Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 3. С. 355–359.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.925
MSC 2010: 37J60, 37J35

Инвариантная мера и гамильтонизация неголономных систем

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе обсуждаются новые нерешенные задачи неголономной механики. Высказаны гипотезы о возможности гамильтонизации и существовании инвариантной меры для таких систем.

Ключевые слова: неголономная механика, тензорный инвариант, инвариантная мера, пуассонова структура

В работе [1] был поставлен вопрос о конформной гамильтоновости (то есть гамильтоновости после замены времени) неголономных систем, интегрируемых по Эйлеру – Якоби. Была показана принципиальная возможность гамильтонизации (то есть приведению к конформно-гамильтонову виду) таких систем. Явно пуассоновы структуры для ряда интегрируемых неголономных систем были приведены в работах [2, 3]. Еще один класс задач, при котором гамильтонизация не вызывает затруднений, обсуждается в работе [4], где разобраны не только интегрируемые системы, но и неинтегрируемые. Эти системы, описывающие поведение неголономных систем без верчения, характеризуются наличием в фазовом пространстве линейного интеграла, что позволяет редуцировать систему на сферу Пуассона и получить систему Чаплыгина. В той же работе [4] получен критерий, связывающий наличие инвариантной меры и гамильтоновой формы уравнений движения: если мера существует, то система является конформно-гамильтоновой. В данной работе поставлены вопросы о гамильтонизации ряда неинтегрируемых систем, все имеющиеся интегралы которых

Получено 3 сентября 2014 года
После доработки 24 сентября 2014 года

Исследование выполнено в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01303).

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское ш., д. 31

Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

в фазовом пространстве нелинейны, однако эти системы близки к гамильтоновым в том смысле, что их динамика сводится к двумерному отображению Пуанкаре с инвариантной мерой. Как хорошо известно, такое отображение является симплектическим. Для случая, рассматриваемого в этой работе, не удается, используя алгебраические манипуляции с интегралами, некоторые из которых должны быть функциями Казимира, явно привести форму пуассоновой структуры ранга 4, удовлетворяющей тождеству Якоби. Поставлен вопрос о препятствиях к гамильтонизации для этого класса задач. Пока препятствия к гамильтонизации без замены времени изучены только для интегрируемых систем — это периоды обращений по резонансным инвариантным торам, которые для неголономных систем (в отличие от гамильтоновых) могут быть разными [5]. Укажем несколько примеров.

1. Неголономная задача Якоби

Рассмотрим качение однородного шара по поверхности, при котором центр масс шара движется по поверхности второго порядка

$$\big(\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\gamma},\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{r}\times R\boldsymbol{\gamma})\big)=1, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{B}=\operatorname{diag}(b_1,b_2,b_3)$ — матрица квадратов главных полуосей, $\boldsymbol{r}$ — вектор в неподвижном пространстве, соединяющий неподвижную точку с точкой контакта, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали к поверхности качения, R — радиус шара. Из (1.1) следует

$$r+R\boldsymbol{\gamma}=\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\gamma,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}. \tag{1.2}$$

Из (1.1), (1.2) можно получить явные уравнения движения шара

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{M}}=-\frac{D}{\mu+D}(\boldsymbol{M},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{\gamma},\quad \boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^3,\\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}=\frac{R\sqrt{(\gamma,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}{\mu+D}\boldsymbol{\gamma}\times\big(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{B}^{-1}(\gamma\times M)\big),\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{M}$ — кинетический момент относительно точки контакта, $D=mR^2$, μ — момент инерции шара.

Уравнения (1.3) обладают очевидными интегралами движения, энергии и геометрическим

$$H=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}),\quad F_1=\boldsymbol{\gamma}^2=1. \tag{1.4}$$

В работе [8] был найден нетривиальный интеграл

$$F_2=\frac{\big(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{M},\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{M})\big)}{(\gamma,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})} \tag{1.5}$$

и плотность инвариантной меры $\rho=(\gamma,\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^{-2}$.

Интегралы (1.4), (1.5) являются нелинейными и высекают в шестимерном фазовом пространстве трехмерную поверхность, сечение Пуанкаре для которой двумерно и сохраняет площадь. Можно, манипулируя тремя интегралами (1.4), (1.5), пытаться по-разному их разбивать на две другие функции Казимира и гамильтониан. Однако этот путь не приводит к успеху — все реальные кандидаты на роль пуассоновой структуры ранга 4 не удовлетворяют тождеству Якоби.

2. Качение неуравновешенного шара по сфере

Более кратко обсудим качение шара Чаплыгина по неподвижной сфере. На рисунке 1 приведены основные обозначения задачи $D = ma^2$. Уравнения движения в осях, связанных с движущимся шаром, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{M}} &= \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= k\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{M} &= (I + D)\boldsymbol{\omega} - D\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $k = \dfrac{R}{R-a}$.

