

## Адиабатический хаос в уравнениях Лиувилля

**К. Г. Тронин**

Институт компьютерных исследований  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1  
E-mail: kg@rcd.ru

*Получено 2 июня 2005 г.*

Рассмотрим уравнения Лиувилля с периодическими и медленно меняющимися параметрами. Оказывается, что такая система в общем случае демонстрирует хаотическое поведение, которое имеет свои особенности. Сначала мы изложим некоторые общие теоретические методы, основанные на анализе скачков адиабатического инварианта и расщепления сепаратрис, а далее сравним их с результатами компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: адиабатический инвариант, уравнения Лиувилля, численный эксперимент.

**K. G. Tronin**

### Adiabatic chaos in Liouville's equations

A system of Liouville's equations with slowly varying time-periodic parameters is considered. The system is shown to exhibit chaotic behavior with unique features. We start with the presentation of some general theoretical methods based on the analysis of abrupt changes of adiabatic invariants and separatrix splitting and then compare theoretical results with results obtained from numeric experiments.

Keywords: adiabatic invariant, Liouville's equations, numeric experiment.

Mathematical Subject Classifications: 65-05, 65-P99, 70H11.

# 1. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы. Скачки адиабатического инварианта и адиабатический хаос

Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с одной степенью свободы и медленно меняющимся временем, т. е. явно зависящую от  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Отметим, что тем не менее все приведенные ниже рассуждения справедливы для автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, эволюцию которых можно разделить на медленную и быструю составляющую. Некоторые из таких систем рассмотрены в работах [8, 3].

Для системы с полутора степенями свободы

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.1)$$

мы предполагаем, что гамильтониан  $H = H(p, q, \tau)$  является аналитической (гладкой) функцией переменных  $q, p, \tau$  и периодически зависит от фазы  $q$  и медленного времени  $\tau = \tau_0 + \varepsilon t$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$  — малый параметр,  $0 \leq \tau_0 < 1$ ). Периодическая зависимость гамильтониана от времени позволяет определить «медленное» отображение Пуанкаре, как отображение за период  $\tau \bmod 2\pi \left( t \bmod \frac{2\pi}{\varepsilon} \right)$ . Предполагается также, что при каждом фиксированном значении параметра  $\tau = \tau_0$ , «замороженная» интегрируемая система с гамильтонианом  $H = H(p, q, \tau_0)$  имеет сепаратрисы одного и того же (гомо- или гетероклинического) типа. Уравнениями типа (1.1) описываются, например, маятник с медленно меняющейся длиной и некоторые физические проблемы, возникающие в теории плазмы [1, 15]. Для описания эволюции системы вдали от сепаратрис используют адиабатическое и улучшенное адиабатическое приближение, соответствующие двум первым шагам стандартной теории возмущений [5]. Если в системе (1.1) перейти к переменным действие-угол  $(I, \varphi)$  для каждого фиксированного  $\tau_0$  («замороженная» система), то уравнения движения примут вид

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \quad (1.2)$$

а гамильтониан можно представить в форме

$$H = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \tau).$$

Согласно теореме об усреднении в одночастотных системах [1] переменная действие ( $I$ ) вдали от сепаратрис испытывает изменение порядка  $\varepsilon$  на временах  $\frac{1}{\varepsilon}$ , т. е. является адиабатическим инвариантом (АИ) (согласно КАМ-теории это справедливо на произвольных временах при выполнении условий нелинейности).

Более точное описание поведения системы (1.2) может быть получено при выполнении следующего шага теории возмущений. Можно определить улучшенный адиабатический инвариант (УАИ)  $J$  в виде

$$J = I + \varepsilon u(p, q, \tau), \quad u = -\frac{1}{\omega_0} (H_1(p, q, \tau) - \langle H_1 \rangle),$$

где скобками  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по  $\varphi$ . Уравнения движения для УАИ

$$\dot{J} = -\varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial J}. \quad (1.3)$$

Таким образом улучшенный адиабатический инвариант вдали от сепаратрис испытывает колебания порядка  $\varepsilon^2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вблизи сепаратрисы адиабатическое описание системы уже не является корректным и нуждается в уточнении. В зависимости от начальных условий возможны два типа поведения адиабатического инварианта в области вблизи сепаратрисы.

В первом случае, соответствующем прохождению через резонанс, траектория проходит его, не застревая, а УАИ испытывает скачок порядка  $\varepsilon$  [5, 14], в то время как в областях вдали от сепаратрисы изменение УАИ имеет величину порядка  $\varepsilon^2$ . Как замечено в работе [13], если изменение УАИ согласовано с изменением фазы, в этом случае возможно появление периодических устойчивых траекторий. Мера островов устойчивости вблизи них при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет порядок единица, хотя и очень мала ( $\sim 2\%$ ).

