

УДК 521.1

## Особенности в ньютоновой задаче $N$ тел<sup>1</sup>

Ф. Диаку

Department of Mathematics and Statistics  
University of Victoria  
Victoria, British Columbia V8W 3P4, Canada  
E-mail: diacu@math.uvic.ca

### 1. Введение

В этих лекциях мы представляем некоторые фундаментальные результаты об особенностях в классической задаче  $N$  тел. Понятие *особенности* имеет два смысла в небесной механике. Один связан со значениями зависимой переменной, для которых система дифференциальных уравнений, описывающая движение, теряет свой смысл, например, когда какой-нибудь знаменатель обращается в нуль. Эти особенности называются *особенностями уравнений*. Другой относится к конечному значению независимой переменной, для которого вырождается (blow up) некоторое решение. Эта особенность соответствует решению, поэтому мы называем ее *особенность со столкновением*. В § 3 мы определим эти понятия и увидим, какие связи существуют между ними.

Основной объект, рассматриваемый в данных лекциях, — это динамическая система, состоящая из  $N$  тел (материальных точек) с массами  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , которые движутся в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  под действием силы взаимного притяжения, подчиняющейся закону обратных квадратов. В абсолютной системе координат положение тела  $m_i$  задается трехмерным вектором  $\mathbf{q}_i = (q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Конфигурация системы материальных точек задается  $3N$ -мерным вектором  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$ . Когда точки движутся в пространстве,  $\mathbf{q}$  становится функцией от времени  $t$ . Импульс тела  $m_i$  равен  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , где точка обозначает дифференцирование по  $t$ . Тогда импульс всей системы материальных точек равен  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ . Определим *потенциальную функцию* (которая также равна *потенциальной энергии*, взятой с противоположным знаком) системы материальных точек следующим образом:

$$U: \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \rightarrow (0, \infty), \quad U(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|},$$

<sup>1</sup>Florin Diacu, *Singularities of the Newtonian  $N$ -body problem*. Пер. с англ. А. Г. Арзамасцева. Статья из сборника “Задача Кеплера, столкновения, регуляризация”, готовящегося к изданию Институтом компьютерных исследований. Более полная информация об издании представлена на с. 281–283.



где  $|\cdot|$  — евклидова норма, а  $\Delta$  представляет собой *множество столкновений*,

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N}, \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}.$$

Если выбрать единицы измерения таким образом, чтобы гравитационная постоянная равнялась 1, то уравнения, описывающие движение  $N$  тел под действием их взаимного гравитационного притяжения, задаются  $6N$ -мерной системой

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} = \nabla U(\mathbf{q}), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{M}$  — матрица размерности  $(3N \times 3N)$  с элементами  $m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N$  на большой диагонали и нулевыми элементами вне диагонали. Обратную к ней матрицу обозначим через  $\mathbf{M}^{-1}$ .  $6N$ -мерное множество переменных  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  называется *фазовым пространством*.  $3N$ -мерное множество координат называется *конфигурационным пространством*.

Эта система при  $N = 2$  и  $N = 3$  была получена Исааком Ньютоном в его шедевре *Principia*, впервые опубликованном в 1687 г. Но Ньютон использовал язык геометрии, поэтому его уравнения формально отличаются от уравнений (1.1). Почти через столетие Леонард Эйлер получил уравнения движения в виде, аналогичном приведенному выше. С тех пор эту систему исследовали многие выдающиеся математики. Иоганн Бернулли, Жозеф Луи Лагранж, Пьер Симон Лаплас, Карл Густав Якоби, Симеон Дени Пуассон, Спиру Аретю, Джордж Хилл, Джордж Дарвин, Эрнст Генрих Брунс, Карл Вейерштрасс, Анри Пуанкаре, Поль Пенлеве, Форест Рэй Моултон, Джордж Дэвид Биркгоф и Джен Шази — это далеко неполный список ученых прошлого, которые внесли значительный вклад в изучение задачи  $N$  тел. Хотя по этой теме были опубликованы тысячи статей, мы по-прежнему очень мало знаем об уравнениях (1.1). Пуанкаре первым применил для изучения системы геометрический подход, и его идеи легли в основу нового направления работ по качественным методам, которые используются в наши дни при изучении явлений, связанных с хаосом, а также других динамических аспектов, возникающих в теории нелинейных систем (см. [6]).

