



УДК: 62.529

MSC 2010: 93B18, 93B52

## Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой

Ю. Л. Караваев, А. А. Килин

В статье рассматривается динамика сфероробота, проводящегося в движение расположенной внутри платформой с омниколесами. Получены уравнения движения сфероробота в рамках неголономной модели и указаны первые интегралы. Найдены частные решения и исследована их устойчивость. Приведен алгоритм управления, реализующий движения сфероробота по произвольной траектории.

Ключевые слова: сфероробот, неголономная связь, омниколесо, динамическая модель, устойчивость

### 1. Введение

Движение объектов в форме сферы уже давно вызывает огромный интерес как у инженеров, так и у исследователей в области механики и динамики. Подтверждением тому является большое количество работ, посвященных свободному [1–8] и вынужденному движению сферических объектов [9–11]. Прототипами современных сферороботов являются самодвижущиеся механические игрушки в форме сферы, появившиеся еще в конце девятнадцатого столетия [12]. Первые модели сферороботов появились в конце двадцатого века, и в течение нескольких лет было создано более десятка различных моделей, реализующих различные

---

Получено 16 января 2015 года

После доработки 10 февраля 2015 года

---

Экспериментальные результаты получены в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01303). Работа Килина А. А. выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам.

---

Караваев Юрий Леонидович

[karavaev\\_yury@istu.ru](mailto:karavaev_yury@istu.ru)

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Килин Александр Александрович

[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



принципы движения. Подробный обзор и преимущества мобильных роботов в форме сферы с различными приводными механизмами представлены в сборнике [13].

В данной статье рассматривается сфероробот, перемещающийся за счет движения омниколесной платформы внутри сферической оболочки (см. рис. 1а). При этом платформа движется на омниколесах, у которых оси вращения роликов повернуты на 45 градусов относительно плоскости колеса. Омниколеса обеспечивают повышенную маневренность по сравнению с традиционными автомобильными кинематическими схемами. Подробное описание конструкции и математической модели омниколеса для качения по плоскости и сфере представлено в [14]. Отметим, что аналогичные колеса можно использовать и для качения по внутренней поверхности сферы. Однако для обеспечения непрерывности контакта роликов со сферической поверхностью профиль колес необходимо скорректировать.

Наиболее близкий по конструкции сфероробот представлен в [15]. Его основное отличие состоит в том, что оси вращения пассивных роликов расположены под углом  $90^\circ$  к оси вращения колеса. В указанной работе выведены кинематические уравнения движения и проведены эксперименты, включающие в себя движение по прямой, окружности и квадрату. Однако ошибка перемещения робота составила от 10 до 50 %, что говорит о недостаточной проработанности кинематической модели.

К сожалению, исследования динамики движения сферороботов мало представлены в литературе. Укажем работы по динамике сферороботов, перемещающихся за счет создания переменного гиросtatического момента (с помощью внутренних роторов) [16–21] и за счет смещения собственного центра масс [22–27]. В указанных работах приведены разнообразные формы уравнений динамики сферороботов и получены управляющие воздействия для реализации движения по типовым траекториям. Отметим, что динамика сферороботов, как правило, описывается неголономными уравнениями, выводу которых посвящено большое количество работ. Мы укажем здесь только работы последних лет, в которых можно найти подробный библиографический обзор [28–31]. Отметим также недавние работы, посвященные исследованию движения сферороботов (или систем близких к ним) в присутствии сил сопротивления различной природы, от сухого трения до движения в вязкой среде [32–37].

Кратко опишем исследования, выполненные в самое последнее время. Исследования движения «вперед-назад» сферического робота с внутренним маятником по негоризонтальным поверхностям представлены в работе [38]. Авторами проведено численное моделирование для спуска сферического робота в кратер и по наклонной плоскости. Исследование устойчивости и вопросы стабилизации данной модели сферического робота с учетом рекуперации энергии при торможении приведены в работах [39, 40]. Алгоритм управления сферороботом подобной конструкции при движении по наклонной плоскости, а также его динамическая стабилизация представлены также в работе [41]. Авторы статей [42, 43] провели численное моделирование динамики сферического ровера, приводящегося в движение силой ветра (в том числе и по неровным поверхностям). В [44] предложена оригинальная конструкция смещения центра масс сферического робота, приведены кинематическая модель, результаты численного моделирования и экспериментальных исследований. Конструкция сфероробота с двумя внутренними маятниками представлена в работе [45]. Помимо уравнений динамики, авторы исследуют нелинейную обратную связь, обсуждаются результаты многочисленных экспериментов. Результаты исследований, представленные в указанных работах, демонстрируют существенное расхождение теории с результатами экспериментальных исследований. Данное обстоятельство подчеркивает сложность и актуальность продолжения работ в направлении развития алгоритмов управления сферическими роботами.

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим модель сфероробота, движущегося по горизонтальной плоскости, как систему тел, состоящую из сферической оболочки радиуса  $R_0$ , внутри которой расположена платформа с тремя одинаковыми омниколесами радиуса  $R_w$  (см. рис. 1). Под омниколесами в данной работе мы подразумеваем меканум-колеса, конструкция и неголономная модель которых представлена в работе [14], где омниколесо моделируется плоским диском, для которого скорость точки контакта с несущей поверхностью направлена вдоль прямой, составляющей постоянный угол с плоскостью колеса. Для описания движения сфероробота рассмотрим три системы координат. Первая система  $OXYZ$  — неподвижная, с ортами  $\alpha, \beta, \gamma$ , вторая система  $Cx'y'z'$  — подвижная, жестко связанная со сферической оболочкой, с ортами  $\xi, \eta, \zeta$ , и третья система  $Cxyz$  — подвижная, жестко связанная с омниколесной платформой, с ортами  $e_1, e_2, e_3$  (см. рис. 1b). Начало координат обеих подвижных систем совпадает с центром сферической оболочки (точка  $C$ ). Конструкцию подвижной платформы будем описывать следующими постоянными (в системе координат  $Cxyz$ ) векторами:  $r_i$  — радиус-векторы центров омниколес,  $n_i$  — единичные векторы, направленные вдоль осей вращения омниколес,  $\alpha_i$  — единичные векторы, задающие направления осей вращения роликов каждого колеса в точках контакта с оболочкой, и  $r_m$  — положение центра масс подвижной платформы с омниколесами.