Во второй ситуации [1], соответствующей захвату в резонанс, точка, попавшая в окрестность сепаратрисы, начинает двигаться так, чтобы приблизительно сохранялась возникшая соизмеримость, что приводит к изменению УАИ на величину порядка 1 за времена порядка  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Однако, как показано в [1], мера таких траекторий при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к нулю как  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Здесь мы рассматриваем траектории, которые не захватываются в резонанс и не лежат в окрестности периодических траекторий вблизи сепаратрисы. Мера таких траекторий близка к полной и для них применимо вероятностное описание.

В работе [5] получены формулы для величины скачка УАИ  $\Delta J$  при переходе через сепаратрису. Величина скачка является функцией от случайной величины с заданным распределением. При многократном прохождении через сепаратрису изменения АИ носят характер блужданий со случайным шагом и возникает ненулевая вероятность обнаружить значение УАИ, отличающееся от начального на величину порядка единицы через  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$  шагов отображения Пуанкаре. Такого рода стохастические процессы в динамической системе обычно называют *адиабатическим хаосом*. Отметим, однако, что возникновение такого хаоса сопровождается также обычными эффектами — расщеплением сепаратрис и появлением квазислучайных колебаний [15, 11]. Для адиабатического хаоса характерно то, что *область хаоса не уменьшается при  $\varepsilon \rightarrow 0$*  в отличие от стандартной ситуации [1, 9].

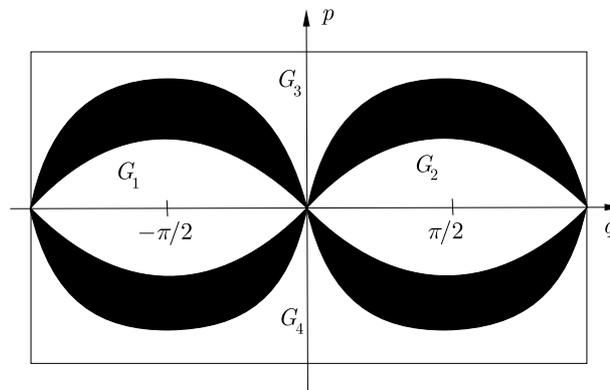


Рис. 1. Сепаратрисы системы (2.4) при  $\delta = \delta_{min} = \frac{1}{4}$  и  $\delta = \delta_{max} = \frac{3}{4}$ .

Общие формулы для скачка адиабатического инварианта в гамильтоновых системах, а также их применение к различным задачам механики и физики приведены в [5, 14, 6, 10]. В разд. 2 рассматривается система, сепаратрисы которой при фиксированных  $\tau = \tau_0$  находятся в областях, заштрихованных на рис. 1. Если фазовый портрет «замороженной» системы остается симметричным относительно оси  $Op$  (рис. 2), то для траекторий, пересекающих сепаратрису величина скачка УАИ вычисляется по формуле

$$\Delta J = -\frac{\varepsilon \Theta(\tau^*) a}{2\pi} \ln 2 \sin \pi \xi + \mathcal{O} \left( \varepsilon^{3/2} \left( |\ln \varepsilon| + \frac{1}{1-\xi} \right) \right), \quad (1.4)$$

где  $\Theta(\tau) = \frac{dS}{dt}$  — скорость изменения площади области, ограниченной одной из сепаратрис,  $\tau^*$  — момент выхода на сепаратрису, который определяется из уравнения  $I(\tau^*) = \frac{S(\tau^*)}{2\pi}$ ,  $a = \left[ -\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right\| \right]^{-1/2}$ . Значение  $\xi \in (0, 1)$  при малом изменении ( $\sim \varepsilon$ ) начальных условий изменяется на величину  $\sim 1$ , поэтому  $\xi$  можно считать случайной величиной, распределение которой в силу гамильтоновости системы следует считать равномерным [5]. Для несимметричных областей формула (1.4) усложняется [5].

## 2. Динамика твердого тела с медленно меняющимися параметрами

Уравнения Лиувилля [3] имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \mathbf{K}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  — матрица с элементами  $a_i = 1/I_i$  ( $I_i$  — главные моменты инерции), вектор  $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$  описывает постоянный гиростатический момент в теле.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Напомним, что если  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}$  не зависят от времени, то получается система Жуковского–Вольтерра [4]. В случае явной зависимости  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{K}(t)$  от времени уравнения (2.1) изучались Ж. Лиувиллем, который также заметил ряд простейших интегрируемых случаев. Более полное изучение интегрируемости и доказательство неинтегрируемости системы в случае периодической зависимости  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{K}(t)$  от времени методом расщепления сепаратрис выполнено в работе [2]. В работе [2] зависимость от времени не являлась медленной, а система мало отличалась от интегрируемой.

