторий к аттрактору, представляющему собой разновидность соленоида Смейла – Вильямса, который получается при трансформации исходной тороидальной области во вложенную  $n$ -кратную петлю, претерпевающую продольное растяжение и достаточно сильное сжатие в направлении поперек витков.

Таблица 2

	$\ln n$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$
$n = 3, m = 4, T = 60$	1.0986	1.085	-2.028	-18.9
$n = 5, m = 4, T = 80$	1.6094	1.515	-2.150	-31.9
$n = 5, m = 6, T = 80$		1.603	-2.242	-32.1
$n = 7, m = 6, T = 100$	1.9459	1.927	-3.273	-30.6
$n = 7, m = 8, T = 100$		1.942	-3.223	-32.1
$n = 9, m = 8, T = 120$	2.1972	2.194	-3.529	-31.0
$n = 9, m = 10, T = 120$		2.185	-3.518	-30.9
$n = 11, m = 10, T = 140$	2.3979	2.338	-5.669	-28.5
$n = 11, m = 12, T = 140$		2.394	-5.707	-27.9

#### 4. Конечномерная модель и проверка гиперболичности

Для уравнений (2.5) в случае  $n = 3$ ,  $m = 4$ , когда реализуется трехкратное растяжение для угловой переменной, в работе [11] показано, как можно с использованием разложения по модам свести динамику к конечномерному описанию в рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений. (Аналогичным образом можно получить конечномерное описание и для вариантов с большими коэффициентами растяжения угловой переменной, то есть для  $n = 5, 7, 9, 11$ , но в этом случае надо учитывать гармоники разложения в пространственный ряд Фурье с номерами до  $n$  включительно, и система уравнений получается очень громоздкой.)

Поскольку для случая  $n = 3$ ,  $m = 4$  параметрическое возбуждение имеет место на волновых числах  $k_0$  и  $3k_0$ , естественно искать решение уравнения (2.5) в виде

$$y(x, t) = u_1(t) \cos k_0 x + v_1(t) \sin k_0 x + u_3(t) \cos 3k_0 x + v_3(t) \sin 3k_0 x. \quad (4.1)$$

Подстановка этого выражения в (2.5) и разложение обеих частей уравнения в ряд Фурье с учетом гармоник того же порядка приводят к системе уравнений для коэффициентов

$$\ddot{u}_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\ddot{v}_3 = f_1, \quad \ddot{u}_3 + \frac{1}{2}\varepsilon\ddot{v}_1 = f_3, \quad \ddot{v}_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\ddot{u}_3 = g_1, \quad \ddot{v}_3 + \frac{1}{2}\varepsilon\ddot{u}_1 = g_3, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -\omega_0^2 \left( 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) u_1 - \gamma u_1 - \alpha \dot{u}_1 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{2} u_1^2 + u_1 u_3 + u_3^2 + \frac{1}{2} v_1^2 + v_1 v_3 + v_3^2 \right) \dot{u}_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + 4u_1 u_3 - v_1^2) \dot{u}_3 + \right. \\ &\quad \left. + (u_1 v_1 - u_3 v_1 + u_1 v_3) \dot{v}_1 + (u_1 v_1 + 2u_1 v_3) \dot{v}_3 \right], \\ g_1 &= -\omega_0^2 \left( 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) v_1 - \gamma v_1 - \\ &\quad - \alpha \dot{v}_1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{2} v_1^2 - v_1 v_3 + v_3^2 + \frac{1}{2} u_1^2 - u_1 u_3 + u_3^2 \right) \dot{v}_1 + \frac{1}{2} (u_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_3 + \right. \\ &\quad \left. + (u_1 v_1 - u_3 v_1 + u_1 v_3) \dot{u}_1 + (-u_1 v_1 + 2u_3 v_1) \dot{u}_3 \right], \\ f_3 &= -9\omega_0^2 \left( 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) u_3 - \gamma u_3 - \alpha \dot{u}_3 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ (u_1^2 + 4u_1 u_3 - v_1^2) \dot{u}_1 + 2(-u_1 v_1 + 2u_3 v_1) \dot{v}_1 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + 3u_3^2 + v_3^2) \dot{u}_3 + 2u_3 v_3 \dot{v}_3 \right], \\ g_3 &= -9\omega_0^2 \left( 1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) v_3 - \gamma v_3 - \alpha \dot{v}_3 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ 2(u_1 v_1 + 2u_1 v_3) \dot{u}_1 + (u_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_1 + 2u_3 v_3 \dot{u}_3 + (2u_1^2 + 2v_1^2 + u_3^2 + 3v_3^2) \dot{v}_3 \right]. \end{aligned}$$

Уравнения можно переписать, выразив вторые производные явно:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= \frac{f_1 - \frac{1}{2}\varepsilon g_3}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}, \quad \ddot{u}_3 = \frac{f_3 - \frac{1}{2}\varepsilon g_1}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}, \\ \ddot{v}_1 &= \frac{g_1 - \frac{1}{2}\varepsilon f_3}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}, \quad \ddot{v}_3 = \frac{g_3 - \frac{1}{2}\varepsilon f_1}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Согласно [11], результаты расчетов с использованием конечномерной модели находятся в хорошем соответствии с теми, что получаются при численном решении уравнения в частных производных (2.5) в случае  $n = 3$ ,  $m = 4$  [3, 4]. Этим можно воспользоваться для проверки гиперболичности аттрактора с помощью известного из литературы метода.



