Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 3. С. 345–354.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.516
MSC 2010: 76D05

Эволюция трехмерной картины возмущений, наложенных на вращательно-осевое течение в цилиндрическом зазоре

Д. В. Георгиевский

Работа посвящена исследованию устойчивости относительно трехмерных возмущений комбинированного вращательно-осевого сдвигового течения ньютоновской вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре. Формулируется соответствующая линеаризованная задача устойчивости с условиями прилипания. На базе метода интегральных соотношений, позволяющего получать достаточные оценки устойчивости и нижние оценки критических чисел Рейнольдса, выводится общая верхняя оценка действительной части спектрального параметра, отвечающей за устойчивость. Эта оценка уточняется для случаев трехмерных осесимметричных и двумерных неосесимметричных возмущений.

Ключевые слова: ньютоновская жидкость, цилиндрический зазор, сдвиговое течение, вращение, метод интегральных соотношений, квадратичный функционал, вариационное неравенство, устойчивость, критическое число Рейнольдса

1. Введение

Вопросы существования и теоретического определения критических чисел и параметров, разделяющих возмущенные режимы поведения деформируемых систем в механике сплошной среды, всегда представляли интерес в теории устойчивости. Поскольку в математическую постановку нелинейной задачи, описывающей невозмущенный, или основной, процесс, не входят понятия возмущений, факт устойчивости либо неустойчивости этого процесса зависит от класса вариаций, выбираемых исследователем, и, следовательно, от постановки задачи в терминах возмущений (как правило, линеаризованной). Учесть все

Получено 21 августа 2014 года
После доработки 24 сентября 2014 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00020а).

Георгиевский Дмитрий Владимирович
georgiev@mech.math.msu.su
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

возможные классы вариаций исходя из их физического содержания, естественно, проблематично, что косвенно указывает на относительность понятия «устойчивость» в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы.

В теории гидродинамической устойчивости к указанным аспектам примыкают проблемы нахождения критических чисел, прежде всего числа Рейнольдса, разделяющих типы течения жидкости, например, ламинарный, переходный, турбулизованный и сильно турбулентный. К концу XX века с появлением мощной компьютерной базы выработалась и прошла всестороннюю теоретико-экспериментальную проверку точка зрения (см., например, монографию [1] с обзором соответствующей литературы) о существовании либо несуществовании и методах нахождения критических чисел Рейнольдса для всех одномерных стационарных течений ньютоновской вязкой жидкости — течений Куэтта, Пуазёйля, Куэтта–Тейлора, Тейлора–Дина и некоторых других. Важно то, что данные критические числа зависят от класса налагаемых возмущений, в особенности от размерности картины возмущений. Большое теоретическое значение здесь имеет известная в гидродинамике теорема Сквайра [2, 3] и ее различные обобщения [4–7]. В случае двумерной картины благодаря введению функции тока спектральная задача устойчивости может быть сведена к одному уравнению (в частности, к уравнению Орра–Зоммерфельда [2, 3, 7–10]) с некоторыми однородными граничными условиями.

В данной работе на базе метода интегральных соотношений [3, 11], позволяющего получать достаточные оценки устойчивости и нижние оценки критических чисел Рейнольдса, исследуется трехмерная картина возмущений, налагаемых на комбинированный вращательно-осевой сдвиг ньютоновской вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре (обобщенное течение Тейлора–Дина). Аппарат метода проиллюстрирован на примере, когда постановка задачи не сводится к одному уравнению устойчивости, а содержит четыре уравнения в области зазора. Выводится общая верхняя оценка действительной части спектрального параметра, отвечающей за устойчивость. Эта оценка уточняется для случаев трехмерных осесимметричных и двумерных в плоскости (r, z) неосесимметричных возмущений.

2. Описание системы и основное течение

В зазоре Ω, описываемом в цилиндрических координатах (r, θ, z) неравенствами $\Omega = \{0 < R_1 < r < R_2 < \infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}$, осуществляется стационарное вращательно-осевое течение несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ и динамической вязкостью μ. Известны угловые и осевые скорости внутреннего и внешнего цилиндров, ограничивающих область Ω, они равны ω_1, V_1, ω_2 и V_2 соответственно. Кроме того, вдоль оси z может действовать постоянный перепад давления $\partial p/\partial z \equiv -k$.