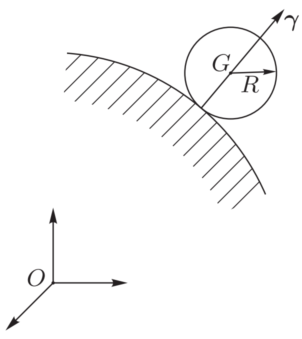

Рис. 1

Уравнения движения всегда обладают интегралами

$$F = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_2 = \boldsymbol{M}^2 \tag{2.2}$$

и инвариантной мерой с плотностью

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad \mathbf{A} = (I + D\mathbf{E})^{-1}. \tag{2.3}$$

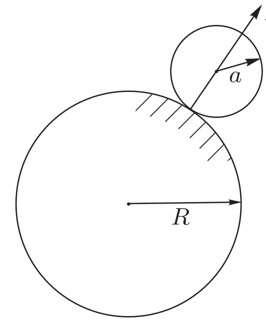

Рис. 2

Для случаев $k = 1$ (качение по плоскости) и $k = -1$ (БМФ-система) система (2.2) является интегрируемой и поэтому гамильтонизуемой. В общем случае для системы (2.1), (2.2) также не удается подобрать пуассонов тензор ранга 4, удовлетворяющий тождеству Якоби. Для шара Чаплыгина со смещенным центром третий интеграл из (2.2) может быть обобщен, однако пропадает инвариантная мера [6]. Особый интерес представляет задача о качении несимметричного неуравновешенного шара при дополнительном условии отсутствия верчения. Она разобрана в работе [7]. Факт отсутствия инвариантной меры приводит к появлению канторовой лестницы в распределении чисел вращения в зависимости от констант первых интегралов, хотя сам случай, обладающий необходимым числом первых интегралов, но не инвариантной мерой, топологически эквивалентен случаю Эйлера (с точки зрения слоения на интегральные поверхности). Таким образом, на некоторых инвариантных торах появляются предельные циклы.

3. Шар Чаплыгина — вращательная динамика

Не следует думать, что для гамильтонизации интегрируемых систем все вопросы решены. Общие соображения справедливы только для систем, интегрируемых по Эйлеру – Якоби [1]. Например, построенную для приведенной системы пуассонову структуру, описывающую шар Чаплыгина, не удается обобщить для вращательного движения шара в абсолютном пространстве. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Вращательное движение шара в абсолютном пространстве описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3, \\ &\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{M}$ — кинетический момент относительно точки контакта, I — центральный тензор инерции, $D = ma^2$, m, a — масса и радиус шара. Для первых шести уравнений известна пуассонова структура

$$\begin{gathered}\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}\rho^{-1}(M_k - g\gamma_k),\\ \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\rho^{-1}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0,\\ g = D(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{A\gamma})}}, \quad \mathbf{A} = (I + D\mathbf{E})^{-1}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

При попытке обобщить эту структуру до пуассоновой структуры ранга 6 для полной системы (3.1) возникают непреодолимые сложности и вопрос остается открытым. Также пуассонова структура (3.1) не обобщается на многомерные аналогии шара Чаплыгина, интегрируемость которых пока не доказана.

4. Инвариантная мера

В некоторых задачах неголономной механики, как в обычной постановке (скорость точки контакта равна нулю), так и в случае дополнительного отсутствия верчения, неясным остается вопрос о существовании инвариантной меры. В работе [9] указаны препятствия для существования инвариантной меры для эллипсоидов, имеющих особенную геометродинамическую структуру. При численном моделировании не удается обнаружить никакие области притяжения и фазовый портрет имеет гамильтонов характер. Однако и в аналитическом виде найти инвариантную меру также не представляется возможным. Одна из простейших и нерешенных задач связана с качением однородного эллипсоида по плоскости. Все поведение системы указывает на наличие инвариантной меры, однако явно она до сих пор не приведена.

Авторы благодарят А. В. Цыганова, А. В. Болсинова за полезные консультации при написании статьи.

Список литературы

[1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854. (*См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.)

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[3] Цыганов А. В. О пуассоновых структурах, возникающих при рассмотрении шара Чаплыгина и его обобщений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 345–353.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.)

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Препятствие к гамильтоновости неголономных систем // Докл. РАН, 2002, т. 387, № 6, с. 764–766.

[6] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. (*См. также:* Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 342 с.)

[7] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616. (*См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.)

[8] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219. (*См. также:* Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 342 с.)

[9] Борисов А. В., Мамаев И. С. О несуществовании инвариантной меры при качении неоднородного эллипсоида по плоскости // Матем. заметки, 2005, т. 77, № 6, с. 930–931.

Invariant measure and hamiltonization of nonholonomic systems

Alexey V. Borisov[1], Ivan S. Mamaev[2]

[1]Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
[1]National Research Nuclear University "MEPhI"
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
[2]Kalashnikov Izhevsk State Technical University
Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia
[1]`borisov@rcd.ru`, [2]`mamaev@rcd.ru`

This paper discusses new unresolved problems of nonholonomic mechanics. Hypotheses of the possibility of Hamiltonization and the existence of an invariant measure for such systems are advanced.

MSC 2010: 37J60, 37J35
Keywords: nonholonomic mechanics, tensor invariant, invariant measure, Poisson structure

Received September 3, 2014, accepted September 24, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 355–359 (Russian)