Здесь мы рассмотрим ситуацию, в которой  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{K}$  медленно меняются со временем с периодом  $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ . Уравнения (2.1) можно записать в канонической форме на поверхности интеграла  $M^2 = G^2$ , если воспользоваться заменой переменных

$$M_1 = G\sqrt{1-p^2} \sin q, \quad M_2 = G\sqrt{1-p^2} \cos q, \quad M_3 = Gp. \quad (2.2)$$

Если, кроме того, нормировать время и параметры по формулам  $dt' = (a_3 - a_1)dt$ ,  $\delta = (a_2 - a_1)/(a_3 - a_1)$ ,  $v_i = a_i K_i (a_3 - a_1)$ , то получим каноническую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2)\cos^2 q - v_1\sqrt{1-p^2}\sin q - v_2\sqrt{1-p^2}\cos q - v_3p. \quad (2.3)$$

В случае отсутствия гиростатического момента  $\mathbf{K} = 0$ , гамильтониан (2.3) упрощается

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2)\cos^2 q, \quad \delta = \delta(\tau) = \delta(\tau_0 + \varepsilon t). \quad (2.4)$$

Предположим, что в (2.4) параметр  $\delta$  меняется по закону

$$\delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi\tau \right). \quad (2.5)$$

Для всякого  $\tau = \tau_0$  фазовый портрет «замороженной» системы содержит симметричные сепаратрисы (рис. 2). Зависимость АИ от медленного времени  $\tau$  приведена на рис. 3 (в силу симметрии переменные действия совпадают в областях  $G_1$  и  $G_2$ , и также в  $G_3$  и  $G_4$ ). Жирной линией указана

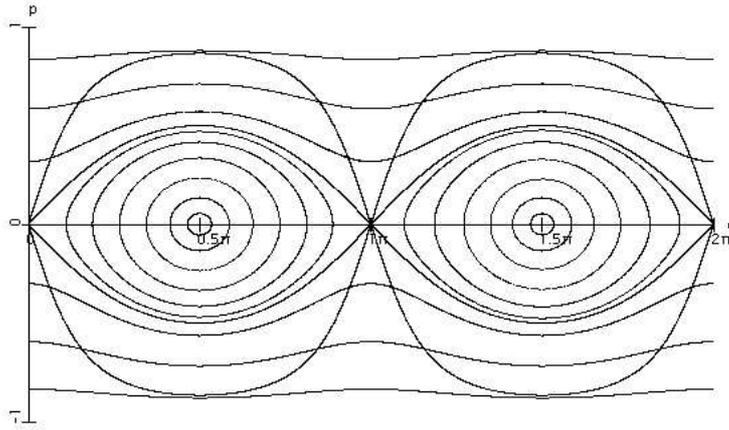


Рис. 2. Фазовый портрет «замороженной» системы (2.4) при  $\tau = 0.5$ .

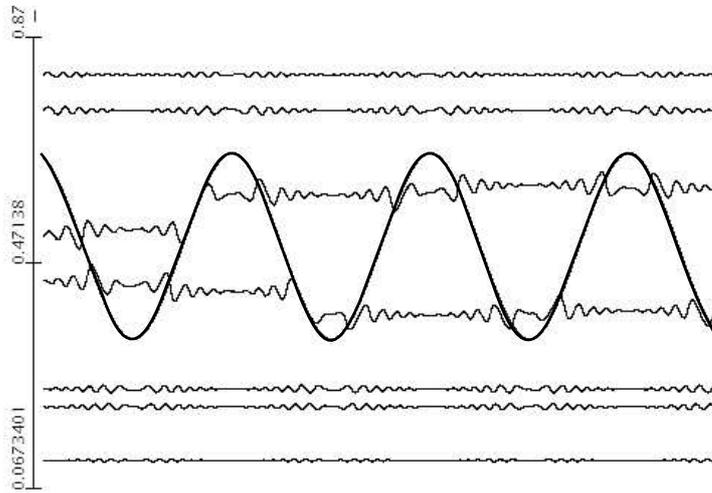


Рис. 3. Зависимость действия от времени для отдельных траекторий из различных областей. (Периодическая кривая соответствует действию для сепаратрисы «замороженной» системы.)

кривая изменения АИ для сепаратрисы «замороженной» системы. Вдали от сепаратрисы движение регулярно, и, с точностью до  $\varepsilon$ ,  $I = \text{const}$ , а области хаоса соответствует отрезок  $[I_{min}, I_{max}]$  (в данном случае  $I_{min} = 1/3$ ,  $I_{max} = 2/3$ ). Для отображения Пуанкаре  $T$  через период  $\tau \bmod 1$  в области, ограниченной кривыми  $I = I_{min}$ ,  $I = I_{max}$ , можно наблюдать стохастическое поведение, а поведение АИ носит характер скачков со случайным шагом порядка  $\varepsilon$ .