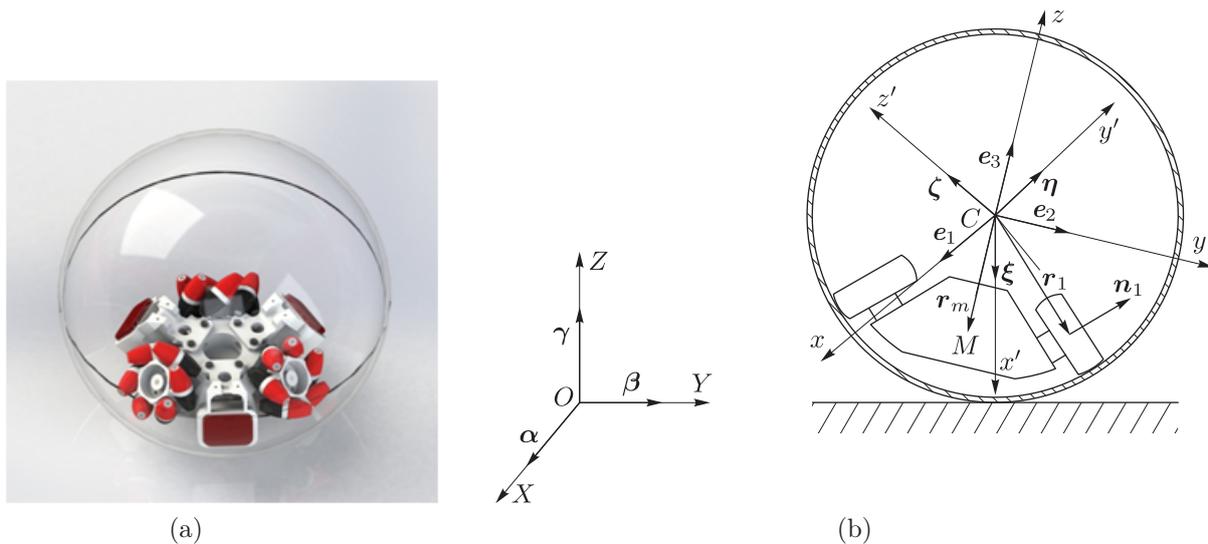


Рис. 1. (a) Трехмерная модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой, (b) схема сфероробота.

Положение системы будем задавать координатами центра сферической оболочки в неподвижной системе координат  $r = (x, y, 0)$ , углами поворота каждого из колес  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  и двумя матрицами, задающими ориентацию в пространстве платформы и сферической оболочки

$$Q = (\alpha, \beta, \gamma), \quad S = (\xi, \eta, \zeta). \quad (2.1)$$

Здесь и далее (если не оговаривается иное) все векторы записаны в проекциях на оси системы координат  $Cxyz$ , жестко связанной с платформой. Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^3 \times SO(3) \times SO(3)$ .

В данных координатах движение сферической оболочки и платформы описывается кинематическими соотношениями [46]

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\omega} \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{S}} = (\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \mathbf{S}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость центра сферы (в проекциях на оси системы  $Cxyz$ ), а матрицы  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\Omega}$  выражаются через компоненты абсолютных угловых скоростей подвижной платформы  $\omega$  и сферической оболочки  $\Omega$  следующим образом:

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом величины  $\omega$ ,  $\Omega$  и  $\mathbf{v}$  являются квазискоростями, а их связь с обобщенными скоростями задана соотношениями (2.2).

Запишем теперь уравнения движения в квазискоростях  $(\omega, \Omega, \mathbf{v}, \dot{\chi})$  с неопределенными множителями для рассматриваемой системы с учетом неголономных связей и управления

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \omega} \times \omega + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \gamma} \times \gamma + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \omega} \right)^T \tilde{\lambda}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \Omega} \times \omega + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Omega} \right)^T \tilde{\lambda} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Omega} \right)^T \lambda, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \omega + \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \lambda, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \dot{\chi}} \right)^T \tilde{\lambda} + \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $L$  — функция Лагранжа,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3)$  — неопределенные множители Лагранжа,  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$  — вектор управляющих моментов, где  $K_i$  — момент сил, приложенный к оси  $i$ -го колеса, а  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  — неголономные связи, описывающие условия непроскальзывания сферической оболочки относительно плоскости

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} - R_0 \Omega \times \gamma = 0 \quad (2.4)$$

и условия непроскальзывания роликов омниколес относительно сферической оболочки [13]

$$G_i = \dot{\chi}_i + \frac{R_0}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) R_w} (\omega - \Omega, \mathbf{s}_i) = 0, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i$ . (Более подробный вывод уравнений движения (2.3) см. в [46].)

Кинетическую энергию рассматриваемой системы можно представить в виде суммы трех слагаемых: кинетической энергии сферической оболочки  $T_0$ , кинетической энергии платформы  $T_p$  и кинетической энергии колес  $T_i$ :

$$T = T_0 + T_p + \sum_{i=1}^3 T_i. \quad (2.6)$$

Кинетическая энергия сферической оболочки и подвижной платформы имеют вид

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2, \quad (2.7)$$

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega}) + m_p (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p), \quad (2.8)$$

где  $m_0$  и  $I_0$  — масса и центральный тензор инерции сферической оболочки,  $m_p$  и  $\mathbf{I}_p$  — масса подвижной платформы и ее тензор инерции относительно центра сферы, а  $\mathbf{r}_p$  — радиус-вектор из центра сферы в центр масс платформы (без омниколес). Кинетическая энергия каждого из колес имеет вид

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}^2 + m_i (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}) + j (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_i) \dot{\chi}_i + \frac{1}{2} j \dot{\chi}_i^2, \quad (2.9)$$

где  $m_i$  и  $\mathbf{I}_i$  — масса  $i$ -го колеса и его тензор инерции относительно точки  $C$ , а  $j$  — осевой момент инерции колес, являющийся одним из собственных чисел тензора инерции  $\mathbf{I}_i$ , то есть  $\mathbf{I}_i \mathbf{n}_i = j \mathbf{n}_i$ . Общую кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} (m + m_0) \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) + m (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m) + \sum_{i=1}^3 j \dot{\chi}_i (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}_i) + \sum_{i=1}^3 j \dot{\chi}_i^2, \quad (2.10)$$

где

$$m = m_p + \sum_{i=1}^3 m_i \text{ — масса подвижной платформы с омниколесами,}$$

$$\mathbf{r}_m = \frac{m_p \mathbf{r}_p + \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{m} \text{ — радиус центра масс подвижной платформы с омниколесами,}$$

$\mathbf{I} = \mathbf{I}_p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{I}_i$  — тензор инерции подвижной платформы с омниколесами относительно центра сферы.