Перейдем сразу к безразмерным переменным и включим в базис обезразмеривания плотность ρ, радиус R_1, а также характерную скорость течения V. В случае если внутренний и внешний цилиндры неподвижны, а движение вызывается только осевым перепадом давления, в качестве V можно выбрать комбинацию $\sqrt{kR_1/\rho}$. Во избежание лишних обозначений будем считать ранее введенные величины обезразмеренными в базисе $\{\rho, R_1, V\}$, то есть $\omega_i R_1/V \mapsto \omega_i$, $V_i/V \mapsto V_i$ $(i = 1, 2)$, $kR_1/(\rho V^2) \mapsto k$, $R_2/R_1 = R$, $\rho R_1 V/\mu = \mathrm{Re}$ — число Рейнольдса. Особый интерес представляет случай узкого зазора: $R - 1 \ll 1$.

Основное, или невозмущенное, течение (его параметры далее помечаются верхним индексом $\circ$), являющееся суперпозицией вращательного (θ, r)- и осевого (z, r)-сдвигов, характеризуется профилями скоростей $v^\circ_\theta(r)$ и $v^\circ_z(r)$, компонентами $s^\circ_{r\theta}(r)$ и $s^\circ_{rz}(r)$ девиатора тензора напряжений и давлением $p^\circ(r) - kz$. Они без труда находятся в результате интегрирования нелинейных уравнений Навье – Стокса в области Ω при выполнении кинематических граничных условий

$$r = 1: \quad v_\theta^\circ = \omega_1, \quad v_z^\circ = V_1; \qquad r = R: \quad v_\theta^\circ = \omega_2 R, \quad v_z^\circ = V_2. \tag{2.1}$$

Данные профили имеют следующий вид ($1 < r < R$):

$$\begin{gathered}
v_\theta^\circ = \frac{1}{R^2 - 1}\Big[(\omega_2 R^2 - \omega_1)r - (\omega_2 - \omega_1)\frac{R^2}{r}\Big],\\
v_z^\circ = \frac{1}{\ln R}\Big[\Big(V_2 + \frac{kR^2}{4}\,\mathrm{Re}\Big)\ln r - \Big(V_1 + \frac{k}{4}\,\mathrm{Re}\Big)\ln\frac{r}{R}\Big] - \frac{kr^2}{4}\,\mathrm{Re},\\
s_{r\theta}^\circ = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,r\Big(\frac{v_\theta^\circ}{r}\Big)' = \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{(\omega_2 - \omega_1)R^2}{(R^2 - 1)r^2}, \quad p^\circ = \int\frac{(v_\theta^\circ)^2}{r}\,dr,\\
s_{rz}^\circ = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,v_z^{\circ\prime} = \frac{1}{r\ln R}\Big[\frac{k}{4}(R^2 - 1) + \frac{1}{\mathrm{Re}}(V_2 - V_1)\Big] - \frac{kr}{2}.
\end{gathered}\tag{2.2}$$

3. Трехмерная картина возмущений

На вращательно-осевое сдвиговое течение с профилями (2.2) наложим в области Ω трехмерные нестационарные возмущения скоростей и напряжений. Линеаризуем вблизи основного течения уравнения движения и условие несжимаемости и запишем систему четырех линеаризованных уравнений относительно возмущений давления δp и трех компонент скорости δv_r, δv_θ, δv_z, зависящих от r, θ, z и t. Во избежание лишних символов будем опускать[1] знак вариации δ:

$$\begin{gathered}
-p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}\,s_{r\theta,\theta} + s_{rz,z} + \frac{1}{r}(s_{rr} - s_{\theta\theta}) = v_{r,t} + \frac{v_\theta^\circ}{r}\,v_{r,\theta} + v_z^\circ v_{r,z} - \frac{2v_\theta^\circ}{r}\,v_\theta,\\
-\frac{1}{r}\,p_{,\theta} + \frac{1}{r}\,s_{\theta\theta,\theta} + s_{r\theta,r} + s_{\theta z,z} + \frac{2}{r}\,s_{r\theta} = v_{\theta,t} + \Big(v_\theta^{\circ\prime} + \frac{v_\theta^\circ}{r}\Big)v_r + \frac{v_\theta^\circ}{r}\,v_{\theta,\theta} + v_z^\circ v_{\theta,z},\\
-p_{,z} + s_{rz,r} + \frac{1}{r}\,s_{\theta z,\theta} + s_{zz,z} + \frac{1}{r}\,s_{rz} = v_{z,t} + v_z^{\circ\prime} v_r + \frac{v_\theta^\circ}{r}\,v_{z,\theta} + v_z^\circ v_{z,z},\\
v_{r,r} + \frac{1}{r}\,v_r + \frac{1}{r}\,v_{\theta,\theta} + v_{z,z} = 0.
\end{gathered}\tag{3.1}$$