Величина скачка УАИ при однократном пересечении сепаратрисы дается выражением

$$\Delta J = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon a \Theta(\tau^*) \ln 2 \sin \pi \xi + \mathcal{O} \left( \varepsilon^{3/2} (|\ln \varepsilon| + (1 - \varepsilon)^{-1}) \right), \quad (2.6)$$

где  $\Theta(t) = \frac{2\delta'}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}$  скорость роста площади под сепаратрисой для гамильтониана (2.4),

$$a = \frac{1}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}.$$

Поскольку за один период по  $\tau$  траектория пересекает сепаратрису дважды, причем во второй величина  $\Theta(\tau^*)$  имеет то же значение с противоположным знаком, то суммарный скачок УАИ равен с точностью до  $\varepsilon$

$$\Delta J = -\frac{\varepsilon a \Theta(\tau^*)}{2\pi} \ln \frac{\sin \pi \xi_1}{\sin \pi \xi_2} = -\varepsilon \frac{\delta'(\tau^*)}{2\pi(1-\delta)\delta} \ln \frac{\sin \pi \xi_1}{\sin \pi \xi_2}, \quad (2.7)$$

причем средние по случайным величинам  $\xi_1$  и  $\xi_2$  равны

$$\langle \Delta J \rangle = 0, \quad \langle (\Delta J)^2 \rangle = \varepsilon^2 \frac{a^2 \Theta^2(\tau^*)}{2\pi^2} \int_0^1 \ln^2(2 \sin \pi \xi) d\xi = \frac{a^2 \Theta^2(\tau^*)}{24}. \quad (2.8)$$

Ниже приведем результаты численного исследования отображения Пуанкаре и скачков УАИ при условии ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  и  $\mathbf{K} = 0$ ). Фазовые портреты для  $\tau_0 = 0.5$  и различных  $\varepsilon$ , приведены на рис. 6 (*a*, *b*, *v*). Видно, что с уменьшением  $\varepsilon$  область хаоса уменьшается, но остается ограниченной кривыми  $I(p, q, \tau_0) = I_{min}$ . Возникновение хаоса обусловлено случайным изменением УАИ в момент пересечения сепаратрисы. Изменение УАИ через промежуток времени  $\sim 1/\varepsilon$  в зависимости от начальных условий приведено на рис. 4. На этом рисунке по оси  $x$  отложено начальное значение УАИ  $J_0$ , по оси  $y$  скачок  $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2$ . При пересечении сепаратрисы, если не произошел захват в резонанс, УАИ изменяется на величину порядка  $\sim \varepsilon$ . Этим моментам соответствуют невысокие пики на зависимости  $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2(J_0)$ . Если траектория была захвачена в резонанс, тогда  $\Delta J \sim 1$ , и на зависимости  $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2(J_0)$  наблюдаются резкие максимумы. Ширина и высота максимума определяются параметрами и начальными условиями системы (2.4). В некоторых случаях для практически одинаковых в начальный момент траекторий величина УАИ может значительно отличаться после пересечения сепаратрисы (см. рис. 5).

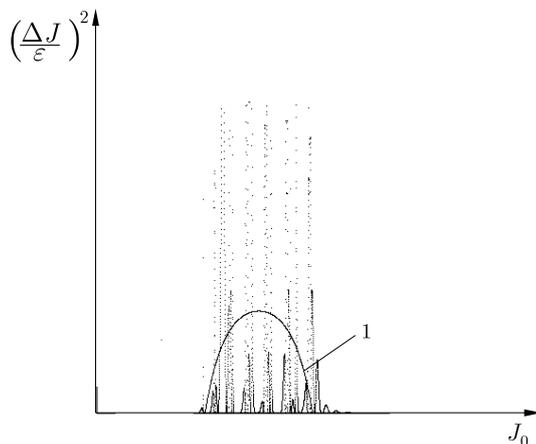


Рис. 4. Изменение УАИ через промежуток времени  $\frac{1}{\varepsilon}$  в зависимости от начального значения  $J_0$ , цифрой 1 обозначена аналитическая зависимость (2.8).

На рис. 4 также приведена аналитическая функция (2.8), которая отображает изменение УАИ, усредненное по  $\varphi$  (см. (1.2)) [5, 12]. Как видно, она является гладкой и не отражает в полной

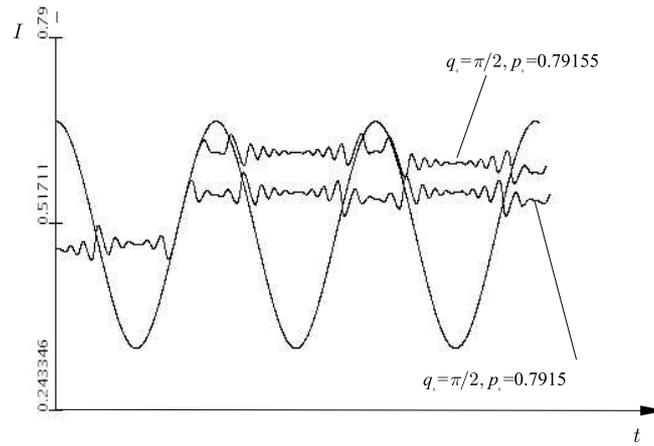


Рис. 5. Демонстрация того, как система (2.4) с практически одинаковыми начальными условиями может значительно различаться в момент  $t \sim \frac{1}{\epsilon}$  после прохождения через сепаратрису.