В выбранных обозначениях потенциальная энергия рассматриваемой системы может быть представлена в виде

$$U = mg(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.11)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Определив функцию Лагранжа  $L = T - U$  с помощью соотношений (2.10) и (2.11) и подставив ее в уравнения (2.3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\mathbf{r}_m \times \dot{\mathbf{v}}) + \sum_{i=1}^3 j \ddot{\chi}_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\omega} \times \left( \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^3 j \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \right) + m \mathbf{v} \times (\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\omega}) = \\ = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i \lambda_i - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$I_0 \dot{\Omega} + \boldsymbol{\omega} \times I_0 \Omega = -(R_0 \boldsymbol{\gamma}) \times \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i \lambda_i,$$

$$(m + m_0) \dot{\mathbf{v}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m) + \boldsymbol{\omega} \times ((m_0 + m) \mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m)) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}},$$

$$j \ddot{\chi}_i + j(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}_i) = \lambda_i + K_i,$$

где  $k_i = \frac{R_0}{R_w(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}$ . Из последних двух уравнений (2.12) и производной по времени уравнений связи (2.5) найдем неопределенные множители

$$\begin{aligned} \lambda_i &= jk_i(\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{s}_i) + j(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}_i) - K_i, \quad i = 1, \dots, 3, \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} &= (m + m_0)\dot{\mathbf{v}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_m) + \boldsymbol{\omega} \times ((m_0 + m)\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставив их в уравнения движения и исключив  $\dot{\chi}_i$  и  $\mathbf{v}$  с помощью уравнений связей (2.4), (2.5), получим

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} + \mathbf{J}_{\text{ss}} - \mathbf{J}_{\text{ns}} - \mathbf{J}_{\text{sn}})\dot{\boldsymbol{\omega}} + (\mathbf{J}_{\text{ns}} - \mathbf{J}_{\text{ss}} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{r}_m))\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\ &= - \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{J}_{\text{ns}}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) \times \boldsymbol{\omega} - mR_0 \mathbf{r}_m \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega})) - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}), \\ &(\mathbf{J}_{\text{sn}} - \mathbf{J}_{\text{ss}} + mR_0((\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}))\dot{\boldsymbol{\omega}} + (I_0 + \mathbf{J}_{\text{ss}} + (m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}))\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\ &= -(m + m_0)R_0^2 \boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega})) - mR_0(\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m))) - I_0 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где введены обозначения  $\mathbf{J}_{\text{ss}} = \sum_{i=1}^3 jk_i^2(\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{\text{sn}} = \sum_{i=1}^3 jk_i(\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{n}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{\text{ns}} = \sum_{i=1}^3 jk_i(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ , а тензорное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \|a_i b_j\|.$$

Вместе с уравнением Пуассона (одним из уравнений (2.2))

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.15)$$

уравнения (2.14) образуют замкнутую приведенную систему уравнений.

Данная система допускает два первых интеграла движения

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma = \text{const}, \quad (2.16)$$

где вектор  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\text{ns}} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\omega} + (I_0 + \mathbf{J}_{\text{ns}} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{r}_m) + \\ &+ (m + m_0)R_0^2(1 - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В случае свободного движения ( $\mathbf{K} = 0$ ) к интегралам (2.16) добавляется интеграл энергии, который после подстановки в (2.10) уравнений связи (2.4)–(2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}(m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + \frac{1}{2}I_0\boldsymbol{\Omega}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + mR_0(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m) + \\ &+ (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_{\text{sn}}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_{\text{ss}}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) + mg(\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, даже для свободного движения фазовый поток в девятимерном пространстве  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma})$  расслаивается на шестимерные уровни интегралов (2.16)–(2.18), и в общем случае, по-видимому, является неинтегрируемым. Поэтому интересным представляется поиск интегрируемых случаев системы (2.14)–(2.15) и ее частных решений. Отметим, что



в общем случае свободное движение, описываемое неголономной системой (2.14)–(2.15), может иметь достаточно сложный характер и включать в себя как элементы гамильтонова, так и диссипативного поведения. В частности, в системе могут наблюдаться как простые, так и сложные притягивающие (отталкивающие) множества, включая странные аттракторы различных типов. Подобное поведение для более простых систем с неголономными связями было описано в работах [2, 21, 47–52].

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Уравнение движения для вектора  $\mathbf{M}$  не зависит от управляющих воздействий и имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.19)$$

Выразив  $\boldsymbol{\Omega}$  в зависимости от  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{M}$  из уравнения (2.17) и подставив результат в уравнения движения, можно получить замкнутую систему в переменных  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ . Однако получающееся уравнение для  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  слишком громоздко, поэтому мы не будем его здесь приводить. Отметим также, что в случае отсутствия силы тяжести вектор  $\mathbf{M}$  сохраняется в абсолютном пространстве и, по-видимому, является обобщением сохраняющегося вектора кинетического момента относительно точки контакта в более простых задачах о качении сферических тел по плоскости [16, 17, 53, 54].

### 3. Частные решения

Найдем далее неподвижные точки системы (2.14)–(2.15), являющиеся ее наиболее простыми частными решениями. Прежде чем искать неподвижные точки системы, докажем простое утверждение о характере движения сфероробота в абсолютном пространстве, соответствующего неподвижным точкам приведенной системы.

**Утверждение.** Пусть  $\boldsymbol{\omega}_0$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_0$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_0$  — неподвижная точка приведенной системы (2.14)–(2.15), тогда в абсолютном пространстве ей соответствует движение по траектории с постоянным радиусом кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\mathbf{v}_0^2 \boldsymbol{\omega}_0^2 - (\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{v}_0)^2}}{\mathbf{v}_0^2}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{v}_0 = R_0 \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\gamma}_0. \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Отметим сначала, что из условия непроскальзывания (2.4) следует, что при постоянстве векторов  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  скорость сфероробота (3.2) в проекциях на оси подвижной системы координат является постоянной. Запишем далее выражение для радиуса кривизны траектории, которое по определению имеет вид

$$\rho^{-1} = \frac{|\mathbf{V} \times \dot{\mathbf{V}}|}{|\mathbf{V}|^3}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость сфероробота в проекциях на оси неподвижной системы координат  $OXYZ$ . Выразив данную скорость и ее производную через проекции на оси подвижной системы координат  $\mathbf{V} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$  с учетом (3.2), получим выражение (3.1) для радиуса кривизны траектории.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Аналогичное утверждение справедливо для произвольных систем, описывающих качение сферических тел по плоскости (изменится лишь зависимость скорости  $\mathbf{v}_0$  от переменных приведенной системы). В частности, для систем без внутренних механизмов типа шара со смещенным центром масс угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  совпадают, а следовательно,  $\mathbf{v} = -R_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , то есть шар стоит на месте (возможно, вращаясь вокруг вертикали).

