УДК 531

Об одной заметке Пуанкаре*

А. Шенсине
ASD, IMCCE (UMR 8028 du CNRS), Observatoire de Paris
Departement de Mathématiques
Université D. Diderot
E-mail: Alain.Chenciner@imcce.fr

Получено 10 сентября 2004 г.

30 ноября 1896 года в журнале "*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*" Анри Пуанкаре опубликовал заметку, озаглавленную «О периодических решениях и принципе наименьшего действия». В ней он предложил искать периодические решения плоской задачи трех тел, минимизируя лагранжево действие по петлям в конфигурационном пространстве, которые удовлетворяют заданным ограничениям (эти ограничения эквивалентны тому, что мы задаем их класс гомологий). В случае ньютоновского потенциала, обратно пропорционального расстоянию, «задача столкновения» не позволила Пуанкаре найти решение, поэтому он решил заменить этот потенциал на «потенциал сильного взаимодействия», который обратно пропорционален квадрату расстояния.

В этой работе объясняется природа трудностей, с которыми столкнулся Пуанкаре и показано как эти трудности, спустя столетие, были частично разрешены для ньютоновского потенциала, что привело к открытию новых поразительных семейств периодических решений плоской и пространственной задач n-тел.

Ключевые слова: Пуанкаре, задача трех тел, минимизирующие действие периодические решения.

A. Chenciner
A note by Poincaré

On November 30th 1896, Poincaré published a note entitled "*On the periodic solutions and the least action principle*" in the "*Comptes rendus de l'Academie des Sciences*". He proposed to find periodic solutions of the planar Three-Body Problem by minimizing the Lagrangian action among loops in the configuration space which satisfy given constraints (the constraints amount to fixing their homology class). For the Newtonian potential, proportional to the inverse of the distance, the "collision problem" prevented him from realizing his program; hence he replaced it by a "strong force potential" proportional to the inverse of the squared distance.

In the lecture, the nature of the difficulties met by Poincaré is explained and it is shown how, one century later, these have been partially resolved for the Newtonian potential, leading to the discovery of new remarkable families of periodic solutions of the planar or spatial n-body problem.

Keywords: Poincaré, three-body problem, action minimizing periodic solutions.
Mathematical Subject Classifications: 01-06, 49-03, 49S05, 70F07.

*Данная работа представляет собой русскоязычную версию лекции на испанском языке, прочитанной автором на Facultat de Mathematiques i Estadistica (FME), Universitat Politecnica de Catalunya в июне 2004 (электронная версия на французском языке представлена на http://www-fme.upc.es, а также см. [4]). Пер. с фр. на рус. О. И. Яковенко. См. также авторский пер. на англ.: A. Chenciner. *A note by Poincaré* // Regular and Chaotic Dynamics, 2005, V. 10, №2, p. 1–10.

Задача трех тел: излюбленная тема Пуанкаре

В 1883 г. Пуанкаре опубликовал свою первую заметку, посвященную задаче трех тел, под названием *«О некоторых частных решениях задачи трех тел»*. Он использовал обобщение теоремы о промежуточном значении, которым мы обязаны Кронекеру, для доказательства существования трех видов относительных периодических решений[1] планетарной задачи трех тел. Затем результаты следовали один за другим и увенчались изданием трех томов *«Новых методов небесной механики»* (1892, 1893, 1899 гг.). В этом выдающемся труде Пуанкаре развил свою работу *«О задаче трех тел и уравнениях динамики»*, которая в 1889 г. была удостоена премии короля Швеции[2]; он создал бо́льшую и основную часть теории динамических систем (существование и устойчивость периодических решений, интегральные инварианты, теорема о возвращении, гомоклинические решения, ...). Хотя он иногда использовал некоторые глобальные аргументы, эти работы, главным образом, посвящены теории возмущений (планетарной или лунной), в которой одна из масс преобладает над двумя другими, а также «ограниченной задаче», в которой масса одного тела становится нулевой. Поиск периодических решений сыграл большую роль. Уже в 1884 г., в заключении статьи *«О некоторых частных решениях задачи трех тел»* в журнале *Bulletin astronomique*, которая продолжила работу 1883 г., Пуанкаре объяснял важность периодических решений как «промежуточных орбит»: произвольное решение остается вблизи такого решения в течение длительного промежутка времени, если эти решения имеют близкие начальные условия. Точнее это утверждение было сформулировано в 1892 г. в знаменитом заключении § 36 первого тома *«Новых методов небесной механики»*:

«Более того: это факт, который я не могу доказать строго, но который, тем не менее, кажется мне очень правдоподобным.

Для заданных уравнений формы, определенной в $n^0 13$ и произвольного решения этих уравнений, всегда можно найти периодическое решение (с периодом, который, предположительно, может быть очень большим), такое, что разность между двумя решениями произвольно мала. В действительности, эти решения так ценны для нас, поскольку они, так сказать, единственная возможность проникнуть туда, куда, как предполагалось до сих пор, проникнуть нельзя».