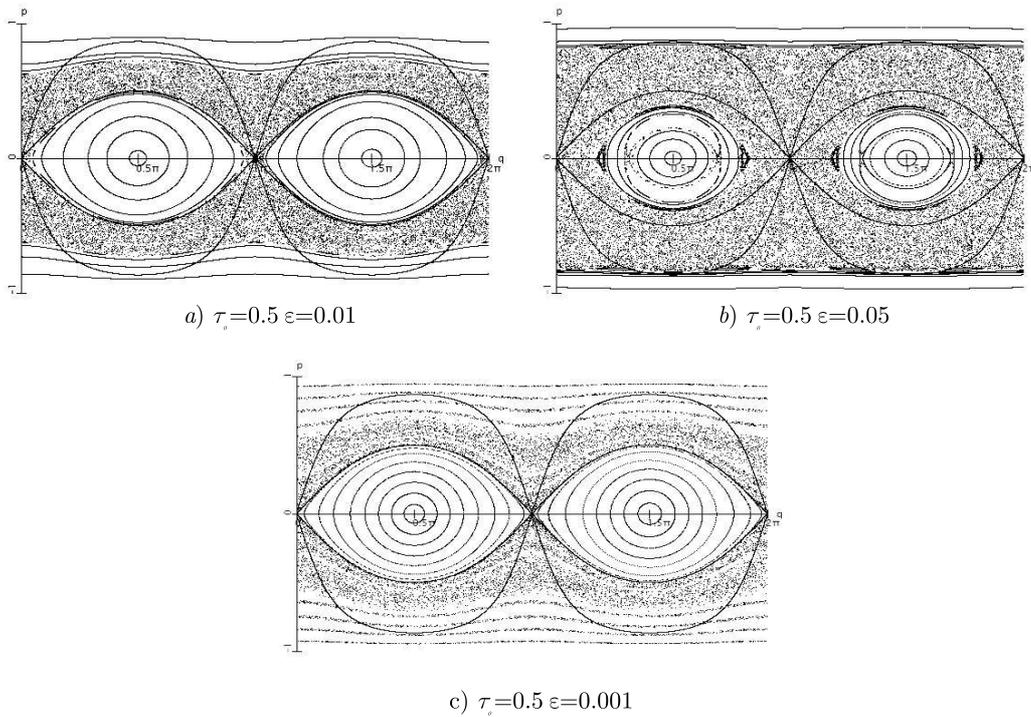


Рис. 6. Фазовый портрет для «медленного» отображения Пуанкаре системы (2.4) при  $\epsilon = 0.01$  (а),  $\epsilon = 0.05$  (б) и  $\epsilon = 0.001$  (в).

мере реальное поведение системы. В то же время использование численных методов позволяет детально исследовать эволюцию системы в зависимости от всего множества начальных условий при фиксированных параметрах. На рис. 7 приведен характерный вид поверхности, описывающий изменение УАИ через промежуток времени  $\sim 1/\epsilon$  в зависимости от начального значения  $J_0$

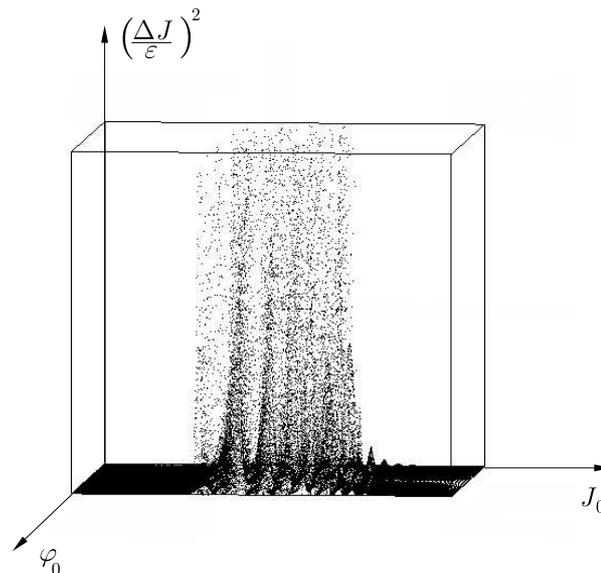


Рис. 7.

и начальной фазы  $\varphi_0$ . Как видно, эта поверхность имеет очень сложный характер и не может быть описана аналитически. Можно также отметить, что в большинстве реальных физических систем даже малые значения  $\varepsilon$ , все-таки, достаточно велики, чтобы можно было корректно использовать формулы (2.8). Приведенный здесь пример исследования скачков УАИ представляет собой один из возможных вариантов численного описания систем с медленно меняющимися параметрами. Другой вариант основан на анализе условий расщепления сепаратрис [3].