### 3.1. Неподвижные точки приведенной системы

Найдем неподвижные точки приведенной системы (2.14)–(2.15) для свободного движения, которые соответствуют стационарным движениям сфероробота в абсолютном пространстве. Подставив  $\dot{\Omega} = 0$ ,  $\dot{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{K} = 0$  в уравнения (2.15), получим систему алгебраических уравнений для определения неподвижных точек приведенной системы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}\omega + \mathbf{J}_{\text{ns}}(\Omega - \omega) + mR_0(\mathbf{r}_m, \gamma)\Omega) \times \omega - (mR_0(\gamma, \omega)\Omega - mg\gamma) \times \mathbf{r}_m &= 0, \\ ((m + m_0)R_0^2\gamma \times (\Omega \times \omega) + mR_0\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_m)) \times \gamma - I_0\omega \times \Omega &= 0, \\ \gamma \times \omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система (3.4) имеет следующие решения.

1. Два трехпараметрических семейства неподвижных точек,

$$\omega = 0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \gamma = \pm \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|}. \quad (3.5)$$

Данному решению соответствуют такие движения сфероробота, при которых центр масс платформы располагается в наинижней (наивысшей) возможной точке, ее ориентация не изменяется со временем, сферическая оболочка вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ , а центр сфероробота либо остается на месте (при  $\Omega_0 \parallel \gamma$ ), либо движется прямолинейно (при  $\Omega_0 \not\parallel \gamma$ ). Отметим, что так как неголономная связь (2.5) является неудерживающей, то решение со знаком «+» нереализуемо на практике.

2. Двухпараметрическое семейство неподвижных точек, задаваемое соотношениями

$$\begin{aligned} \omega &= \omega\gamma, \quad \Omega = \omega C_1\gamma - \omega \frac{mR_0}{J_0} \mathbf{r}_m, \\ \gamma &= - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{r}_m \times (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m \times \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})}{1 - (\mathbf{r}_m, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} (\mathbf{I} + (C_1 - 1)\mathbf{J}_{\text{ns}} - C_2), \quad \mathbf{b} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} \left( mR_0 C_1 - \frac{mg}{\omega^2} - \frac{R_0}{J_0} \mathbf{J}_{\text{ns}} \right) \mathbf{r}_m,$$

$J_0 = I_0 + (m + m_0)R_0^2$ , а  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\omega$  являются параметрами, два из которых можно считать независимыми, а третий — вычислять из условия  $\gamma^2 = 1$ . При этом независимые параметры можно выразить через значения интегралов движения  $M_\gamma$ ,  $\mathcal{E}$ , подставив (3.6) в соответствующие уравнения. Дальнейшее изучение неподвижных точек может быть направлено на исследование разрешимости получающейся системы уравнений и на определение областей существования решений (3.5)–(3.6) в пространстве первых интегралов. Данный вопрос достаточно сложный, требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки настоящего исследования. Отметим, что в абсолютной системе координат решения (3.6) соответствуют качению сфероробота по окружности радиуса

$$\rho = \frac{mR_0}{J_0} \sqrt{\mathbf{r}_m^2 - (\mathbf{r}_m, \gamma)^2}, \quad (3.7)$$

где  $\gamma$  выражается из (3.6).

Ниже мы остановимся лишь на анализе устойчивости частных решений (3.5).



### 3.2. Устойчивость движения по прямой

Рассмотрим вопрос об устойчивости частного решения (3.5) в линейном приближении. Для этого линеаризуем систему (2.14)–(2.15) вблизи данного решения и получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{z} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1 - \Omega_{01}, \Omega_2 - \Omega_{02}, \Omega_3 - \Omega_{03}, \gamma_1 - \gamma_{01}, \gamma_2 - \gamma_{02}, \gamma_3 - \gamma_{03})$  — отклонение от рассматриваемого решения, постоянные матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеют блочно-диагональный вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{J}_{ss} - \mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{sn} & \mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\boldsymbol{\gamma}_0, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \mathbf{r}_m) & 0 \\ \mathbf{J}_{sn} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}_0) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) & I_0 + \mathbf{J}_{ss} + (m+m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma}_0^2 - \boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Omega}} - mR_0|\mathbf{r}_m|(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0(\boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) + (\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0) & 0 & \frac{mg}{|\mathbf{r}_m|}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \\ -\mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0 - (m+m_0)R_0^2(\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0(\boldsymbol{\gamma}_0 \otimes \boldsymbol{\gamma}_0) + (\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0) & 0 & 0 \\ -\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ , матрицы  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0$  и  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  определены как

$$\tilde{\gamma}_{0ij} = \varepsilon_{ijk}\gamma_{0k}, \quad \tilde{\Omega}_{0ij} = \varepsilon_{ijk}\Omega_{0k}, \quad \hat{\Omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{J}_{ns}\boldsymbol{\Omega}_0)_k,$$

а  $\varepsilon_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты.

Для решения вопроса об устойчивости необходимо найти корни характеристического уравнения системы (3.8)

$$\det(\mu\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0. \quad (3.11)$$

В общем случае уравнение (3.11) имеет достаточно сложный вид, поэтому здесь (и далее при проведении численных расчетов) мы ограничимся исследованием устойчивости при заданных параметрах системы, соответствующих экспериментальному образцу сфероробота, рассмотренному в работах [55, 56]:

$$\begin{aligned} R_0 &= 0.15, \quad R_w = 0.07, \quad \mathbf{r}_m = (0, 0, 0.08), \quad m_0 = 0.8, \\ I_0 &= 0.012, \quad m = 2.5, \quad \mathbf{I} = \text{diag}(0.016, 0.016, 0.023), \\ \mathbf{J}_{ns} &= \mathbf{J}_{sn}^T = \begin{pmatrix} 0.0001767857 & -0.0002500127 & 0 \\ 0.0002500127 & 0.0001767857 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003535714 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}_{ss} &= \begin{pmatrix} 0.001136479 & 4.3 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 4.3 \cdot 10^{-13} & 0.001136479 & -1.414213562 \cdot 10^{-13} \\ 0 & -1.414213562 \cdot 10^{-13} & 0.000757653 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Кроме того, ограничимся рассмотрением случая, когда отсутствует прокручивание сферической оболочки в точке контакта с плоскостью, то есть будем полагать  $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ . В этом

случае семейство решений (3.5) можно параметризовать следующим образом:

$$\omega_0 = (0, 0, 0), \quad \Omega_0 = (-\Omega_0 \sin(\delta), \Omega_0 \cos(\delta), 0), \quad \gamma_0 = (0, 0, 1). \quad (3.13)$$

Здесь  $\Omega_0 = \frac{v}{R_0}$  задает угловую скорость вращения сферической оболочки при качении сфероробота по прямой со скоростью  $v$ , а угол  $\delta$  (как и выше) задает направление движения относительно оси  $OX$ .