Частные производные по соответствующим переменным обозначены штрихами. Для замыкания системы (3.1) необходимо учесть определяющие соотношения вязкой несжимаемой жидкости и соотношения Стокса, связывающие тензор скоростей деформаций $\underset{\sim}{v}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$:

$$\underset{\sim}{s} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\,\underset{\sim}{v}, \quad \underset{\sim}{v} = \mathrm{Def}\,\mathbf{v}. \tag{3.2}$$

Граничные условия прилипания к поверхностям $r = 1$ и $r = R$, движение которых не претерпевает изменений при действии возмущений, следуют из (2.1):

$$r = 1: \quad v_r = v_\theta = v_z = 0; \qquad r = R: \quad v_r = v_\theta = v_z = 0. \tag{3.3}$$

[1]В дальнейших выкладках будут фигурировать параметры основного движения (с индексом $\circ$) и сами возмущения. Параметры же возмущенного движения после линеаризации в формулы не войдут, поэтому опускание знака δ оправдано.

После разделения переменных в системе (3.1) и представления неизвестных функций в виде отдельных гармоник

$$\begin{gathered}\mathbf{v}(r,\theta,z,t)=\widetilde{\mathbf{v}}(r)\exp(in\theta+isz+\alpha t),\\ \underset{\sim}{s}(r,\theta,z,t)=\widetilde{\underset{\sim}{s}}(r)\exp(in\theta+isz+\alpha t),\\ p(r,\theta,z,t)=p(r)\exp(in\theta+isz+\alpha t),\\ n=0,1,2,\,\ldots,\quad s>0,\quad \alpha=\alpha_*+i\alpha_{**}\in C,\end{gathered}\tag{3.4}$$

получим систему обыкновенных уравнений

$$-\widetilde{p}'+\widetilde{s}'_{rr}+\frac{in}{r}\,\widetilde{s}_{r\theta}+is\widetilde{s}_{rz}+\frac{1}{r}(\widetilde{s}_{rr}-\widetilde{s}_{\theta\theta})=\Big(\alpha+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ+isv_z^\circ\Big)\widetilde{v}_r-\frac{2v_\theta^\circ}{r}\,\widetilde{v}_\theta,\tag{3.5}$$

$$-\frac{in}{r}\,\widetilde{p}+\frac{in}{r}\,\widetilde{s}_{\theta\theta}+\widetilde{s}'_{r\theta}+is\widetilde{s}_{\theta z}+\frac{2}{r}\,\widetilde{s}_{r\theta}=\Big(\alpha+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ+isv_z^\circ\Big)\widetilde{v}_\theta+\Big(v_\theta^{\circ\prime}+\frac{v_\theta^\circ}{r}\Big)\widetilde{v}_r,\tag{3.6}$$

$$-is\widetilde{p}+\widetilde{s}'_{rz}+\frac{in}{r}\,\widetilde{s}_{\theta z}+is\widetilde{s}_{zz}+\frac{1}{r}\,\widetilde{s}_{rz}=\Big(\alpha+\frac{in}{r}\,v_\theta^\circ+isv_z^\circ\Big)\widetilde{v}_z+v_z^{\circ\prime}\widetilde{v}_r,\tag{3.7}$$

$$(r\widetilde{v}_r)'+in\widetilde{v}_\theta+isr\widetilde{v}_z=0\tag{3.8}$$

с однородными граничными условиями, следующими из (3.3):

$$\widetilde{v}_r(1)=\widetilde{v}_\theta(1)=\widetilde{v}_z(1)=0,\quad \widetilde{v}_r(R)=\widetilde{v}_\theta(R)=\widetilde{v}_z(R)=0.\tag{3.9}$$

Комплексная частота α, являющаяся в задаче (3.5) – (3.9) спектральным параметром, зависит от волнового числа s вдоль оси z и номера n моды возмущения по углу θ. Если $\alpha_{j*}(s,n)<0$ при любых $s>0$, $n=0,1,2,\,\ldots$ и $j=1,2,\,\ldots$, где j — номер ветви, то основное течение с профилями (2.2) интерпретируется как устойчивое относительно трехмерной картины (3.4) малых возмущений.