### 3. Расщепление сепаратрис и условия адиабатического хаоса

Рассмотрим случай, когда  $K \neq 0$ . Для простоты примем  $K_1 = K_3 = 0$ ,  $K_2 = K(\tau) = K(\varepsilon t)$ . Фазовый портрет «замороженной» системы (интегрируемый случай Жуковского–Вольтерра) имеет вид, показанный на рис. 8. Для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2)\cos^2 q - v\sqrt{1-p^2}\cos q \quad (3.1)$$

справедливы условия возникновения адиабатического хаоса, получающиеся из анализа скачков АИ и условий, полученных методом расщепления сепаратрис. На рис. 9 показан характерный фазовый портрет системы (3.1), аналогично предыдущему случаю хорошо различимы области хаоса, ограниченные кривыми  $I(p, q, \tau_0) = I_{min}$  и  $I(p, q, \tau_0) = I_{max}$ .

Как показано в работах [15, 11, 7], необходимые условия расщепления сепаратрис отображения Пуанкаре системы (3.1) могут быть получены в первом порядке по  $\varepsilon$  из анализа «адиабатического» интеграла Пуанкаре–Мельникова. Если уравнения движения системы (3.1) записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, \delta(z), v(z)), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, \delta(z), v(z)), \\ \dot{z} &= \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\delta(z)$ ,  $v(z)$  — периодические функции с периодом  $2\pi n$ , то в расширенном фазовом пространстве отображение Пуанкаре задается сечением траекторий плоскостями  $z = z_0 + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . Согласно результатам [11] в первом порядке по  $\varepsilon$  величина расщепления сепаратрис на плоскости сечения Пуанкаре одинакова вдоль почти всей сепаратрисы «замороженной» системы и зависит от параметра  $z_0$ , определяющего сечение Пуанкаре. Эта величина пропорциональна адиабатической функции Пуанкаре–Мельникова

$$M_A(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial H}{\partial z}(p_0(t, z_0), q_0(t, z_0), z_0) - \frac{\partial H}{\partial z}(P(z_0), Q(z_0), z_0) \right] dt, \quad (3.3)$$

где  $(p_0, q_0, z_0)$  — решение для сепаратрисы «замороженной» системы. Геометрический смысл функции (3.3) состоит в том, что [11, 7]

$$M_A(z) = \frac{dA}{dz(z)}, \quad (3.4)$$

где  $A(z)$  — площадь под сепаратрисой «замороженной» системы. Для того, чтобы в первом порядке сепаратрисы не расщеплялись, необходимо, чтобы  $A(z) = \text{const}$  для любого  $z$ .

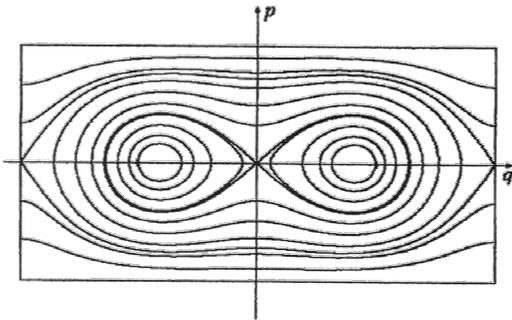


Рис. 8. Фазовый портрет «замороженной» системы (3.2) при  $v = 0.1$ ,  $\tau_0 = 0.5$ .

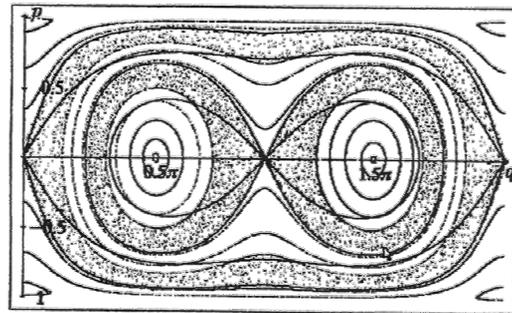


Рис. 9. Фазовый портрет «медленного» отображения Пуанкаре системы (3.2) при  $v = 0.1$ ,  $\delta = 0.5(1 + 0.3 \cos 2\pi\tau)$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $\tau = 0$ .

Рассмотрим систему с гамильтонианом (3.1). В случае  $K = 0$  ( $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ ) сепаратрисы «замороженной» системы имеют вид, показанный на рис. 1, а величина площади  $A(z)$  легко вычисляется

$$A(z) = \int p(H(P(z), Q(z), z))dq = \arcsin \sqrt{\delta(z)}. \quad (3.5)$$

Требование  $A(z) = \text{const}$  приводит к условию  $\delta(z) = \text{const}$ , определяющему обычный случай Эйлера–Пуансо. Вычисление интеграла (3.5) дает выражение

$$M_A(z) = \frac{\delta'(z)}{2\sqrt{\delta(1-\delta)}}, \quad (3.6)$$

которое показывает, что при медленно периодически меняющемся  $\delta$  сепаратрисы возмущенной задачи всегда расщеплены и трансверсально пересекаются. Это приводит к аналитической неинтегрируемости возмущенной задачи, возникновению квазислучайных колебаний и стохастического слоя.