После подстановки значений (3.12) в уравнение (3.11) с учетом выбранной параметризации (3.13) получим характеристическое уравнение вида

$$\mu^5 \cdot (\mu^2 + 204.2205) (\mu^2 + 0.00829 \cdot \Omega_0^2 + 204.2205) = 0. \quad (3.14)$$

Как видно из (3.14), собственные числа характеристического уравнения не зависят от угла  $\delta$ , то есть от направления движения. Кроме того, они не имеют положительной вещественной части вне зависимости от величины  $\Omega_0$ . Это позволяет говорить об отсутствии экспоненциальной неустойчивости данного решения. Наличие нулевых собственных чисел говорит о том, что для решения вопроса об устойчивости в полной нелинейной постановке необходимо провести разложение системы (2.14) до более высоких порядков.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что для рассматриваемой конструкции сфероробота решение (3.6) выродается и представляет собой вращение сфероробота на месте, когда сферическая оболочка и внутренняя подвижная платформа вращаются вокруг вертикали с постоянными (но разными) угловыми скоростями  $\Omega_0$  и  $\omega_0$ . В связи с этим мы не будем исследовать устойчивость данных решений.

#### 4. Управление вдоль заданной траектории

Рассмотрим теперь задачу управления рассматриваемой системой в следующей постановке.

*Необходимо определить управляющее воздействие  $\mathbf{K}(t)$ , реализующее движение по заданной траектории  $x(t)$ ,  $y(t)$  при  $t \in [0, T]$ , с заранее заданной зависимостью от времени проекций угловой скорости сферической оболочки на вертикаль  $\Omega_\gamma(t)$ , при известных начальных ориентации  $\alpha(0)$ ,  $\beta(0)$ ,  $\gamma(0)$  и угловой скорости платформы  $\omega(0)$ .*

Разобьем решение данной задачи на несколько этапов.

1. Представим угловую скорость  $\Omega$  в виде

$$\Omega = \Omega_\alpha(t)\alpha + \Omega_\beta(t)\beta + \Omega_\gamma(t)\gamma, \quad (4.1)$$

где  $\Omega_\gamma(t)$  — известная функция времени, а  $\Omega_\alpha(t)$ ,  $\Omega_\beta(t)$  выражаются с помощью уравнения связи (2.5) и первого из кинематических уравнений (2.2) следующим образом:

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{\dot{y}(t)}{R_0}, \quad \Omega_\beta(t) = \frac{\dot{x}(t)}{R_0}. \quad (4.2)$$

2. Исключим управляющие моменты  $\mathbf{K}(t)$  из уравнений (2.14) (сложив первое и второе уравнения системы). В результате вместе со вторым кинематическим уравнением (2.2)

получим замкнутую неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{I} - J_{ns} + mR_0((\mathbf{r}_m, \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{r}_m \otimes \boldsymbol{\gamma}))\dot{\boldsymbol{\omega}} + \\
 & + (J_{ns} + I_0 + (m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma}^2 - \boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}) + mR_0((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{r}_m))\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \\
 & = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + I_0\boldsymbol{\Omega} + J_{ns}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) - mR_0(\mathbf{r}_m \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}))) - mg(\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\gamma}) - \\
 & - (m + m_0)R_0^2(\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}))) - mR_0(\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_m)), \\
 & \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подставив в получившееся уравнение  $\boldsymbol{\Omega}$  в форме (4.1) и численно проинтегрировав данную систему с заданными начальными условиями  $\boldsymbol{\alpha}(0)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(0)$ ,  $\boldsymbol{\gamma}(0)$  и  $\boldsymbol{\omega}(0)$ , получим явную зависимость векторов  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  от времени.

3. Подставив получившиеся решения  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(t)$ ,  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t)$  в одно из уравнений (2.14), найдем зависимость управляющих моментов от времени  $\mathbf{K}(t)$ .

Рассмотрим пример определения управляющих моментов для движения сфероробота по отрезку  $[0, 1]$  без вращения сферической оболочки вокруг вертикали

$$x(t) = 0, \quad y(t) = -\frac{\sin(2\pi t)}{20\pi} + \frac{t}{10}, \quad \Omega_\gamma = 0. \tag{4.4}$$

Результаты численного решения системы (4.3) для угловой скорости подвижной платформы  $\boldsymbol{\omega}$  и вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  приведены на рисунках 2а и 2б. Соответствующие зависимости от времени управляющих моментов, необходимых для реализации траектории (4.4), приведены на рисунке 2с.

Как видно из представленных графиков, в конечной точке угловая скорость подвижной платформы  $\boldsymbol{\omega}$ , а также компоненты вектора  $\boldsymbol{\gamma}_1$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_2$  не равны нулю. Следовательно, после того как сфероробот проедет по прямой в соответствии с управлениями, изображенными на рисунке 2с, он не остановится, а продолжит свободное движение (в общем случае хаотическое). При этом начальными условиями для этого движения будут являться положение и скорости платформы и сферической оболочки в момент отключения управления. Исключение подобных эффектов возможно тремя способами.

1. После остановки продолжать управлять системой, чтобы «заставить» сферическую оболочку оставаться на месте, при этом в неподвижной оболочке омниколесная платформа будет продолжать двигаться. В этом случае необходимо решать систему (4.3) при условии  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = 0$  в промежутке времени  $t > T$  и находить соответствующее управление  $\mathbf{K}(t)$ ,  $t > T$ . Однако данное решение, скорее всего, будет расходиться, а его поиск и анализ требуют проведения отдельного исследования и не являются предметом рассмотрения данной статьи.

2. Подобрать такую зависимость  $\Omega_\gamma(t)$  или скорость прохождения по заданной траектории, чтобы в конечный момент времени  $t = T$  омниколесная платформа приобрела положение и скорость, принадлежащие какому-либо стационарному решению свободной системы. В этом случае после отключения управления сфероробот будет двигаться по данному стационарному решению (в частном случае — стоять). Данный способ подразумевает решение некоторой вариационной задачи относительно скорости прохождения по траектории и (или) зависимости  $\Omega_\gamma(t)$  и является достаточно трудоемким.

Третий способ связан с управлением при помощи гейтов и более подробно представлен в следующем разделе.