Принцип наименьшего действия: величайший принцип физики

«Рассмотрим теперь что говорит нам принцип наименьшего действия? Он учит нас: для того, чтобы переместиться из начального положения в момент времени t_0 в положение в момент времени t_1, система должна описывать такой путь, что в интервале времени от t_0 до t_1, среднее значение «действия» (т. е. разность между двумя энергиями T и U) было как можно меньше. Первый из этих двух принципов (сохранение энергии) на самом деле является следствием второго. Если обе функции T и U известны, то этого принципа достаточно для определения уравнений движения[3]».

Как выше заметил Пуанкаре, каждое решение $x(t) = \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)\big)$, $t \in [t_0, t_1]$ задачи трех тел, а в более общем случае каждое решение задачи механики консервативных систем, является критической точкой лагранжева действия $\int L(x(t), \dot{x}(t))dt$ (в этой формуле, *лагранжиан*

[1] Во вращающейся системе координат.

[2] См. книгу June Barrow-Greene. *Poincaré and the Three Body Problem* // American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1997.

[3] *Science and Hypothesis*. 1902, глава XII.

это разность $L(x,\dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$ между кинетической и потенциальной энергиями). Именно *критическая точка*, но не обязательно минимум, как об этом говорит нам замечательное высказывание из *«Новых методов...»*:

«До сих пор я использовал сокращенную, но неправильную формулировку, когда говорил, что этот интеграл является минимумом, что, конечно же, никого не могло ввести в заблуждение; я хотел сказать, что первая вариация этого интеграла равна нулю; это условие необходимо для минимума, но не достаточно[4]*»*.

В работе *«Ценность науки»*, Пуанкаре поставил этот принцип рядом с великими законами сохранения (энергии, массы, действия-противодействия), законом рассеяния энергии и принципом относительности. Вследствие своей общности, этот принцип на первый взгляд может появиться скорее в теологии, чем в физике. Я не могу не процитировать несколько предложений из главы VIII работы *«Наука и Гипотеза»*, которые наглядно показывают насколько Пуанкаре был как физиком, так и математиком:

«Утверждение принципа наименьшего действия оказывается для разума шокирующим. При переходе от одной точки к другой молекула вещества, на которую не действуют силы, но вынужденная находиться на поверхности, будет двигаться по геодезической, т.е. по кратчайшему пути.

Кажется, что эта молекула знает то положение, куда она должна переместиться, и предугадывает время, за которое она сможет достигнуть этой точки по тому или иному пути, выбирая из них наиболее удобный. В известном смысле данное предложение преподносит молекулу как живое существо. Очевидно, что было бы лучше заменить это утверждение на менее вызывающее, где, как сказали бы философы, конечные причины, по-видимому, не заменяют эффективных».

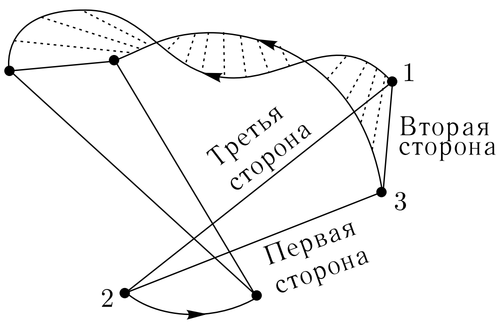
...и вторит последнему вопрос Фейнмана в [12] *(Том I, Глава 26, § 5: Уточнение принципа Ферма)* и ответ на него, данный квантовой электродинамикой в виде формулировки *принципа стационарной фазы* (см. также великолепную работу *«Свет и материя»* [13] того же автора):

«Вместо того, чтобы говорить, что первопричина — это когда мы делаем одно и происходит что-то другое, нужно говорить: мы создали ситуацию, но свет решает какое время будет кратчайшим или предельным, и выбирает путь. Но что при этом происходит и каким образом? Чувствует ли свет соседние пути и сравнивает ли их друг с другом? Ответ, пожалуй, в известном смысле будет утвердительным».

Заметка в журнале «Comp. Rend. Acad. Sci.» от 30 ноября 1896 г.

Эта работа отчасти экзотична по отношению к основной области исследования Пуанкаре задачи трех тел. Она посвящена поиску глобальных невозмущенных решений, а принцип наименьшего действия воспринимается здесь в своем буквальном значении: осуществляется поиск *минимумов*, а не просто стационарных точек действия вдоль путей в конфигурационном пространстве, которые удовлетворяют заданным ограничениям! Точнее, Пуанкаре предложил находить периодические решения плоской задачи трех тел (с произвольными массами), обладающие следующим свойством: после момента времени T (период), одна сторона треугольника, образованного тремя телами поворачивается на некоторый общий угол θ, вторая на угол $\theta + 2k\pi$,

[4] *Новые методы небесной механики*, 1899, том III, глава XXIX, $n^o 341$.