## 2. Первые интегралы

Важный результат, отметивший конец эпохи количественных методов в небесной механике и открывший эпоху качественных исследований, был получен немецким математиком Эрнстом Генрихом Брунсом. (Вскоре после этого подобные результаты были получены Пенлеве и Пуанкаре.) В большой статье, содержащей некоторые пробелы в доказательствах [1], Брунс показал, что система (1.1) имеет не более 10 линейно независимых алгебраических по  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  интегралов. В это время обычный метод изучения систем дифференциальных уравнений заключался в получении *первых интегралов*, т. е. вещественнозначных функций, которые являются константами на решениях. С геометрической точки зрения первый интеграл расслаивает  $n$ -мерное пространство на  $(n - 1)$ -мерные слои. Если найдено  $n$  алгебраических интегралов, то система  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка сводится к нахождению решения  $n$ -мерной алгебраической системы. Но если хотя бы один интеграл является трансцендентным, то не остается никаких надежд на получение решения алгебраической системы.

Предыдущее изучение системы (1.1) привело к обнаружению 10 алгебраических первых интегралов: *интеграл энергии*,

$$T(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) = h, \tag{2.2}$$

где  $T: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^{-1} |\mathbf{p}_i|^2$  — *кинетическая энергия* и  $h$  — константа интеграла энергии, 3-го интеграла *кинетического момента*,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{c}, \tag{2.3}$$

где  $\times$  обозначает векторное произведение,  $\mathbf{c}$  — трехмерный постоянный вектор, 3-го интеграла *импульса*,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \mathbf{a}, \tag{2.4}$$

где  $\mathbf{a}$  — трехмерный постоянный вектор, и 3-го интеграла *центра масс*,

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i - \mathbf{a}t = \mathbf{b}, \tag{2.5}$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — трехмерные постоянные векторы. Поскольку других линейно независимых алгебраических интегралов не существует, система (1.1) сводится только к системе размерности  $6N - 10$ . В действительности, используя некоторые симметрии, редукцию можно улучшить до  $6N - 12$ . Очевидно, что этого недостаточно для решения произвольной задачи  $N$  тел при  $N \geq 3$ , но интегралы по-прежнему полезны для понижения размерности системы и для понимания некоторых качественных аспектов, связанных с решениями.

Из интегралов (2.4) и (2.5) следует, что без потери общности исследование системы (1.1) может быть ограничено *инвариантным множеством*  $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ , где

$$\mathbf{Q} = \left\{ \mathbf{q} \mid \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \right\} \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = \left\{ \mathbf{p} \mid \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \right\}.$$

С физической точки зрения это означает, что мы можем фиксировать начало координат в центре масс системы материальных точек.

### 3. Особенности

Задача об исследовании особенностей естественно возникает из наиболее фундаментальной задачи теории дифференциальных уравнений: существование и единственность глобальных решений для задачи Коши. Действительно, заметим, что для заданных начальных условий  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})(0) \in (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$  стандартные результаты, примененные к системе (1.1), гарантируют локальное существование единственного аналитического решения  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , определенного на некотором интервале  $[0, t^+)$ . Это решение может быть аналитически продолжено на интервал  $[0, t^*)$ , где  $0 < t^+ \leq t^* \leq \infty$ . Если  $t^* = \infty$ , то решение определено глобально. Если  $t^* < \infty$ , решение имеет *особенность* и  $t^*$  называют *особенностью* этого решения. С другой стороны, система (1.1) имеет *особенности*, когда  $\mathbf{q} \in \Delta$ . Действительно, уравнения (1.1) теряют свой смысл, поскольку, по крайней мере, один из знаменателей в  $\nabla U(\mathbf{q})$  становится равным нулю.