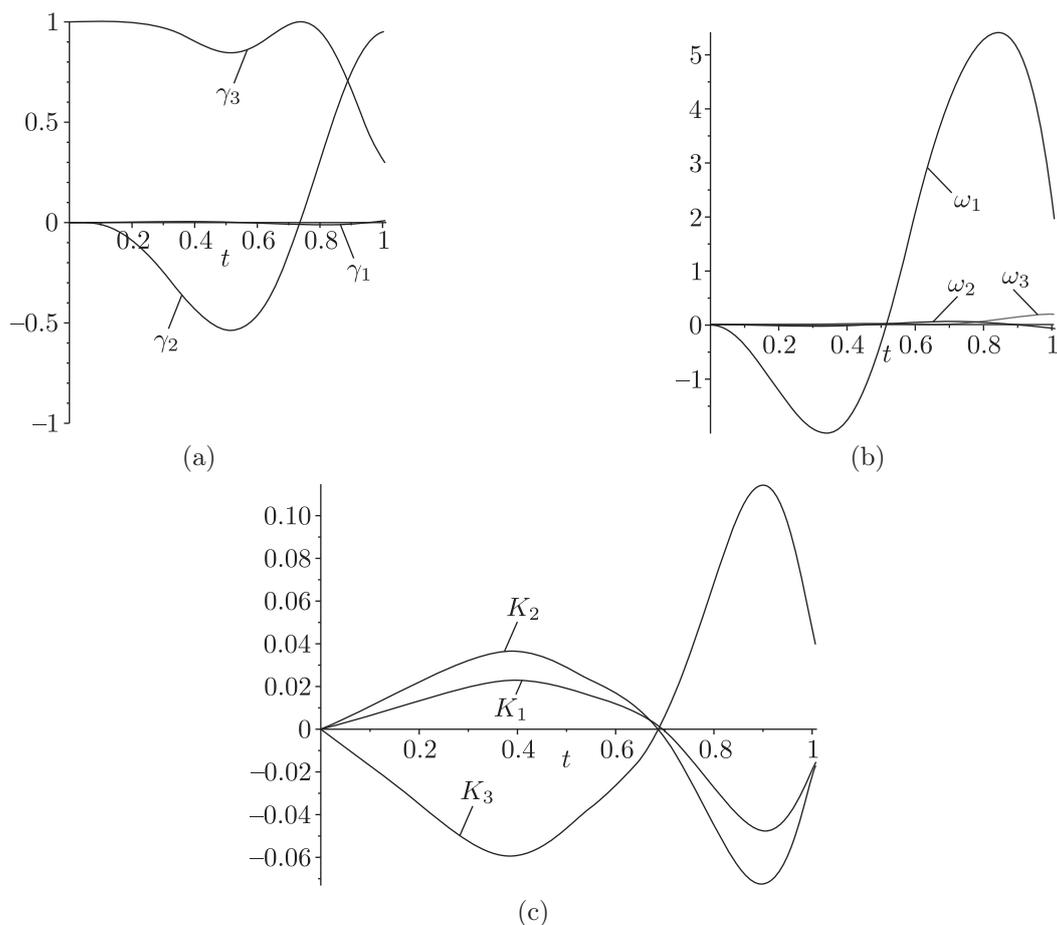


Рис. 2. Зависимости  $\gamma(t)$  (a),  $\omega(t)$  (b) и  $K(t)$  (c) при движении сфероробота по траектории (4.4).

## 5. Управление при помощи гейтов

Данный способ заключается в вычислении управляющих воздействий, при которых сфероробот в начальный и конечный момент времени заведомо движется по какому-либо стационарному решению (в частном случае — стоит). Однако в этом случае траектория движения сфероробота заранее не определена. При этом задача управления сводится к подбору маневра, при котором получающаяся траектория движения сфероробота удовлетворяет необходимым требованиям. Пример такого управления для сфероробота с маятником Лагранжа внутри приведен в [22]. Рассмотрим аналогичный алгоритм поиска подходящего маневра, связывающего два движения по прямой (3.5).

Движения по прямой, соответствующие неподвижной точке (3.5), можно параметризовать четырьмя величинами:  $v$  — скоростью движения по прямой,  $\delta$  — углом наклона прямой относительно оси  $OX$ ,  $\Omega_\gamma$  — угловой скоростью «прокручивания» оболочки в точке контакта с плоскостью,  $\psi$  — постоянным углом прецессии, определяющим ориентацию омниколесной платформы. Напомним, что два других угла Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$  при движении по прямой также постоянны и задаются вектором  $\gamma \parallel r_m$ . Данные параметры связаны с векторами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\Omega$  следующим образом:

$$\Omega = \Omega_\gamma \gamma + \frac{v}{R_0} (\cos(\delta)\beta - \sin(\delta)\alpha), \quad \operatorname{tg}(\psi) = -\frac{\beta_3}{\alpha_3}. \quad (5.1)$$

Нетрудно показать, что справедливо следующее

**Утверждение.** Пусть при  $t < 0$  сфероробот движется по прямой в соответствии с решением (3.5) с параметрами  $v_0, \delta_0, \Omega_{\gamma_0}, \psi_0$ . Потребуем, чтобы при совершении маневра вектор  $\gamma$  и величина  $\omega_\gamma$  являлись заданными функциями времени

$$\gamma = \gamma(t), \quad \omega_\gamma = \omega_\gamma(t), \quad t \in [0, T],$$

такими, что

$$\gamma(0) = \gamma(T) = \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|}, \quad \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(T) = 0, \quad \omega_\gamma(0) = \omega_\gamma(T) = 0.$$

Тогда после совершения маневра (при  $t > T$ ) сфероробот будет также двигаться по прямой с параметрами  $v_f, \delta_f, \Omega_{\gamma_f}, \psi_f$ , которые связаны с векторами  $\alpha(T), \beta(T), \Omega(T)$  соотношениями, аналогичными (5.1). При этом зависимости  $\alpha(t), \beta(t), \Omega(t)$  находятся из решения первых трех уравнений системы (4.3), в которых вектор  $\omega$  является известной функцией времени и выражается через  $\gamma(t)$  и  $\omega_\gamma(t)$  следующим образом:

$$\omega(t) = \gamma(t)\omega_\gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \times \gamma(t).$$

Управления, реализующие данный маневр, можно получить, подставив  $\omega(t), \Omega(t)$  и  $\gamma(t)$  в одно из уравнений (2.14), а явный вид траектории сфероробота, соединяющей два движения по прямой, можно получить, проинтегрировав первое из кинематических уравнений (2.2).

В качестве примера рассмотрим управления сферороботом, реализующие разгон из состояния покоя и поворот во время движения по прямой. Вектор  $\gamma$ , задающий маневр (гейт), представим в виде

$$\gamma(t) = (\sin(\theta(t)) \cos(\varphi(t)), \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \cos(\theta(t))), \quad (5.2)$$

где углы Эйлера  $\varphi(t), \theta(t)$  определяют ориентацию подвижной платформы во время маневра. Зависимости  $\varphi(t), \theta(t), \omega_\gamma(t)$  для обоих маневров выберем в виде

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin^2(\pi t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 = 0, \quad \omega_\gamma(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (5.3)$$

где  $\theta_{\max}$  при численных расчетах будем принимать равным 0.2. Отличие указанных двух маневров заключается только в разных начальных условиях. Разгону из состояния покоя соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = 0, \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0), \quad (5.4)$$

а повороту при начальном движении по прямой соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = (-1, 0, 0), \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0). \quad (5.5)$$

Результаты численного решения системы уравнений (4.3) для маневра (5.3) с начальными условиями (5.4) и (5.5) изображены на рисунках 3 и 4 соответственно.