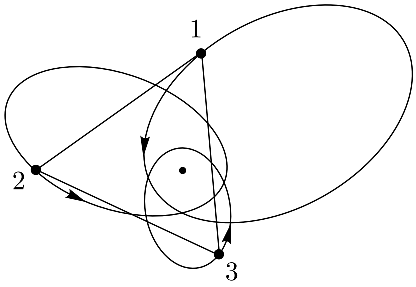


Рис. 1. Относительная петля типа Хилла: $k = -1, l = 0$ и гомографическое решение: $k = l = 0$.

а третья на угол $\theta + 2l\pi$, где k и l целые числа с определенным знаком. Для этого случая Пуанкаре минимизировал лагранжево действие вдоль всех путей в конфигурационном пространстве с данным периодом T и для указанного выше поведения. При подходящем выборе k и l он получил бесконечное множество решений, большинство из которых новые *не для ньютоновской силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, а для «сильного взаимодействия», обратно пропорционального кубу расстояния*. Отметим, что фиксирование периода T вполне приемлемо, поскольку однородность потенциала влечет существование масштабной симметрии: если $x(t) = \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)\big)$ — решение задачи трех тел с силой $1/r^{\alpha+1}$, то это же справедливо для $\lambda^\beta x(\lambda t) = \big(\lambda^\beta \vec{r}_1(\lambda t), \lambda^\beta \vec{r}_2(\lambda t), \lambda^\beta \vec{r}_3(\lambda t)\big)$, где $\beta = -2/(\alpha+2)$, при любом положительном вещественном λ. Но если период x равен T, то период x_λ равен $\frac{1}{\lambda}T$.

Наложение ограничений было необходимо: безусловный минимум заведомо достигается «на бесконечности», когда неподвижные тела бесконечно удалены друг от друга. Поскольку k и l не равны нулю, то тела не могут находиться слишком далеко друг от друга, поскольку в этом случае путь был бы очень длинным, а кинетическую часть действия —очень большой и не скомпенсированной со стороны потенциальной части. Это делает задачу минимизации *коэрцитивной*. Другое преимущество такого ограничения заключается в том, что если $(k,l) \neq (0,0)$, то можно с точностью сказать, что соответствующие решения будут «нетривиальными»; в частности, они будут отличатся от единственных явных решений, а именно *гомографических* решений (любопытно, что, по-видимому, Пуанкаре никогда не интересовался этими гомографическими решениями).

Таким образом, Пуанкаре вывел, что треугольник имеет «форму». Это отличие между задачей трех (и более) тел и задачей двух тел является фундаментальным: отрезок не имеет формы, а только размер. Действительно, задание k и l эквивалентно фиксированию *класса гомологии* петель, определенных в *пространстве ориентированных треугольников* с помощью путей, среди которых мы минимизируем действие. Под *пространством ориентированных треугольников*, я имею ввиду конфигурационное пространство плоской задачи трех тел, «редуцированной» с помощью ориентированных изометрий на плоскости. Это пространство получается из $(\mathbb{R}^2)^3$ исключением трех четырехмерных подпространств столкновений (триплеты $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ различных точек в плоскости) двумя последовательными факторами: первый —с помощью сдвигов, может быть реализован, например, посредством соответствующего выбора *координат Якоби* ($\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \dfrac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$), приводит к пространству $\mathbb{R}^4$ из которого исключили три плоскости; второй — при помощи диагонального действия вращений реализуется отображением Хопфа из $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$: $(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$. Получим пространство $\mathbb{R}^3$ без трех полупрямых. Гомология (или гомотопия) пространства —это то же, что и одна сфера за вычетом трех точек или

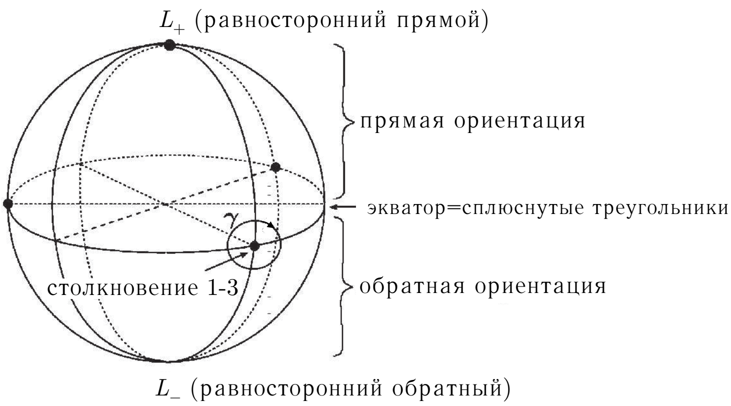


Рис. 2. Пространство ориентированных треугольников: петли на рис. 1 соответствуют петле γ и точке L_+.