Будем опускать вплоть до конца работы тильды над функциями одной переменной r, входящими в задачу (3.5)–(3.9).

4. Квадратичные функционалы и вариационные неравенства в $H_2[1;R]$

Умножим обе части уравнения (3.5) на $r\overline{v}_r$, (3.6) — на $r\overline{v}_\theta$, (3.7) — на $r\overline{v}_z$, затем сложим три равенства и проинтегрируем по r от 1 до R. Для образовавшихся квадратичных функционалов введем обозначения

$$\begin{gathered}I_\beta^2=\int\limits_1^R r|v_\beta|^2\,dr,\quad J_\beta^2=\int\limits_1^R\frac{|v_\beta|^2}{r}\,dr,\quad K_\beta^2=\int\limits_1^R r|v'_\beta|^2\,dr,\quad \beta=r,\theta,z,\\ I^2=I_r^2+I_\theta^2+I_z^2,\quad J^2=J_r^2+J_\theta^2+J_z^2.\end{gathered}\tag{4.1}$$

В силу вытекающего из (3.8) равенства $(r\overline{v}_r)'-in\overline{v}_\theta-isr\overline{v}_z=0$, а также интегрирования по частям с условиями (3.9) сумма слагаемых с давлением p будет равна нулю. В результате указанных операций получим

$$\int\limits_1^R \Big[\big((rs_{rr})' + ins_{r\theta} + isrs_{rz} - s_{\theta\theta}\big)\,\overline{v}_r +$$

$$+ \big((r^2 s_{r\theta})'/r + ins_{\theta\theta} + isrs_{\theta z}\big)\,\overline{v}_\theta + \big((rs_{rz})' + ins_{\theta z} + isrs_{zz}\big)\,\overline{v}_z\Big]dr =$$

$$= \alpha I^2 + i\int\limits_1^R (nv_\theta^\circ + srv_z^\circ)\big(|v_r|^2 + |v_\theta|^2 + |v_z|^2\big)\,dr + \int\limits_1^R \big(rv_z^{\circ\prime} v_r\overline{v}_z - 2v_\theta^\circ v_\theta\overline{v}_r + (rv_\theta^\circ)' v_r\overline{v}_\theta\big)\,dr. \tag{4.2}$$

Используя связи (3.2) и обозначения (4.1), преобразуем каждое из десяти интегральных слагаемых в левой части (4.2):

$$a)\quad \int\limits_1^R (rs_{rr})'\,\overline{v}_r\,dr = -\int\limits_1^R rs_{rr}\overline{v}_r'\,dr = -\frac{2}{\mathrm{Re}}K_r^2,$$

$$b)\quad in\int\limits_1^R s_{r\theta}\overline{v}_r\,dr = \frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R \Big(\frac{in}{r}\,v_r + r\Big(\frac{v_\theta}{r}\Big)'\Big)\overline{v}_r\,dr = -\frac{n^2}{\mathrm{Re}}J_r^2 - \frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R \frac{v_\theta}{r}(r\overline{v}_r)'\,dr =$$

$$= -\frac{n^2}{\mathrm{Re}}J_r^2 - \frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R \frac{v_\theta}{r}(in\overline{v}_\theta + isr\overline{v}_z)\,dr = -\frac{n^2}{\mathrm{Re}}J_r^2 + \frac{n^2}{\mathrm{Re}}J_\theta^2 + \frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_\theta\overline{v}_z\,dr,$$

$$c)\quad is\int\limits_1^R rs_{rz}\overline{v}_r\,dr = \frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R r(v_{z,r} + isv_r)\overline{v}_r\,dr = -\frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_r^2 - \frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_z(r\overline{v}_r)'\,dr =$$

$$= -\frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_r^2 - \frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_z(in\overline{v}_\theta + isr\overline{v}_z)\,dr = -\frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_r^2 + \frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_z^2 + \frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_z\overline{v}_\theta\,dr,$$

$$d)\quad -\int\limits_1^R s_{\theta\theta}\overline{v}_r\,dr = -\frac{2}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R (inv_\theta + v_r)\frac{\overline{v}_r}{r}\,dr = -\frac{2}{\mathrm{Re}}J_r^2 - \frac{2in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R \frac{1}{r}\,v_\theta\overline{v}_r\,dr,$$