Идея тестирования гиперболичности на основе «критерия углов» была выдвинута в работах [12] и [13], а в наиболее простой и удобной для проведения вычислений форме методика представлена в работе [14]. При наличии одного неустойчивого направления (один положительный показатель Ляпунова) она состоит в следующем.

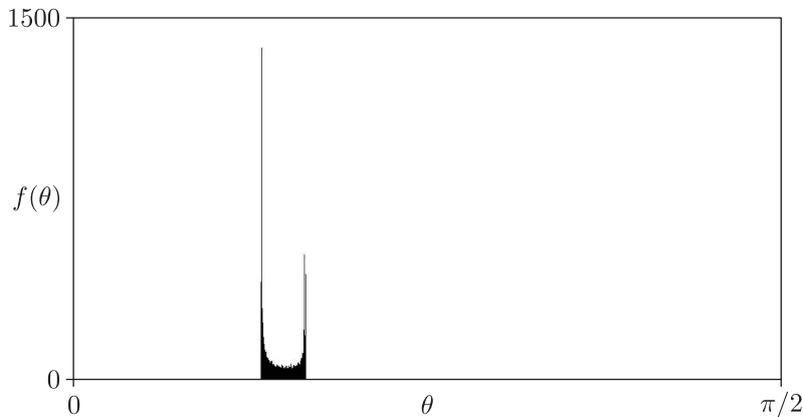


Рис. 6. Гистограмма распределения углов пересечения локальных устойчивых и неустойчивых многообразий на аттракторе, полученная обработкой данных численного решения применительно к отображению Пуанкаре системы уравнений (4.3) по методике, описанной в тексте. Параметры  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $T = 60$ . Отсутствие углов, близких к нулю, подтверждает гиперболичность аттрактора.

Сначала на достаточно большом временном интервале проводится решение системы уравнений (4.3), которую формально запишем в виде  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , где  $\mathbf{x}$  — восьмимерный вектор, а функция  $\mathbf{F}$  определяется видом правых частей уравнений. Затем линейризованное уравнение для вектора возмущения  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)\tilde{\mathbf{x}}$  интегрируется вдоль найденной траектории  $\mathbf{x}(t)$  с нормировкой на единицу вектора  $\tilde{\mathbf{x}}$  на каждом шаге  $n$  отображения Пуанкаре. В результате получаем набор единичных векторов  $\{\tilde{\mathbf{x}}_n\}$ . Далее, в соответствии с идеей работы [14], вдоль той же самой опорной траектории проводится интегрирование в обратном времени линейного уравнения  $\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}(t), t)]^T \mathbf{u}$ , где верхний индекс  $T$  означает матричное сопряжение. Это дает набор векторов  $\{\mathbf{u}_n\}$ , определяющих ортогональное дополнение к устойчивому подпространству векторов возмущения, которые тоже нормируем на единицу. Теперь для оценки угла  $\alpha$  между одномерным неустойчивым подпространством и устойчивым подпространством (семимерным в нашем случае) можно найти угол  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  и  $\mathbf{u}_n$  при  $n$ -ом прохождении сечения Пуанкаре  $\cos \beta_n = |\mathbf{u}_n(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_n(t)|$  и положить окончательно  $\theta_n = \pi/2 - \beta_n$ .

На основе обработки полученных данных анализируется статистика распределения углов  $\theta$ . Если обнаруживается отличная от нуля вероятность нулевых углов, то это говорит о нарушении гиперболичности из-за присутствия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий. Если же распределение отделено от нуля, то тест подтверждает гиперболичность.

На рисунке 6 показана гистограмма распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами, полученная численно для указанного в пояснении набора значений параметров системы (4.3). Распределение с очевидностью располагается вдали от нулевых значений углов  $\theta$ , то есть гиперболичность аттрактора подтверждается.