множество ориентированных треугольников с «фиксированным размером» (и с различными вершинами, т. е. без столкновения). Следовательно первая группа гомологии пространства ориентированных треугольников изоморфна $\mathbb{Z}^2$, причем каждая компонента представляется алгебраическим числом поворотов, выполняемых за один период двумя сторонами треугольника относительно третьей.

Замечания. В случае абсолютных периодических решений (Пуанкаре они не интересовали), гомология превращается в $\mathbb{Z}^3$ и представляется алгебраическим числом оборотов, выполняемых за один период тремя сторонами треугольника. Кроме того, Пуанкаре ограничивал гомологию, но точно также он мог бы ограничить гомотопию, т. е. тип косы, описываемой тремя телами во времени и пространстве: он открыл *фундаментальную группу* в 1895 г. В действительности, эта группа, изоморфная свободной группе на двух образующих $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, представляет большую ценность. Наконец, если рассматривать пространственную задачу трех тел, понятие ориентации треугольника исчезает, а вместе с ней и вся эта топология: сфера без трех точек заменяется на диск без трех точек на границе, т. е. на стягиваемое пространство. Отметим, что если число тел больше чем три, «пространство форм» становится сингулярным (в случае плоской задачи это конус над комплексным проективным пространством).

В этой работе смелость Пуанкаре очевидна:

1) во-первых, он предположил без доказательства, что минимум существует; но, как показывают дальнейшие события, при этом он сильно рисковал. В действительности в 1925 г. Леонида Тонелли строго доказала существование минимума, как следствие коэрцитивности. Тогда же Тонелли открыла ключевую роль полунепрерывности снизу функционала действия (хорошо известное свойство длины: она может резко уменьшиться в пределе — в качестве примера можно привести ломаную, которая сходится равномерно к прямой — но она не может резко возрастать при переходе к пределу!);

2) с другой стороны, он обнаружил настоящую проблему, а именно столкновения: элементарные вычисления[5] показывают, что когда два тела $\vec{r}_i(t)$ и $\vec{r}_j(t)$, которые взаимодействуют по закону Ньютона сталкиваются в момент t_0, они удовлетворяют оценкам вида: $|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| \sim \alpha|t - t_0|^{\frac{2}{3}}$ и $|\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t)| \sim \beta|t - t_0|^{-\frac{1}{3}}$. Кроме того, примерно пятнадцать лет спустя, Зундман показал, что те же оценки справедливы для произвольного числа тел в пространстве произвольной размерности. Эти оценки свидетельствуют о сходимости интеграла действия в окрестности столкновений. Следовательно минимизирующий путь мог бы априори состоять из

[5]Простейшие в случае задачи Кеплера (один неподвижный центр), с энергией равной нулю, на прямой.

объединения (возможно бесконечного) числа отрезков решений, связанных один с другим посредством столкновения;

3) Наконец, будучи не в силах решить задачу для ньютоновского случая, Пуанкаре, не колеблясь «схитрил», заменив ньютоновскую силу, пропорциональную $1/r^2$ на «сильное взаимодействие», пропорциональное $1/r^3$, для которого интеграл действия расходится при столкновениях. Около восьмидесяти лет пройдет, прежде чем интерес к этому направлению исследования возродится вновь.

Здесь нам представлена прекрасная иллюстрация того как работал Пуанкаре: он расчищает путь и движется вперед, оставляя в стороне некоторые вопросы, к которым он еще вернется... если это позволит время.

После Пуанкаре: первые результаты для ньютоновского потенциала

Первые результаты минимизации для заданной гомологии в случае ньютоновского потенциала были получены Вильямом Гордоном [15] в 1977 г., причем он ничего не знал о заметках Пуанкаре. Он рассматривал абсолютные (т. е. в неподвижной системе координат) периодические решения задачи Кеплера (т. е. задачи с одним неподвижным центром, к которой можно свести задачу двух тел) на плоскости. Эти результаты были обобщены в 2001 г. Андреа Вентурелли [25] на плоскую задачу трех тел. Полученные утверждения аналогичны: первая группа гомологии конфигурационного пространства изоморфна $\mathbb{Z}$ в работе Гордона, и изоморфна $\mathbb{Z}^3$ в работе Вентурелли. В обоих случаях необходимо заметить, что, как и опасался Пуанкаре, в случае ньютоновского потенциала могут появляться столкновения, когда действие минимизируется при наложении некоторого гомологического ограничения: если ограничение гомологии значением ± 1 в случае Гордона (соответственно $\pm(1,1,1)$ в случае Вентурелли) приводит к эллиптическим решениям (соответственно к равносторонним *гомографическим* решениям) заданного периода, каждый класс гомологии, отличный от 0 и ± 1 в первом случае (соответственно от $\pm(1,1,1)$ или от класса с одной нулевой компонентой во втором случае), допускает орбиты столкновения в качестве единственных минимумов (*гомотетический* коллапс равностороннего треугольника в центр масс во втором случае).