Очевидно, существует тесная связь между решениями с особенностями и особенностями системы. Далее в этом параграфе мы покажем, что каждое решение с особенностью  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  таково, что  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \Delta$  при  $t \rightarrow t^*$ , поскольку в противном случае решение было бы определено глобально. Поскольку  $\Delta$  — это множество столкновений, мы можем сделать поспешный вывод, что любая особенность является столкновением. Но это верно лишь в том случае, когда  $\mathbf{q}$  стремится к элементу из  $\Delta$ . Может оказаться, что  $\mathbf{q}$  стремится к  $\Delta$  без асимптотической фазы, т. е. оно будет колебаться между различными элементами, но не достигнет определенного положения. Это означает, что могут существовать бесстолкновительные решения с особенностями. Обсудим это подробно.

История не дает ясного ответа, когда началось исследование особенностей. В своем фундаментальном трактате [30] Аурел Уинтнер упоминает, что в XIX в. приведенное ниже предложение 3.1 было общеизвестным среди исследователей. Обозначим

$$\rho(\mathbf{q}) = \min_{1 \leq i < j \leq N} q_{ij},$$

где  $q_{ij} = |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|$  — расстояние между материальными точками с массами  $m_i$  и  $m_j$ . Мы можем доказать следующий результат.

**Предложение 3.1.** *Если  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — аналитическое решение уравнений (1.1), определенное на  $[0, t^*)$ , то  $t^*$  является особенностью тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) = 0.$$

*Доказательство.* Сначала приведем доказательство необходимости. Для этого предположим, что существует такое  $a > 0$ , что  $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) \geq a$ . Отсюда следует, что существуют  $t_0$  из  $[0, t^*)$  и  $\beta$  из  $[0, a)$  такие, что  $q_{ij}(t) \geq \beta$  для всех  $t$  в  $[t_0, t^*)$ . Поскольку из уравнений (1.1),

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i) q_{ij}^{-3}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

следует, что  $|\ddot{\mathbf{q}}_i| \leq \beta^{-2} (\sum_{j=1}^N m_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , поэтому  $\ddot{\mathbf{q}}$  ограничена. Записывая конфигурацию  $\mathbf{q}$  в виде ряда Тейлора относительно  $t_0$  с остаточным членом в интегральной форме

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + (t - t_0)\dot{\mathbf{q}}(t_0) + \int_{t_0}^t (t - \tau)\ddot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau,$$

и пользуясь тем, что  $\ddot{\mathbf{q}}$  ограничена, мы приходим к заключению, что существуют вектора  $\mathbf{q}^*$  и  $\mathbf{p}^*$  такие, что  $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*$  и  $\lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^*$ , т. е. что  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  стремятся к предельным положениям. Если мы обозначим  $q_{ij}^* = |\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*|$ , то,  $q_{ij}^* \geq \beta$  для всех  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , при  $i \neq j$ . Физически это означает, что взаимные расстояния между материальными точками строго положительны в момент времени  $t^*$ , поэтому тела могут продолжить движение. Отсюда мы делаем вывод, что мы пришли к противоречию с предложениями, показав, что решение является аналитическим при  $t^*$ . Математически говоря, область, в которой определено решение  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , зависит от  $\beta$ , а следовательно, и от  $a$ , но не зависит от начальных условий. Поэтому, если мы выберем данные

достаточно близко к начальным условиям  $t^*$ ,  $\mathbf{q}^*$  и  $\mathbf{p}^*$ , приводящим к решению  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , то соответствующее решение по-прежнему будет аналитическим при  $t^*$ . Это противоречит предположению и доказывает необходимость предложения.

Теперь приведем доказательство достаточности. Для этого предположим, что  $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) = 0$ . Очевидно, если  $\ddot{\mathbf{q}}$  становится неограниченной при  $t \rightarrow t^*$ , то  $t^*$  является особенностью. Поэтому будем полагать, что  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  ограничена при всех  $t$  из  $[0, t^*)$ . Тогда из системы (1.1) следует, что  $\nabla U(\mathbf{q})$  также ограничена. Поскольку

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{q}(t)) = [\nabla U(\mathbf{q}(t))]^T \dot{\mathbf{q}}(t),$$