$$e)\quad \int\limits_1^R \frac{1}{r}(r^2 s_{r\theta})'\overline{v}_\theta\,dr = -\int\limits_1^R r^2 s_{r\theta}\Big(\frac{\overline{v}_\theta}{r}\Big)'dr =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R r^2\Big(\frac{in}{r}\,v_r + r\Big(\frac{v_\theta}{r}\Big)'\Big)\Big(\frac{\overline{v}_\theta}{r}\Big)'dr = -\frac{1}{\mathrm{Re}}K_\theta^2 - \frac{1}{\mathrm{Re}}J_\theta^2 - \frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R rv_r\Big(\frac{\overline{v}_\theta}{r}\Big)'dr =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Re}}K_\theta^2 - \frac{1}{\mathrm{Re}}J_\theta^2 - \frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R (inv_\theta + isrv_z)\frac{\overline{v}_\theta}{r}\,dr = -\frac{1}{\mathrm{Re}}K_\theta^2 + \frac{n^2-1}{\mathrm{Re}}J_\theta^2 + \frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_z\overline{v}_\theta\,dr,$$

$$f)\quad in\int\limits_1^R s_{\theta\theta}\overline{v}_\theta\,dr = \frac{2in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R (inv_\theta + v_r)\frac{\overline{v}_\theta}{r}\,dr = -\frac{2n^2}{\mathrm{Re}}J_\theta^2 + \frac{2in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R \frac{1}{r}\,v_r\overline{v}_\theta\,dr,$$

$$g)\quad is\int\limits_1^R rs_{\theta z}\overline{v}_\theta\,dr=\frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R(isrv_\theta+inv_z)\overline{v}_\theta\,dr=-\frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_\theta^2-\frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_z\overline{v}_\theta\,dr,$$

$$h)\quad \int\limits_1^R(rs_{rz})'\overline{v}_z\,dr=-\int\limits_1^R rs_{rz}\overline{v}_z'\,dr=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R r(v_z'+isv_r)\overline{v}_z'\,dr=-\frac{1}{\mathrm{Re}}K_z^2-\frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R rv_r\overline{v}_z'\,dr=$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{Re}}K_z^2-\frac{is}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R(inv_\theta+isrv_z)\overline{v}_z\,dr=-\frac{1}{\mathrm{Re}}K_z^2+\frac{s^2}{\mathrm{Re}}I_z^2+\frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_\theta\overline{v}_z\,dr,$$

$$i)\quad in\int\limits_1^R s_{\theta z}\overline{v}_z\,dr=\frac{in}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R\Big(\frac{in}{r}\,v_z+isv_\theta\Big)\overline{v}_z\,dr=-\frac{n^2}{\mathrm{Re}}J_z^2-\frac{ns}{\mathrm{Re}}\int\limits_1^R v_\theta\overline{v}_z\,dr,$$

$$j)\quad is\int\limits_1^R rs_{zz}\overline{v}_z\,dr=-\frac{2s^2}{\mathrm{Re}}I_z^2.$$

Отметим, что благодаря физической линейности определяющих соотношений (3.2) и отсутствию в левых частях линеаризованных уравнений Навье – Стокса (3.1), а также вытекающих из них уравнений (3.5)–(3.7) параметров основного течения проведенные выкладки справедливы для любого (а не только с профилями (2.2)) невозмущенного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом зазоре Ω.

Учитывая преобразования *a)–j)*, запишем равенство (4.2) для действительных частей:

$$\begin{gathered}\alpha_* I^2=-\int\limits_1^R\Big(rv_z^{\circ\prime}(v_r\overline{v}_z)_*-2v_\theta^\circ(v_\theta\overline{v}_r)_*+(rv_\theta^\circ)'(v_r\overline{v}_\theta)_*\Big)dr-\\ -\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[2K_r^2+K_\theta^2+K_z^2+s^2(I_r^2+I_\theta^2)+(n^2+2)J_r^2+J_\theta^2+n^2J_z^2-\\ -2ns\int\limits_1^R(v_\theta\overline{v}_z)_*dr-4n\int\limits_1^R\frac{1}{r}\,(v_r\overline{v}_\theta)_{**}dr\Big].\end{gathered}\qquad(4.3)$$

Так как $(v_\theta\overline{v}_r)_*=(v_r\overline{v}_\theta)_*$, то подынтегральное выражение в первом слагаемом правой части (4.3) можно записать так: $rv_z^{\circ\prime}(v_r\overline{v}_z)_*+r^2\omega^{\circ\prime}(v_r\overline{v}_\theta)_*$, где $\omega^\circ(r)=v_\theta^\circ(r)/r$ — угловая скорость частиц в невозмущенном течении, выражение которой известно из (2.2).