Работа Вентурелли ничего не сообщает нам о классах гомологии с одной нулевой компонентой; в частности, даже в таком простом случае, как класс $(1,0,1)$, минимумы не найдены до сих пор, не смотря на то, что потенциальный кандидат на это решение был найден численно в семидесятые годы Р. Бруке [3] и независимо М. Хеноном [18]. С другой стороны, доказательство Вентурелли основано на разложении действия трех тел как трех действий подсистем двух тел и следовательно не может быть обобщено на большее число тел.

Наконец, как мы уже отметили, можно пытаться задавать значение гомотопии, а не гомологии. В этом случае задается тип косы, которую описывает решение в пространстве-времени. Как раз этот подход и был предложен К. Муром в 1993 г. [20], который также не знал о заметках Пуанкаре. Путем численной минимизации действия, он выявил большое число периодических решений. Среди них была *восьмерка*, которую мы рассмотрим в следующем параграфе. Его открытие стало возможным благодаря наложению строгих симметрийных ограничений на пути, с которых он начал процесс минимизации, и тому что эти симметрии сохраняются при минимизации. При отсутствии такого отбора, минимумы в большинстве своем были бы столкновениями.

После Пуанкаре: симметрийные ограничения

Введенные впервые представителями итальянской школы ([10], [11]) для того, чтобы гарантировать коэрцитивность функционала действия, симметрийные ограничения являются ключом к недавнему успеху приложений вариационных методов к поиску периодических решений ньютоновской задачи n-тел. Уже в задаче Кеплера наложение *Итальянской симметрии* $x(t + T/2) = -x(t)$ позволяет выбрать окружность среди эллипсов и, следовательно, исключить орбиты столкновений. Для трех тел на плоскости или в пространстве, минимизирующие решения для этой симметрии будут равносторонними *относительными положениями равновесия*, но я показал в 2002 г. [5] что, как только число тел равно четырем или больше, мы получаем нетривиальные (поскольку они *неплоские*) решения пространственной задачи. Первый пример этих *обобщенных хип-хопов* (четырех тел с одинаковой массой) был получен совместно с Вентурелли в 2000 г. [8]. В известной степени эти решения являются простейшими неплоскими решениями задачи n-тел.

Восьмерка [9], существование которой было доказано нами совместно с Ричардом Монтгомери в конце 1999 г., является другим примером минимизации при симметрийных ограничениях. Здесь группа симметрии является группой пространства ориентированных треугольников, которая была описана в последнем параграфе, т. е. является группой диэдра D_6 с 12 элементами. Равностороннее положение относительного равновесия и восьмерка являются первыми примерами семейства периодических решений задачи n-тел с равными массами, в которой тела двигаются друг за другом по одной и той же замкнутой кривой с постоянным сдвигом по времени. Их первооткрыватель Карлес Симо [23], восхищенный этими движениями на экране компьютера, назвал их *хореографиями*. Анимации доступны на его веб-сайте http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html

То, что минимизация при симметрийных ограничениях часто приводит к решениям без столкновений, объясняется отсутствием столкновения при минимизации с заданными границами *(теорема Маршала)* [19]: действительно, мы возвращаемся к этой задаче, ограничивая симметричную петлю временным интервалом, который является фундаментальной областью действия симметричной группы на окружности времени. Обзор этой темы представлен в [7]; более подробное изложение можно найти в лекциях ICM (Пекин 2002) [5], и ICMP (Лиссабон 2003) [6], а также в ссылках, указанных там же.

Возвращение к Пуанкаре: потенциал сильного взаимодействия и метрика Якоби–Мопертюи

Потенциал $1/r^2$, введенный Пуанкаре для того, чтобы избежать проблему столкновения, занимает особое место среди потенциалов вида $1/r^\alpha$. Это единственный потенциал, для которого масштабная симметрия, являющаяся следствием однородности, симплектична, а это влечет существование дополнительного первого интеграла задачи n тел. Тождество Лагранжа-Якоби, также являющееся следствием однородности потенциала имеет вид $\ddot{I} = 4H$ (I — *момент инерции* конфигурации относительно центра масс, H — энергия, положенная равной нулю, когда тела находятся в состоянии покоя на бесконечности). В частности, ограниченное решение без столкновений, например, периодическое решение, относительное периодическое решение или в более общем случае квазипериодическое решение, должны удовлетворять условиям I=const и $H = 0$. Это означает, что метрика Якоби-Мопертюи (форма, выведенная Якоби для принципа Мопертюи, т. е. принцип наименьшего действия с заданной энергией) сводится к сфере ориентированных треугольников заданного размера (или инерции). Монтгомери [22] показал недавно, что в случае трех равных масс, кривизна соответствующей метрики на сфере без трех точек всюду отрицательна, исключая лагранжевы точки, где она равна нулю. В частности, он вывел, что каждый класс гомотопии, для которого минимальная длина петли не достигается на бесконечности[6],

[6]Такие классы приводятся в [21].