$\frac{d}{dt}U(\mathbf{q}(t))$  также ограничена, и поэтому также ограничена  $U(\mathbf{q}(t))$ . Но из сделанного нами вначале предположения  $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) = 0$  следует, что  $\limsup_{t \rightarrow t^*} U(\mathbf{q}(t)) = \infty$ , что противоречит предыдущему заключению. Это завершает доказательство достаточности. ■

В 1895 г. по приглашению короля Швеции и Норвегии Оскара II Поль Пенлеве прочитал серию лекций в университете Стокгольма, на первой из которых присутствовал король. В этих лекциях Пенлеве рассмотрел несколько проблем из теории дифференциальных уравнений, включая особенности в задаче  $N$  тел. В 1897 г. он опубликовал свои лекционные заметки [19], которые содержат первое систематическое изучение этих особенностей. Его первым результатом было улучшенное предложение 3.1. Пенлеве сумел доказать, что  $t^*$  является особенностью тогда и только тогда, когда  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \Delta$  при  $t \rightarrow t^*$ . Это эквивалентно нижеприведенному утверждению.

**Предложение 3.2 (Пенлеве, 1895 г.).** Если  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — аналитическое решение уравнений (1.1), определенное на  $[0, t^*)$ , то  $t^*$  является особенностью тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) = 0.$$

*Доказательство.* Доказательство достаточности следует из предложения 3.1. Поэтому нам нужно получить доказательство лишь необходимого условия. Для этого предположим, что существует  $a > 0$  такое, что  $\limsup_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) \geq a$ . Отсюда следует, что существует последовательность моментов времени  $(t_n)_n$  с  $t_n \rightarrow t^*$  такая, что  $q_{ij}(t_n) \geq a > 0$  для всех  $i, j$  при  $1 \leq i < j \leq n$ . Следовательно, потенциальная функция ограничена в этих точках, т. е. существует  $b > 0$  такое, что  $U(\mathbf{q}(t_n)) \leq b$  для всех положительных целых чисел  $n$ . Из интеграла энергии (2.2) следует, что  $T(\mathbf{p}(t_n)) \leq b + h$  для всех  $n$ , а следовательно, существует константа  $\gamma > 0$  такая, что  $|\mathbf{p}(t_n)| \leq \gamma$  для всех  $n$ . Как мы показали в доказательстве предложения 3.1, область определения решений не зависит от выбора начальных условий. Поэтому для некоторых начальных данных  $t_n$ ,  $\mathbf{q}(t_n)$  и  $\mathbf{p}(t_n)$  при  $t_n$ , достаточно близком к  $t^*$ , мы можем показать, что решение является аналитическим при  $t^*$ . Это противоречит посылке, что  $t^*$  является особенностью и доказывает утверждение необходимого условия.

## 4. Столкновения

Предложение 3.2 позволяет нам определить  $t^*$  как *особенность со столкновением*, если  $\mathbf{q}(t)$  имеет определенный предел при  $t \rightarrow t^*$ , т. е. если  $\mathbf{q}(t)$  стремится к  $\Delta$ , достигая в конечном итоге какого-либо из его элементов. Особенность  $t^*$ , не принадлежащую этому типу, будем называть *псевдостолкновением* или *особенностью без столкновения*. Псевдостолкновение



может возникнуть, только если  $\mathbf{q}(t)$  стремится к  $\Delta$ , не достигая в конечном итоге никакого из его элементов.

Можно легко показать существование особенностей со столкновением. Например, когда все материальные точки движутся по прямой, то в будущем или в прошлом должны происходить, по крайней мере, бинарные столкновения. Мы строго докажем этот результат в § 6. Однако существование псевдостолкновений весьма неясно. Несложно показать, что в задаче двух тел псевдостолкновений не существует. В 1895 г. Пенлеве доказал, что то же самое верно и для задачи трех тел. Приведем подробное изложение.