## 5. Заключение

Представленное в этой статье исследование расширяет круг параметрически возбуждаемых распределенных систем, демонстрирующих гиперболический хаос, в сравнении с предыдущими работами [3, 4], где были представлены первые модели такого рода. Теперь мы вводим в рассмотрение целое семейство систем с кольцевой геометрией (периодические граничные условия), в которых благодаря периодической модуляции накачки реализуется хаотическая динамика, отвечающая равномерно гиперболическим аттракторам типа соленидов Смейла–Вильямса с разной кратностью растяжения угловой координаты, определяемых нечетными числами  $n = 3, 5, 7, 9, 11$ . Динамика состоит в попеременном рождении и затухании пространственных паттернов с отношением волновых чисел  $1 : n$ . Аттракторы типа Смейла–Вильямса возникают в связи с тем, что пространственные фазы этих паттернов на каждом следующем периоде модуляции накачки трансформируются в соответствии с  $n$ -кратно растягивающим отображением окружности. Для ситуации трехкратного растяжения гиперболичность аттрактора подтверждена результатами компьютерной проверки, показавшей отсутствие касаний для устойчивых и неустойчивых многообразий орбит на аттракторе для редуцированной конечномерной модели.

Как постулируется в теории колебаний, грубость (структурная устойчивость) служит принципиальным основанием для выделения значимых для практики и подлежащих первоочередному теоретическому анализу колебательных систем [15]. Для любых возможных практических приложений хаоса (коммуникация [16], шумовая локация [17], генерация случайных чисел [18]) кажется естественным отдать предпочтение именно генераторам грубого хаоса, нечувствительным к параметрам, деталям изготовления устройств, техническим флуктуациям и шумам. Для построения генераторов грубого хаоса принцип параметрического возбуждения представляется одним из самых перспективных при практической реализации, поскольку подразумевает использование простых нелинейных элементов или сред и открывает широкие возможности для манипуляции частотами и фазами колебательно-волновых составляющих. Поскольку параметрическое возбуждение и усиление колебаний и волн широко известно и применяется в механике [19, 20], акустике [21, 22], радиофизике [23, 24], нелинейной оптике [25], естественно ожидать, что возможность генерации грубого хаоса в параметрических системах с модуляцией накачки будет представлять интерес для этих областей.

## Список литературы

- [1] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns // *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 108, no. 19, 194101, 4 pp.
- [2] Kruglov V. P., Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 483–494.
- [3] Исаева О. Б., Кузнецов А. С., Кузнецов С. П. Гиперболический хаос при параметрических колебаниях струны // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 1, с. 3–10.
- [4] Isaeva O. B., Kuznetsov A. S., Kuznetsov S. P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 4, 040901(R), 4 pp.
- [5] Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Москва: АН СССР, 1955. 511 с.
- [6] Rowland D. R. Parametric resonance and nonlinear string vibrations // *Amer. J. Phys.*, 2004, vol. 72, pp. 758–766.
- [7] Калиткин Н. Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.

- [8] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [9] Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва: Мир, 1988. 250 с.
- [10] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [11] Kuznetsov S. P. Some mechanical systems manifesting robust chaos // *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 3–22.
- [12] Lai Y.-Ch., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–797.
- [13] Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 270, no. 6, pp. 301–307.
- [14] Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 1, 015203(R), 4 pp.
- [15] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва: Наука, 1981. 916 с.
- [16] Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. Москва: Физматлит, 2002. 252 с.
- [17] Lukin K. A. Noise radar technology // *Telecomm. Radio Eng.*, 2001, vol. 55, no. 12, pp. 8–16.
- [18] Drutarovský M., Galajda P. A robust chaos-based true random number generator embedded in reconfigurable switched-capacitor hardware // *Radioengineering*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 120–127.
- [19] Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. Москва: Наука, 1971. 256 с.
- [20] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
- [21] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва: Наука, 1975. 287 с.
- [22] Островский Л. А., Папилова И. А., Сутин А. М. Параметрический генератор ультразвука // *Письма в ЖЭТФ*, 1972, т. 15, № 8, с. 456–458.
- [23] Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. Москва: ИИЛ, 1963. 352 с.
- [24] Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. Москва: Советское радио, 1966. 335 с.
- [25] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Параметрические усилители и генераторы света // *УФН*, 1966, т. 88, № 3, с. 439–460.

## Hyperbolic chaos in systems with parametrically excited patterns of standing waves

Vyacheslav P. Kruglov<sup>1</sup>, Alexey S. Kuznetsov<sup>2</sup>, Sergey P. Kuznetsov<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
Zelenaya 38, Saratov, 410019 Russia

<sup>1,3</sup>Saratov State University  
Astrahanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1</sup>kruglovyacheslav@gmail.com, <sup>2</sup>alek.art@mail.ru, <sup>3</sup>spkuz@rambler.ru

We outline a possibility of implementation of Smale–Williams type attractors with different stretching factors for the angular coordinate, namely,  $n = 3, 5, 7, 9, 11$ , for the maps describing the evolution of parametrically excited standing wave patterns on a nonlinear string over a period of modulation of pump accompanying by alternate excitation of modes with the wavelength ratios of  $1 : n$ .

MSC 2010: 37D20, 37D45, 37L30, 37L45

Keywords: parametric oscillations, string, attractor, chaos, Lyapunov exponent

Received September 05, 2014, accepted September 18, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 265–277 (Russian)