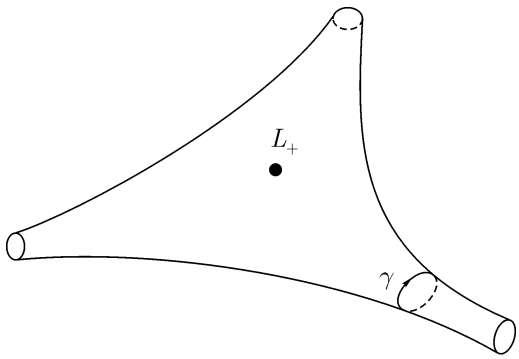


Рис. 3. Пространство ориентированных треугольников с метрикой Якоби.

содержит в точности *одно* относительное периодическое решение. Отсюда получаем единственность восьмерки для этого потенциала, в то время как единственность в случае ньютоновского потенциала, хоть она и представляется очень вероятной, до сих пор не доказана.

Потенциал $1/r^2$ имеет более удивительные свойства: работы Фудживара и др. [14] выявили поразительную *геометрию треугольника*, связанную с решением-восьмеркой — соответствующая анимация доступна на
http://www.clas.kitasato-u.ac.jp/ ~ fujiwara/nBody/IeqConstLeq0/centers GIF.html

В каждый момент времени касательные к кривой в точках, где находятся три тела, пересекаются в одной точке; то же самое выполнено и для трех нормалей. Свойство пересечения касательных, которое следует из равенства нулю кинетического момента, также выполняется и в случае ньютоновского потенциала. Оно связано с существованием того, что Уинтнер называет *центром силы* для задачи трех тел с ньютоновским взаимодействием: в каждый момент времени силы, приложенные к трем телам, сосредоточиваются в одной общей точке (Харграв 1858, Шипарелли 1864). Поскольку кинетический момент равен нулю, при вычислении можно заменить ускорения на скорости. Напротив, пересечение нормалей, которое следует из постоянства момента инерции I, сохраняется только для потенциала $1/r^2$.

Возвращение к Пуанкаре: вопрос устойчивости

В работе *«Периодические решения и принцип наименьшего действия»* (Comp. Rend. Acad. Sci, том. 124, с. 713-716) автор заявил о том, что периодические решения, которые локально минимизируют действие, неустойчивы. Подробное доказательство этого факта приведено в 1899 г. в главе XXIX, том III (*Различные формы принципа наименьшего действия*) *«Новых методов...»*. Пуанкаре выделил два типа неустойчивых решений, в зависимости от того, пересекают или нет близлежащие решения заданное решение. Он указал, что только в первом случае достигается минимум, и это свойство является характеристическим.

«Подведем итог: для того, чтобы замкнутая кривая соответствовала действию, меньшему чем действие любой из бесконечно близких замкнутых кривых, необходимо и достаточно, чтобы эта замкнутая кривая соответствовала периодическому решению с неустойчивостью первой категории[7]*»*.

Это утверждение выполняется только в условиях, определенных самим же Пуанкаре, т. е. для механических систем с *двумя* степенями свободы. Действительно, примеры, приведенные

[7] *Новые методы...*, конец § 358.

Мари-Клод Арно в 1998 г. [2], показывают, что при бóльших размерностях периодическое решение, локально минимизирующее действие, может обладать только «двумя направлениями неустойчивости», поперечными потоку на уровне энергии решения.

Симметрийные ограничения меняют вопрос об устойчивости. Ко всеобщему изумлению, Симо [24] численно показал устойчивость восьмерки на плоскости, но с другими симметрийными ограничениями, по-видимому, решения, доставляющие минимум, чаще всего неустойчивы.

Заключение

Оставалось мало направлений исследований задачи трех тел, которыми бы не занимался Пуанкаре. Эта работа — хороший пример того, как методы предложенные в заметках, были независимо переоткрыты гораздо позднее в работах Гордона и последователей итальянской школы. Пуанкаре обнаружил главное препятствие. Оно состояло в том, что орбиты столкновения имеют конечное действие, и единственное что было ему необходимо — еще немного времени. В разделе XVIII работы анализа своих научных трудов «*Задача трех тел; качественные свойства*» он пишет:

Я вернулся к этим периодическим решениям и подробнейшим образом изучил их. Методы, которые я использовал для доказательства их существования очень просты и могут быть сведены к вычислению пределов.

Но к этому же доказательству можно прийти совсем другим путем, который будет очень часто полезен, но из которого я еще не сделал всех выводов. Предположим, например, что необходимо найти геодезическую линию неопределенной поверхности с формой, аналогичной однополостному гиперболоиду. Можно быть уверенным, что существует замкнутая геодезическая (соответствующая периодическому решению), поскольку из всех замкнутых кривых, которые можно провести по поверхности, одна должна быть короче чем другие.