**Теорема 4.1 (Пенлеве, 1895 г.).** *В задаче трех тел все особенности возникают из-за столкновений.*

*Доказательство.* Мы покажем, что если  $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{q}(t)) = 0$ , то, по крайней мере, одно из взаимных расстояний  $q_{12}(t)$ ,  $q_{23}(t)$  или  $q_{31}(t)$  стремится к 0, когда  $t \rightarrow t^*$ . Предположим, что это не так, т. е.  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_{ij}(t) > 0$  для всех  $i, j = 1, 2, 3$ , при  $i \neq j$ . Тогда  $\rho(\mathbf{q}(t)) \rightarrow 0$ , только если, по крайней мере, два из взаимных расстояний, скажем  $q_{13}$  и  $q_{23}$ , поочередно становятся минимальным расстоянием. Пусть  $(t_n)_n$  — последовательность моментов времени, когда происходит перемена ролей. Это означает, что  $q_{13}(t_n) = q_{23}(t_n)$  для всех положительных целых  $n$ . Поскольку  $t_n \rightarrow t^*$ , когда  $n \rightarrow \infty$ , то  $q_{13}(t_n) \rightarrow 0$ ,  $q_{23}(t_n) \rightarrow 0$ , и из неравенства треугольника также  $q_{12}(t_n) \rightarrow 0$ . Поэтому  $J(\mathbf{q}(t_n)) \rightarrow 0$ , где

$$J(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{q}_i|^2 \quad (4.1)$$

является моментом инерции. Действительно, используя тот факт, что центр масс системы материальных точек лежит в начале координат, легко показать, что момент инерции можно выразить через взаимные расстояния как

$$J(\mathbf{q}) = (m_1 + m_2 + m_3)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j q_{ij}^2,$$

и это соотношение доказывает, что  $J(\mathbf{q}(t_n)) \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . С помощью соотношения Якоби–Лагранжа,

$$\ddot{J}(\mathbf{q}(t)) = U(\mathbf{q}(t)) + 2h,$$

где  $h$  — константа интеграла энергии, можно показать, что  $J$  всегда имеет предел  $J^*$  (конечный или бесконечный), когда  $t \rightarrow t^*$ . Следовательно,  $J(\mathbf{q}(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t^*$ , поэтому  $q_{12}(t), q_{13}(t), q_{23}(t) \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow t^*$ , что противоречит начальному предположению и доказывает теорему. ■

Все попытки Пенлеве доказать аналогичный результат для более чем трех тел провалились. Тогда он решил, что могут существовать псевдостолкновения, но не знал, как доказать существование таких решений. Поэтому он завершил свой анализ особенностей следующей гипотезой.

**Гипотеза Пенлеве.** *Для  $N \geq 4$  существуют решения  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  системы (1.1), определенные на  $[0, t^*)$ , для которых  $t^*$  является особенностью без столкновения.*

Доказательство истинности гипотезы Пенлеве было получено почти через сто лет. Мы обсудим это достижение в § 8.

## 5. Псевдостолкновения

Следующий шаг в решении задачи о существовании псевдостолкновений был сделан шведским математиком Эдвардом Хуго фон Цейпелем. После получения степени доктора философии в университете Уппсалы он некоторое время занимался научно-исследовательской работой в Париже. Он, вероятно, обсуждал проблему особенностей с Пенлеве и после возвращения домой опубликовал короткую статью [29], содержащую удивительный результат: для возникновения псевдостолкновения решение не может стремиться к определенному пределу и обязательно должно стать неограниченным за конечное время. Он выразил это свойство, используя момент инерции (4.1), который является мерой распределения материальных точек в пространстве.

**Теорема 5.1 (фон Цейпель, 1908 г.).** *Если  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — решение системы (1.1), определенное на  $[0, t^*)$ , с особенностью  $t^*$  таково, что  $\lim_{t \rightarrow t^*} J(\mathbf{q}(t))$  является конечным, тогда  $t^*$  возникает из-за столкновения.*

Результат фон Цейпеля, опубликованный в малоизвестном журнале, оставался практически незамеченным в течение более чем трех десятилетий. В 1920 г. Джен Шази также опубликовал его в [2] без доказательства и без каких-либо ссылок на фон Цейпеля. Впервые вклад фон Цейпеля был отмечен Аурелом Уинтнером в [30], который утверждал, что доказательство имеет пробелы и, следовательно, не может быть проверено. Первое подробное доказательство Ганса-Юргена Сперлинга [27] появилось в 1970 г. Наконец, в 1986 г., Ричард МакГири [18] детально описал исходное доказательство фон Цейпеля, показав, что исходное доказательство было совершенно правильным.