Картина расщепленных сепаратрис при различных значениях параметра  $z_0 = \tau_0$  приведена на рис. 10, 11, 12, на которых видно, что почти вдоль всей длины сепаратрис расстояние между ними постоянно и зависит от  $z_0$ , как это и предсказывается формулой (3.3).

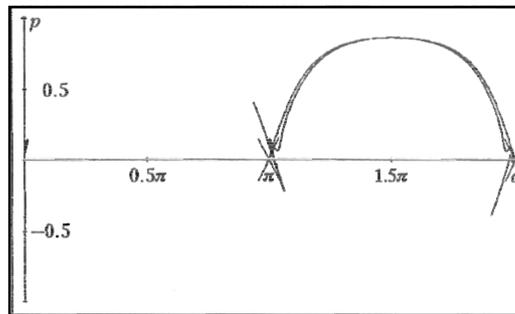
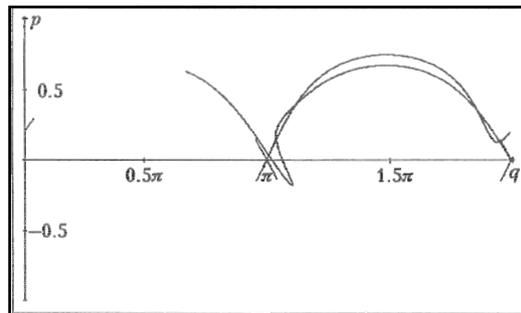


Рис. 10. Сепаратрисы системы (3.2) при  $\tau_0 = -\frac{1}{4}$  ( $\varepsilon = 0,05$ ).

Рис. 11. Сепаратрисы системы (3.2) при  $\tau_0 = 0$  ( $\varepsilon = 0,05$ ).

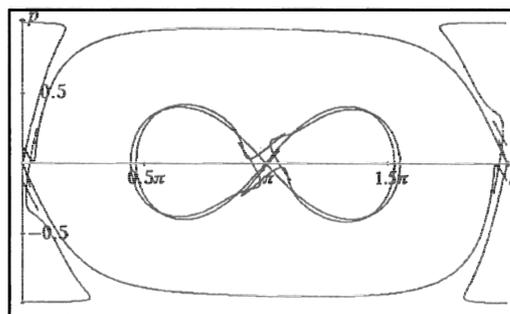
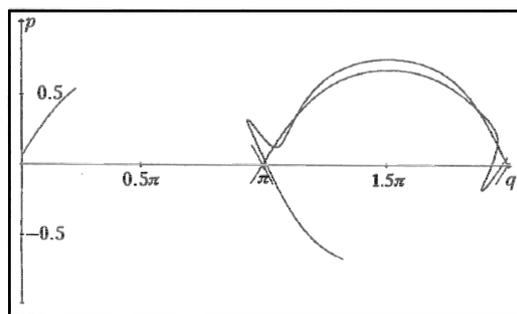


Рис. 12. Сепаратрисы системы (3.2) при  $\tau_0 = \frac{1}{2}$  ( $\varepsilon = 0,05$ ).

Рис. 13. Сепаратрисы системы (3.2) при  $\tau_0 = \frac{1}{4}$  в случае соблюдения условия  $A(z) = \text{const}$  ( $\varepsilon = 0,05$ ).

В случае, когда  $v_1 = v_3 = 0, v_2 = v (0 < v < \delta < 1)$  фазовый портрет «замороженной» системы имеет вид, показанный на рис. 8 (фазовый портрет системы Жуковского–Вольтерра). Заметим, что в данной ситуации условия расщепления разных пар сепаратрис не совпадают и в любом случае одна пара сепаратрис будет расщепляться. Вычисление площади  $A(z)$  для одной пары сепаратрис приводит к выражению

$$A_1(z) = 4 \left[ \arcsin b - \frac{v}{1-\delta} \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}}{a - \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}} \right| \right], \tag{3.7}$$

где  $b = \sqrt{\delta - v}, a = \frac{\delta}{1 - \delta}$ . (Площадь для другой пары  $A_2(z)$  получается из  $A_1(z)$  заменой  $v \rightarrow -v$ ). На рис. 13 приведены сепаратрисы возмущенной задачи при соблюдении условий



$A_1(z) = \text{const}$ ; видно, что одна пара сепаратрис «не расщепляется» — для нее расстояние между сепаратрисами непостоянно вдоль длины и пропорционально  $\varepsilon^2$ , другая пара остается при этом расщепленной пропорционально  $\varepsilon$ . Картина хаоса при выполнении условий «нерасщепления» показана на рис. 14, где хорошо заметно, что стохастический слой вблизи «нерасщепленных» сепаратрис имеет толщину порядка  $\varepsilon$ . Заметим, что для «нерасщепляющихся» сепаратрис  $\Theta \equiv 0$ , поэтому формулы (1.4, 2.6) для скачка УАИ, приведенные выше, несправедливы. Сравним условия возникновения хаоса, полученные из анализа расщепления сепаратрис со сценарием развития адиабатического хаоса вследствие нерегулярных скачков АИ. Если сепаратрисы расщепляются, то в переменных  $I, \tau$  поведение АИ изображено на рис. 15, если  $A_1(z) \equiv \text{const}$  — на рис. 16. Эти рисунки показывают, что условие  $A(z) \equiv \text{const}$  препятствует возникновению адиабатического хаоса в областях, лежащих вне  $\varepsilon$ -окрестности сепаратрисы. Хаос в этой окрестности имеет характерные масштабы порядка  $\varepsilon^2$ .