Те же методы можно применять при решении различных задач механики благодаря принципу наименьшего действия. Этот принцип можно использовать в виде, описанном Гамильтоном или Якоби. Я сделал только набросок этого метода, из которого, вероятно, можно извлечь еще очень много.

На самом деле, Пуанкаре вернулся к этому методу еще, по крайней мере, один раз. Причем он использовал его не непосредственно для задачи трех тел, но для задачи, которая с одной стороны проще, потому что в ней не стоит проблема столкновения, а с другой сложнее, поскольку она касается сферы, которая не обладает «дырой», вокруг которой можно двигаться. В 1905 г. в работе «*О геодезических линиях выпуклых поверхностей*»[8] Пуанкаре изучал задачу о периодических геодезических на выпуклых поверхностях как подобие соответствующей плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Вероятно, имея в виду периодические решения планетарного или лунного типа, в частности, *решения Хилла* для задачи о Луне, и возможно, позабыв свои заметки 1896 г., он пишет во введении, что

«…геодезические поверхностей с кривизнами противоположных знаков — это не те линии, с которыми можно сравнивать траектории задачи трех тел; траектории можно сравнивать лишь с геодезическими выпуклых поверхностей.

Следовательно, я взялся за изучение геодезических выпуклых поверхностей; к сожалению, задача намного сложнее, чем та, которая была решена Адамаром (случай поверхностей с противоположными кривизнами). Я вынужден был довольствоваться

[8]Труды AMS 6, с. 237–274.

некоторыми частными результатами, по существу, на замкнутых геодезических, которые играют здесь роль периодических решений задачи трех тел».

Тем не менее, эти «частные» результаты впечатляют: применив в своей дерзкой манере метод продолжения, Пуанкаре получил существование по крайней мере одной замкнутой геодезической, которая *вложена* (т. е. без самопересечений) в произвольную выпуклую поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$ с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой. В конце работы он сделал набросок второго доказательства этого существования очень «физичным» способом с жидкостями и лентами. Затем использовал это новое доказательство при обсуждении устойчивости: поскольку и гомология и гомотопия тривиальны и, следовательно, не могут использоваться в качестве ограничений при минимизации длины (т. е. действия). Пуанкаре ввел *ограничения Гаусса-Бонне*: минимизируется длина всех вложенных замкнутых кривых, которые делят поверхность на две части, на каждой из которых интеграл кривизны одинаков (это в точности утверждение теоремы Гаусса-Бонне для геодезической линии). Полное (и красивое) доказательство по способу, предложенному Пуанкаре, было выведено только в 1994 г. Ж. Хассом и Ф. Морганом [17].

Рене Гарнье — один из редакторов тома VI полного собрания трудов (который как раз содержит эту работу), напомнил в комментариях поразительные открытия, сделанные в вариационном исчислении Морсом, Биркгофом, Люстерником, Шнирельманом. Он пишет:

«Исследования всех этих авторов являются, несомненно, одними из самых важных в современной методике вариационного исчисления; но, признавая это, не следует забывать, что согласно словам М. Морса, А. Пуанкаре был одним из первых геометров, кто предвидел существование макроанализа и, без сомнения, тем, кто внес наиболее существенный вклад в становление этой дисциплины».

Я хотел бы закончить высказыванием Адамара. По моему мнению, оно очень точно описывает работы Пуанкаре. Это предложение процитировано из текста (собранного Террадасом и Бассегода) конференции [16], проводимой в «Институте каталанских исследований»:

«Столкнувшись с открытием Эрмита, хочется сказать:

— Просто поразительно, что человек смог прийти к столь выдающейся мысли!

Но, читая работы Пуанкаре, задаешься вопросом:

— Как это возможно, что никто раньше не смог обнаружить вещи такие естественные и логичные?»

Благодарности

Выражаю благодарность Р. МакКею, который открыл для меня существование заметок Пуанкаре во время конференции в Рио-де-Жанейро, где я представлял восьмерку; спасибо А. Робадей за разъяснения работы Пуанкаре 1905 г.; благодарю А. Албуи за обсуждения центра сил и Ж. Ласкара за ссылку на Шапарелли. Также хотелось бы поблагодарить С. Ксамбо и А. Дельсамса за приглашение в прекраснейший город Барселона рассказать о Пуанкаре, а также Т. Сеара за помощь при подготовке выступления, хотя и не на каталанском, но по крайней мере на кастильском языке.

Список литературы

[1] Poincaré H.

1) *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action* // C.R.A.S., 1896, t. 123, p. 915-918 (in Oeuvres, tome VII).

2) *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* // Transactions AMS, 1905, V. 6, p. 237-274 (in Oeuvres, tome VI).

3) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Tomes I (1892), III (1899) // Réédition Blanchard, 1987.

4) *La science et l'hypothèse*, 1902.