Как видно из рисунка 3, в силу отсутствия осевой симметрии конструкции омниколесной платформы, изменение  $\gamma(t)$  в вертикальной плоскости на сфере Пуассона ( $\varphi = \text{const}$ ) приводит к криволинейному (хотя и довольно близкому к прямой) движению сфероробота.

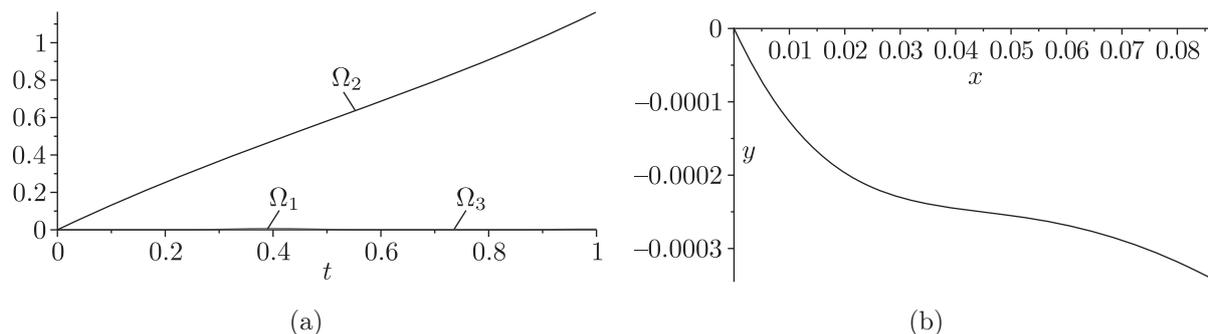


Рис. 3. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (a) и траектория движения  $y(x)$  (b) сфероробота при разгоне в соответствии с начальными условиями (5.4).

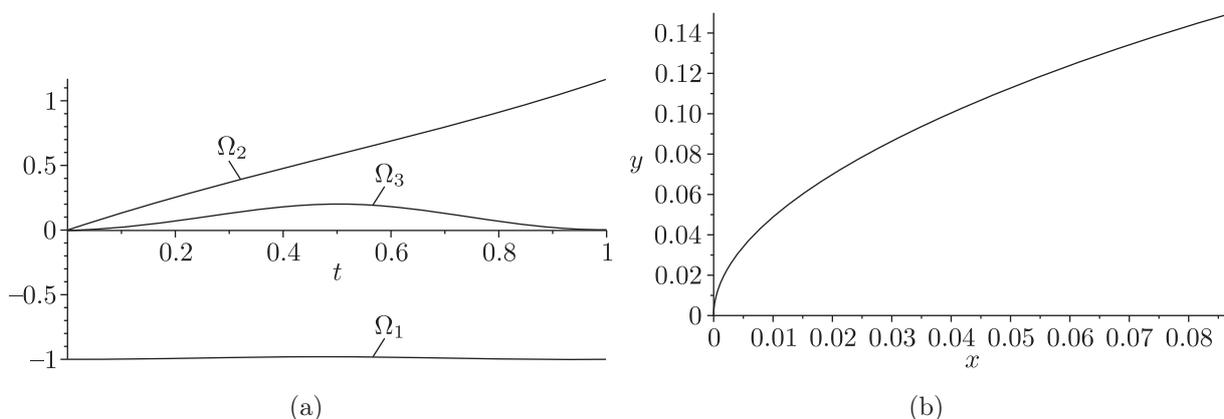


Рис. 4. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (a) и траектория движения  $y(x)$  (b) сфероробота при повороте в соответствии с начальными условиями (5.5).

Это отличает данную систему от сфероробота с маятником Лагранжа, где подобные управления приводят к чисто прямолинейному движению.

Используя приведенную выше процедуру, можно получить (численную) зависимость параметров финального движения от параметров начального движения и маневра

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{f}(\mathbf{p}_0, \theta_{\max}, \varphi_0), \quad (5.6)$$

где введено обозначение  $\mathbf{p} = (v, \delta, \Omega_\gamma, \psi)$ . Обратив любые два уравнения системы (5.6) (например, для  $v$  и  $\delta$ ), можно получить (численную) зависимость  $\theta_{\max}$  и  $\varphi_0$  от параметров начального и конечного движений

$$(\theta_{\max}, \varphi_0) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}_0, v_f, \delta_f). \quad (5.7)$$

Данная зависимость включает в себя только два параметра конечного движения, оставшиеся два параметра ( $\Omega_\gamma, \psi$ ) находятся из уравнений (5.6). Отметим, что выбранная пара уравнений (5.6) не всегда разрешима относительно  $\theta_{\max}$  и  $\varphi_0$ . Условия их разрешимости определяют ограничения на возможные маневры, совершаемые с помощью зависимости (5.3).

Таким образом, используя численную зависимость (5.7), можно определить параметры маневра  $\theta_{\max}$  и  $\varphi_0$ , которые позволят повернуть на заданный угол с ускорением (замедлением) до заданной скорости. При этом параметры конечного движения ( $\Omega_{\gamma_f}, \psi_f$ ) не контролируются, а значит, после маневра омниколесная платформа будет двигаться с другой

ориентацией (по сравнению с начальной) и оболочка может приобрести некоторую закрутку вокруг вертикали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для полностью контролируемого маневра необходимо рассмотреть четырехпараметрическую зависимость  $\gamma(t)$ ,  $\omega_\gamma(t)$  и потребовать разрешимости уравнений (5.6) относительно введенных параметров.

## 6. Заключение

В заключение перечислим основные результаты, изложенные в статье, и оставшиеся открытыми вопросы.

1. Получены уравнения динамики сфероробота с внутренней омниколесной платформой в рамках неголономной модели; для данных уравнений указаны первые интегралы движения и найдены частные решения, соответствующие движению сфероробота по прямой либо окружности.
2. Исследована устойчивость свободного движения сфероробота по прямой в рамках линейного приближения при фиксированных параметрах сфероробота. Интересно было бы провести анализ устойчивости данного решения в зависимости от параметров сфероробота. Также интерес представляет исследование устойчивости свободного движения по окружности.
3. Разработан алгоритм управления, позволяющий реализовать движение сфероробота по произвольной траектории. Недостаток данного алгоритма заключается в том, что после завершения качения вдоль заданной траектории и отключения управления сфероробот продолжает свободное движение, которое в общем случае является хаотическим.
4. Для исключения указанного недостатка разработан численный алгоритм построения элементарных маневров (гейтов), позволяющих переходить с одного стационарного движения на другое. Данный алгоритм проиллюстрирован на примере разгона сфероробота и поворота при начальном движении по прямой.