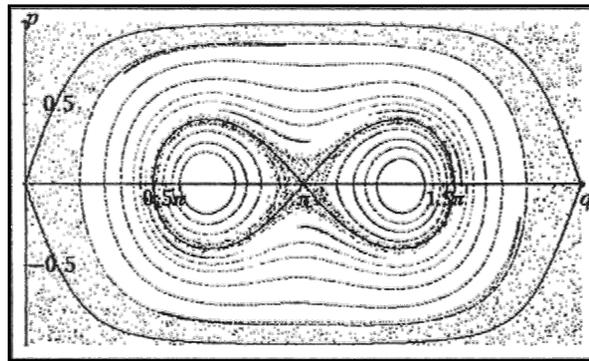


Рис. 14. Фазовый портрет «медленного» отображения Пуанкаре системы (3.2) при  $A(z) = \text{const}$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

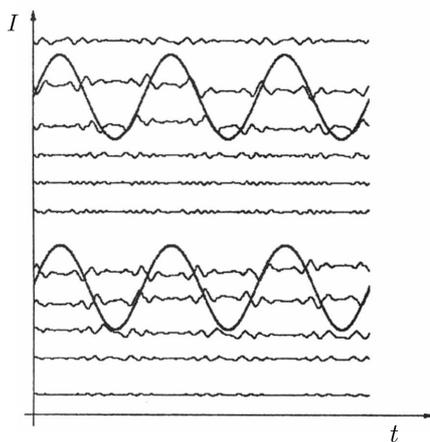


Рис. 15. Зависимость переменной  $I$  для различных траекторий системы (3.2) при  $v = 0.1$ ,  $\delta = 0.5(1 + 0.3 \cos 2\pi\tau)$ . Жирной линией указано действие для сепаратрис «замороженной» системы.

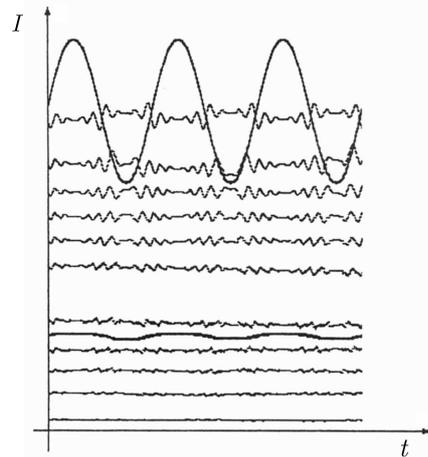


Рис. 16. Зависимость переменной  $I$  для различных траекторий системы (3.2) при  $A_1(z) = 0.8$ .

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики* // УРСС, 2002, 414 с.
- [2] Борисов А. В. *К задаче Лиувилля*, в Сб. *Численное моделирование в задачах механики* // М.: МГУ, 1991, с. 110–118.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Адиабатический хаос в динамике твердого тела* // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 30–36.
- [4] Жуковский Н. Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*, в Собр. соч. // М.: Гостехтеориздат, 1948, т. II.
- [5] Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису* // Физика плазмы, 1986, т. 12, вып. 8, с. 992–999.
- [6] Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы* // ПММ, 1987, т. 51, вып. 5, с. 750–757.
- [7] Нейштадт А. И. *Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром* // ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 625.
- [8] Нейштадт А. И. *Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису и происхождение люка Кирквуда 3:1* // ДАН СССР, 1987, т. 295, № 1, с. 47–50.
- [9] Румер Ю. Б., Рывкин М. М. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика* // М.: Наука, 1972, 400 с.
- [10] Тимофеев А. В. *К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения* // ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 4, с. 1303–1308.
- [11] Капер Т. J., Ковачиц Г. *A geometric criterion for adiabatic chaos* // J. Math. Phys., 1994, V. 35, № 3, p. 1202–1218.
- [12] Neistadt A. I. *Probability phenomena due to separatrix crossing* // Chaos, 1991, V. 1, № 1, p. 42–48.
- [13] Neistadt A. I., Treshev D. V., Sidorenko V. V. *Stable periodic motions in the problem on passage through a separatrix* // Chaos, 1997, V. 7, № 3, p. 2–11.
- [14] Tennyson J. L., Carry J. R., Escande D. F. *Change of the Adiabatic Invariant due to Separatrix Crossing* // Phys. Rev. Lett., 1986, V. 56, № 20, p. 2117–2120.
- [15] S. Wiggins. *Adiabatic chaos* // Phys. Lett. A, 1988, V.128, № 67. p. 339–342.