Используя вариационные неравенства в комплекснозначном гильбертовом пространстве $H_2[1;R]$, выведем возможные верхние оценки правой части (4.3). Из неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\pm\int\limits_1^R rv_z^{\circ\prime}(v_r\overline{v}_z)_*dr\leqslant q_zI_rI_z,\quad q_z=\sup_{1<r<R}\big|v_z^{\circ\prime}(r)\big|,\qquad(4.4)$$

$$\pm\int\limits_1^R r^2\omega^{\circ\prime}(v_r\overline{v}_\theta)_*dr\leqslant q_\theta I_rI_\theta,\quad q_\theta=\sup_{1<r<R}\big|r\omega^{\circ\prime}(r)\big|,\qquad(4.5)$$

$$\pm\int\limits_1^R(v_\theta\overline{v}_z)_*dr\leqslant\begin{cases}J_\theta I_z\\ I_\theta J_z\end{cases},\quad \pm\int\limits_1^R\frac{1}{r}\,(v_r\overline{v}_\theta)_{**}dr\leqslant J_rJ_\theta.\qquad(4.6)$$

Обозначим далее

$$\lambda^2 = \inf_{f(r)} \frac{\int\limits_1^R r|f'(r)|^2\,dr}{\int\limits_1^R r|f(r)|^2\,dr}, \quad f(1) = f(R) = 0. \tag{4.7}$$

Проблема нахождения величины λ^2, на которой не будем останавливаться в данной работе, эквивалентна поиску первого собственного числа задачи на собственные значения

$$(rf')' + \lambda^2 r f = 0, \quad f(1) = f(R) = 0 \tag{4.8}$$

для функции $f(r)$, $1 < r < R$. Представление фундаментальных решений уравнения (4.8) в форме комбинаций функций Бесселя можно найти в справочной литературе (см., например, [12, с. 401]).

С учетом граничных условий (3.9) имеют место неравенства Фридрихса с константой λ^2:

$$K_r^2 \geqslant \lambda^2 I_r^2, \quad K_\theta^2 \geqslant \lambda^2 I_\theta^2, \quad K_z^2 \geqslant \lambda^2 I_z^2. \tag{4.9}$$

Выберем сначала в (4.6) верхнюю строку и на основе (4.4)–(4.6) и (4.9) оценим сверху параметр устойчивости α_* в (4.3):

$$\alpha_* \leqslant \frac{I_r}{I^2}(q_z I_z + q_\theta I_\theta) - \frac{1}{I^2\mathrm{Re}}\big[(2\lambda^2 + s^2)I_r^2 + (\lambda^2 + s^2)I_\theta^2 + \lambda^2 I_z^2 + \\ + (n^2+2)J_r^2 + J_\theta^2 + n^2 J_z^2 - 2nsJ_\theta I_z - 4nJ_rJ_\theta\big]. \tag{4.10}$$

Построенная на I_r, I_θ, I_z, J_r, J_θ, J_z квадратичная форма в квадратных скобках правой части (4.10) положительно определена для любого s лишь при $n = 0$, что соответствует осесимметричным возмущениям. Поэтому общую нижнюю оценку данной квадратной скобки, а следовательно, верхнюю оценку всей правой части (4.10) и параметра устойчивости α_* представить не удается. Аналогичная оценочная проблема возникнет, если в неравенстве (4.6) выбрать не верхнюю, а нижнюю строку. Невозможность промажорировать при $n \geqslant 1$ правую часть (4.10) выражением, зависящим только от q_z, q_θ и Re, не означает заведомую неустойчивость исходного течения в зазоре Ω, а говорит об отсутствии единой по n и s достаточной оценки устойчивости.