5) *La valeur de la science*, 1905.

См. также перевод: Пуанкаре А. *Избранные труды в трех томах* // М.: Наука, 1971, 772 с.

[2] Arnaud M. C. *On the type of certain periodic orbits minimizing the Lagrangian action* // Nonlinearity, 1998, V. 11, p. 143-150.

[3] Broucke R. *On relative periodic solutions of the planar general three-body problem* // Celestial Mechanics, 1975, V. 12, p. 439-462.

[4] Chenciner A. *Une note de Poincaré*. Conferencies de l'FME, Curs Poincare (2003-2004), Barcelona: FME.

[5] Chenciner A. *Action minimizing solutions of the n-body problem: from homology to symmetry*. In: Proceedings of the international congress of mathematicians // ICM, 2002, Beijing, V. III, p. 279-294.

[6] Chenciner A. *Symmetries and "simple" solutions of the classical n-body problem*. In: Proceedings, to appear, of the international congress of mathematical physics // ICMP, 2003, Lisbonne.

[7] Chenciner A. *Solutions du problème des n corps joignant deux configurations : l'idée de Christian Marchal et ce qui s'en suit* // Gazette des mathématiciens, 2004, V. 99, p. 5–12.

[8] Chenciner A., Venturelli A. *Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses égales dans $\mathbb{R}^3$: orbites "hip-hop"* // Celestial Mechanics, 2000, V. 77, p. 139-152.

[9] Chenciner A., Montgomery R. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* // Annals of Math., 2000, V. 152, p. 881–901. См. также пер. на рус. в сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: ИКИ, 2002, 304 с.

[10] Coti Zelati V. *Periodic solutions for N-body type problems* // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, 1990, V. 7, №5, p. 477-492.

[11] Degiovanni M., Giannoni F., Marino A. *Dynamical systems with Newtonian type potentials* // Atti Acc. Lincei Rend. Fis. Mat., 1986, V. 8(81), №3, p. 271-278.

и Degiovanni-F.Giannoni M. *Periodic solutions of dynamical systems with Newtonian type potentials* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 1988, V. 15, p. 467-494.

[12] Feynmann R. P. *Lectures in physics, V. I* // Addison Wesley, 1963. См. также пер. на рус.: Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике*, в 10 томах // М.: Мир, 1965-1967.

[13] Feynmann R. P. *QED The strange theory of light and matter (Alice G. Mautner lectures)* // Princeton University press, 1988. См. также пер. на рус.: Фейнман Р. *КЭД. Странная теория света и вещества* // М.: Наука, 1988, Серия: Библиотечка «Квант», вып. 66, 144 с.

[14] Fujiwara T., Fukuda H., Kameyama A., Ozaki H., Yamada M. *Synchronised Similar Triangles for Three-Body Orbit with Zero Angular Momentum* // 2004, preprint arXiv:math-ph/0404056, V. 1.

[15] Gordon W. B. *A Minimizing Property of Keplerian Orbits* // American Journal of Math., 1977, V. 99, №15, p. 961-971.

[16] Hadamard J. *Poincaré i la teoria de les equacions diferencials*. Institut d'estudis catalans // Col'lecció de Cursos de Fisica i Matemàtica, 1920 (приблизительно), V. III.

[17] Hass J., Morgan F.*Geodesics and soap bubbles on surfaces* // Mathematische Zeitschrift, 1996, V. 223, №2, p. 185-196.

[18] Hénon M. *Families of periodic orbits in the three-body problem* // Celestial Mechanics, 1974, V. 10, p. 375-388.

[19] Marchal C. *How the method of minimization of action avoids singularities* // Celestial Mechanics, 2002, V. 83, p. 325–353.

[20] Moore C. *Braids in Classical Dynamics* // Physical Review Letters, 1993, V. 70, №24, p. 3675-3679.

[21] Montgomery R. *The N-body problem, the braid group, and action-minimizing periodic orbits* // Nonlinearity, 1998, V. 11, p. 363-376.

[22] Montgomery R. *Fitting hyperbolic pants to a three-body problem* // Preprint, 2004.

[23] Simó C. *New families of Solutions in N–Body Problems*. In: Proceedings of the Third European Congress of Mathematics (Eds. C. Casacuberta et al.) // Progress in Mathematics, 2001, V. 201, p. 101-115. См. также пер. на рус. в сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: ИКИ, 2002, 304 с.

[24] Simó C. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*. In: Celestial Mechanics. Volume dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday (Eds. Chenciner A., Cushman R., Robinson C., Xia Z.J.) // Contemporary Mathematics, 2002, V. 292, p. 209–228. См. также пер. на рус. в сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: ИКИ, 2002, 304 с.

[25] Venturelli A. *Une caractérisation variationnelle des solutions de Lagrange du problème plan des trois corps* // C.R. Acad. Sci. Paris, 2001, T. 332, Série I, p. 641-644.