## 7. Благодарности

Авторы благодарят А. В. Борисова и И. С. Мамаева за плодотворные обсуждения полученных результатов.

## Список литературы

- [1] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [2] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [3] Rutstam N. High frequency behavior of a rolling ball and simplification of the separation equation // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 226–236.
- [4] Borisov A. V., Mamaev I. S. Topological analysis of an integrable system related to the rolling of a ball on a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 356–371.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of the Chaplygin ball with a fluid-filled cavity // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 5, pp. 490–496.

- [6] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [7] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 2, pp. 198–213.
- [8] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Stability of steady rotations in the nonholonomic Routh problem // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 4, pp. 239–249.
- [9] Chase R., Pandya A. A review of active mechanical driving principles of spherical robots // Robotics, 2012, no. 1, pp. 3–23.
- [10] Crossley V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, Pa., 2006. 6 pp.
- [11] Болотин С. В., Попова Т. В. Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 51–58. См. также: Bolotin S. V., Popova T. V. On the motion of a mechanical system inside a rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 159–165.
- [12] Ylikorpi T., Suomela J. Ball-shaped robots // Climbing and walking robots: Towards new applications / H. Zhang (Ed.). Vienna: InTech, 2007. 546 pp.
- [13] Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваев (ред.). Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 532 с.
- [14] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 4, с. 785–801.
- [15] Chen W.-H., Chen Ch.-P., Yu W.-Sh., Lin Ch.-H., Lin P.-Ch. Design and implementation of an omnidirectional spherical robot Omnicron // IEEE/ASME Internat. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (Kachsiung, Taiwan, 2012), pp. 719–724.
- [16] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [17] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.
- [18] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 126–143.
- [19] Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors // IEEE Trans. on Robotics, 2014, vol. 30, no. 4, pp. 993–1002.
- [20] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA, 14–18 May, 2012), pp. 3226–3231.
- [21] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
- [22] Иванова Т. Б., Пивоварова Е. Н. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 507–520.
- [23] Koshiyama A., Yamafuji K. Design and control of an all-direction steering type mobile robot // Int. J. Robot. Res., 1993, vol. 12, no. 5, pp. 411–419.
- [24] Баландин Д. В., Комаров М. А., Осипов Г. В. Управление движением сферического робота с маятниковым приводом // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2013, № 4, с. 150–163.
- [25] Kayacan E., Bayraktaroglu Z. Y., Saeys W. Modeling and control of a spherical rolling robot: A decoupled dynamics approach // Robotica, 2012, vol. 30, no. 12, pp. 671–680.
- [26] Yoon J.-Ch., Ahn S.-S., Lee Y.-J. Spherical robot with new type of two-pendulum driving mechanism // Proc. of the 15th IEEE Internat. Conf. on Intelligent Engineering Systems (INES), 2011, pp. 275–279.

- [27] Zhao B., Li M., Yu H., Hu H., Sun L. Dynamics and motion control of a two pendulums driven spherical robot // IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010, pp. 147–153.
- [28] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: Отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616. *См. также:* Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.
- [29] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [30] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [31] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем // Сиб. матем. журн., 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.
- [32] Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 100–117.
- [33] Takano H. Spin reversal of a rattleback with viscous friction // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 1, pp. 81–99.
- [34] Mamaev I. S., Ivanova T. B. The dynamics of a rigid body with a sharp edge in contact with an inclined surface in the presence of dry friction // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 1, pp. 116–139.
- [35] Ivanova T. B., Pivovarova E. N. Comments on the paper by A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev «How to control the Chaplygin ball using rotors: 2» // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 1, pp. 140–143.
- [36] Burlakov D., Treschev D. A rigid body on a surface with random roughness // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 18, no. 3, pp. 296–309.
- [37] Borisov A. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Mamaev I. S. The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 6, pp. 607–634.
- [38] Hogan F. R., Forbes J. R. Modeling of spherical robots rolling on generic surfaces // Multibody Syst. Dyn., 2014, 19 pp.
- [39] Forbes J. R., Barfoot T. D., Damaren Ch. J. Dynamic modeling and stability analysis of a power-generating tumbleweed rover // Multibody Syst. Dyn., 2010, vol. 24, no. 4, pp. 413–439.
- [40] Hogan F. R., Forbes J. R., Barfoot T. D. Rolling stability of a power-generating tumbleweed rover // J. of Spacecraft and Rockets, 2014, vol. 51, no. 6, pp. 1895–1906.
- [41] Yu T., Sun H., Jia Q., Zhang Y., Zhao W. Stabilization and control of a spherical robot on an inclined plane // Res. J. Appl. Sci. Eng. Technology, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 2289–2296.
- [42] Hartl A. E., Mazzoleni A. P. Dynamic modeling of a wind-driven tumbleweed rover including atmospheric effects // J. of Spacecraft and Rockets, 2010, vol. 47, no. 3, pp. 493–502.
- [43] Hartl A. E., Mazzoleni A. P. Parametric study of spherical rovers crossing a valley // J. Guid. Control Dynam., 2008, vol. 31, no. 3, pp. 775–779.
- [44] Lee J., Park W. Design and path planning for a spherical rolling robot // ASME Internat. Mechanical Engineering Congress and Exposition (San Diego, Calif., Nov. 15–21, 2013): Vol. 4A: Dynamics, Vibration and Control, IMECE2013-64994, 8 pp.
- [45] Ahn S.-S., Lee Y.-J. Novel spherical robot with hybrid pendulum driving mechanism // Adv. Mech. Eng., 2014, vol. 2014, 456727, 14 pp.
- [46] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

- [47] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328.
- [48] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718–733.
- [49] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: Неголономная модель // *УФН*, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [50] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [51] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // *Докл. РАН*, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [52] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a celtic stone // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 521–538.
- [53] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Generalized Chaplygin's transformation and explicit integration of a system with a spherical support // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 170–190.
- [54] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.
- [55] Килин А. А., Караваев Ю. Л. Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 4, с. 497–511.
- [56] Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 1, с. 113–126.
- [57] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [58] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [59] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.

## The dynamic of a spherical robot with an internal omniwheel platform

Yury L. Karavaev<sup>1</sup>, Alexander A. Kilin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

<sup>2</sup>Udmurt State University  
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>karavaev\_yury@istu.ru, <sup>2</sup>aka@rcd.ru

The dynamic model for a spherical robot with an internal omniwheel platform is presented. Equations of motion and first integrals according to the non-holonomic model are given. We consider particular solutions and their stability. The algorithm of control of spherical robot for movement along a given trajectory are presented.

MSC 2010: 93B18, 93B52

Keywords: spherical robot, dynamical model, non-holonomic constraint, omniwheel, stability

Received January 16, 2015, accepted February 10, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 187–204 (Russian)