5. Трехмерная картина осесимметричных возмущений

В данном случае три компоненты скорости возмущений v_r, v_θ и v_z зависят от r, z, t и не зависят от θ, то есть в представлениях (3.4) и в последующих выкладках надо положить $n = 0$. Из критерия Сильвестра положительной определенности соответствующей квадратичной формы следует, что

$$\frac{I_r}{I^2}(q_z I_z + q_\theta I_\theta) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2}, \tag{5.1}$$

поэтому оценку (4.10) можно переписать в виде

$$\alpha_* \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2} - \frac{1}{I^2\mathrm{Re}}\big[(2\lambda^2 + s^2)I_r^2 + (\lambda^2 + s^2)I_\theta^2 + \lambda^2 I_z^2 + 2J_r^2 + J_\theta^2\big]. \tag{5.2}$$

Дальнейшие рассуждения связаны с неравенствами

$$\frac{1}{R}\int\limits_1^R |v_\beta|^2 dr \leqslant J_\beta^2 \leqslant \int\limits_1^R |v_\beta|^2 dr \leqslant I_\beta^2 \leqslant R\int\limits_1^R |v_\beta|^2 dr, \quad \beta = r, \theta, z, \tag{5.3}$$

вытекающими из определений (4.1). Из (5.3) также получим

$$J_\beta^2 \geqslant \frac{I_\beta^2}{R^2}, \quad J^2 \geqslant \frac{I^2}{R^2}. \tag{5.4}$$

Оценивая двумя независимыми способами сверху (с учетом (5.4)) правую часть неравенства (5.2), запишем

$$\alpha_* \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2} - \frac{1}{I^2\mathrm{Re}}\big[(2\lambda^2 + s^2 + 2/R^2)I_r^2 + (\lambda^2 + s^2 + 1/R^2)I_\theta^2 + \lambda^2 I_z^2\big] \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2} - \frac{\lambda^2}{\mathrm{Re}}, \tag{5.5}$$

$$\alpha_* \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2} - \frac{1}{R^2 J^2\mathrm{Re}}\big[(2\lambda^2 + s^2 + 2)J_r^2 + (\lambda^2 + s^2 + 1)J_\theta^2 + \lambda^2 J_z^2\big] \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2} - \frac{\lambda^2}{R^2\mathrm{Re}}. \tag{5.6}$$

Так как $R^2 > 1$, оценка (5.5) заведомо сильнее, чем (5.6).

Итак, если

$$\mathrm{Re} < \frac{2\lambda^2}{\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2}}, \tag{5.7}$$

то $\alpha_* < 0$, что означает асимптотическую устойчивость, или экспоненциальное затухание осесимметричных возмущений. Следовательно, истинное критическое число Рейнольдса, при котором развитие осесимметричных возмущений исходного течения в зазоре Ω становится неустойчивым, заведомо больше правой части (5.7).

Параметры основного течения q_z и q_θ можно найти явно исходя из определений (4.4), (4.5) и вида профилей (2.2):

$$\begin{gathered} q_\theta = \frac{2|\omega_2 - \omega_1|R^2}{R^2 - 1}, \quad q_z^{\{1\}} = \frac{|V_2 - V_1|}{\ln R}, \quad \text{если } k = 0, \\ q_z^{\{2\}} = \frac{|k|\mathrm{Re}}{4}\max\left(\left|\frac{R^2 - 1}{\ln R} - 2\right|; \left|\frac{R^2 - 1}{R\ln R} - 2R\right|\right), \quad \text{если } V_2 = V_1. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Для простоты в (5.8) приведены значения q_z в случаях отсутствия осевого перепада давления ($k = 0$) либо равенства осевых скоростей граничных цилиндров ($V_2 = V_1$). Не представляет аналитического труда получить и более громоздкое выражение для q_z, если одновременно $k \neq 0$ и $V_2 \neq V_1$.

В пределе узкого зазора $R = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) главные члены разложений по ε в (5.8) следующие:

$$q_\theta = \frac{1}{\varepsilon}|\omega_2 - \omega_1|, \quad q_z^{\{1\}} = \frac{1}{\varepsilon}|V_2 - V_1|, \quad q_z^{\{2\}} = \frac{|k|\mathrm{Re}}{2}\varepsilon. \tag{5.9}$$

Неравенство (5.7) в случае, когда, например, $k = 0$, записывается в виде

$$\mathrm{Re} < \frac{2\lambda^2\varepsilon}{\sqrt{(V_2 - V_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2}}. \tag{5.10}$$

6. Двумерная картина неосесимметричных возмущений

Пусть теперь две компоненты скорости возмущений v_r и v_z зависят от всех переменных r, θ, z и t, а $v_\theta \equiv 0$ ($I_\theta = J_\theta = K_\theta = 0$). На основании оценок (5.1), (5.3) и (5.4) продолжим двумя возможными способами неравенство (4.10):

$$\alpha_* \leqslant \frac{q_z}{2} - \frac{1}{I^2\mathrm{Re}}\Big[\Big(2\lambda^2 + s^2 + \frac{n^2+2}{R^2}\Big)I_r^2 + \Big(\lambda^2 + \frac{n^2}{R^2}\Big)I_z^2\Big] \leqslant \frac{q_z}{2} - \frac{\lambda^2}{\mathrm{Re}}, \tag{6.1}$$

$$\alpha_* \leqslant \frac{q_z}{2} - \frac{1}{R^2J^2\mathrm{Re}}\big[\big(2\lambda^2 + s^2 + n^2 + 2\big)J_r^2 + \big(\lambda^2 + n^2\big)J_z^2\big] \leqslant \frac{q_z}{2} - \frac{\lambda^2}{R^2\mathrm{Re}}. \tag{6.2}$$

Как и ранее в паре (5.5), (5.6), здесь оценка (6.1) сильнее, чем (6.2).

Следовательно, достаточным условием затухания двумерных в плоскости (r, z) возмущений (вообще говоря, неосесимметричных) будет требование

$$\mathrm{Re} < \frac{2\lambda^2}{q_z}, \tag{6.3}$$

куда в отличие от аналогичного условия (5.7), как видно, не входят параметры вращательной составляющей основного течения. За счет этого правая часть (6.3) больше либо равна правой части (5.7). Это означает, что в интервале числа Рейнольдса

$$\frac{2\lambda^2}{\sqrt{q_z^2 + q_\theta^2}} \leqslant \mathrm{Re} < \frac{2\lambda^2}{q_z}, \quad q_\theta > 0, \tag{6.4}$$

двумерные (r, z)-возмущения со временем затухают, тогда как об эволюции трехмерной картины осесимметричных возмущений такого заведомо утверждать нельзя.

Список литературы

[1] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. Москва: Физматлит, 2005. 288 с.

[2] Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. Москва: Мир, 1971. 354 с.

[3] Козырев О. Р., Степанянц Ю. А. Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа, т. 25.) Москва: ВИНИТИ, 1991. С. 3–89.

[4] Георгиевский Д. В. Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра // МТТ, 1993, № 2, с. 117–123.

[5] Georgievskii D. V. Applicability of the Squire transformation in linearized problems on shear stability // Russian J. Math. Phys., 2009, vol. 16, no. 4, pp. 478–483.

[6] Георгиевский Д. В. Новые оценки устойчивости одномерных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости // ПММ, 2010, т. 74, № 4, с. 633–644.

[7] Georgievskii D. V., Müller W. H., Abali B. E. Generalizations of the Orr – Sommerfeld problem for the case in which the unperturbed motion is nonsteady // Russian J. Math. Phys., 2014, vol. 21, no. 2, pp. 189–196.

[8] Orszag S. A. Accurate solution of the Orr – Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, no. 4, pp. 689–703.

[9] Дубровский В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф., Садовничий В. А. Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда // Докл. РАН, 2001, т. 378, № 4, с. 443–446.

[10] Туманов С. Н., Шкаликов А. А. О локализации спектра задачи Орра – Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса // Матем. заметки, 2002, т. 72, № 4, с. 561–569.

[11] Георгиевский Д. В. Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Геометрия и механика / Р. В. Гамкрелидзе. (СМФН, т. 23.) Москва: РУДН, 2007. С. 96–146.

[12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Мир, 1971. 576 с.

Evolution of three-dimensional picture of disturbances imposed on a rotational-axial flow in a cylindrical clearance

Dmitrii V. Georgievskii

Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

georgiev@mech.math.msu.su

This work deals with stability relative to three-dimensional disturbances of a compound rotational-axial shear flow of Newtonian viscous fluid inside a cylindrical clearance. The corresponding linearized problem on stability is stated with the sticking conditions. On the basis of the integral relation method permitting to obtain sufficient estimates of stability as well as lower estimates for critical Reynolds numbers, the general upper estimate of real part of a spectral parameter (responding to stability) is derived. This estimate is defined more exactly for cases of both three-dimensional axially symmetric disturbances and two-dimensional non-axially symmetric ones.

MSC 2010: 76D05
Keywords: Newtonian fluid, cylindrical clearance, shear flow, rotation, the integral relation method, quadratic functional, variational inequality, stability, critical Reynolds number

Received August 21, 2014, accepted September 24, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 345–354 (Russian)