Доказательство фон Цейпеля основано на кластерном разложении материальных точек, которое приводит к весьма громоздким техническим обозначениям. Поэтому вместо подробного изложения этого доказательства мы приведем доказательство более общего результата Дональда Саари [21], который еще больше проясняет поведение движений для решений, ведущих к псевдостолкновениям.

**Теорема 5.2 (Саари, 1973 г.).** *Если  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — решение системы (1.1), определенное на  $[0, t^*)$ , с особенностью  $t^*$  такое, что  $J(\mathbf{q})$  является медленно меняющейся функцией от  $t$  при  $t \rightarrow t^*$ , тогда  $t^*$  возникает из-за столкновения.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Сначала напомним, что функция  $f: [0, t^*) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *медленно меняющейся* при  $t \rightarrow t^*$ , если для всех  $a > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \frac{f(a(t - t^*))}{f(t - t^*)} = 1.$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что псевдостолкновение может возникнуть, только если происходит некоторого рода колебательное движение, более точно, если существуют различные индексы  $i$  и  $j$  такие, что

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} q_{ij}(t)J^{-1/2}(\mathbf{q}(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \limsup_{t \rightarrow t^*} q_{ij}(t)J^{-1/2}(\mathbf{q}(t)) > 0.$$

Это достигается путем доказательства того, что существует такая последовательность  $(t_n)_n$ ,  $t_n \rightarrow t^*$ , что для всех элементов последовательности  $q_{ij}(t_n) < \epsilon J^{1/2}(\mathbf{q}(t_n))$  для некоторых индексов  $i$  и  $j$ , где  $\epsilon > 0$  произвольно мала, тогда как  $q_{ij}(t_n) > b J^{1/2}(\mathbf{q}(t_n))$  для некоторых других индексов, где  $b > 0$  — фиксированная константа. Это означает, что некоторые материальные точки образуют кластеры, в то время как расстояния от них до других материальных точек ограничены снизу. Подробное изложение доказательства см. в [21].

## 6. Частные случаи

В той же самой работе [21] Дональд Саари доказал, что если гравитационное движение  $n$  материальных точек может происходить только на прямой линии, то на каждом решении происходит столкновение, но не может происходить псевдостолкновений. В своем доказательстве он использовал следующий результат.

**Лемма о выпуклости.** *Не существует, по крайней мере, дважды дифференцируемых функций  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $f > 0$  и  $\ddot{f} < 0$  (или  $f < 0$  и  $\ddot{f} > 0$ ) на  $\mathbb{R}$ .*

При доказательстве леммы трудностей не возникает. Теперь сформулируем и докажем результат Саари.

**Теорема 6.1 (Саари, 1973 г.).** *В прямолинейной задаче  $N$  тел при движении в прошлом или в будущем каждое решение имеет особенность, возникающую из-за столкновения. Ни в каком решении не возникает псевдостолкновений.*

*Доказательство.* Класс прямолинейных решений является инвариантным множеством для системы (1.1). Каждая материальная точка имеет только одну координату  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Предположим, что  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_N$ . Используя интеграл (2.5) и тот факт, что началом системы координат является центр масс, мы приходим к заключению, что  $\sum_{i=1}^N m_i q_i = 0$ , откуда следует, что  $q_1 \leq 0 \leq q_N$ . Согласно системе (1.1),

$$\ddot{q}_N = \sum_{i=1}^{N-1} m_i (q_i - q_N) q_{iN}^{-3},$$

и поскольку  $q_i - q_N < 0$ , то, следовательно,  $\ddot{q}_N < 0$ . Если  $m_N$  и  $m_{N-1}$  не сталкиваются, то  $q_N > 0$ . Но из леммы о выпуклости следует, что функция  $q_N$  не может быть определена на всем  $\mathbb{R}$ , а только на некотором его подмножестве. Следовательно существует особенность  $t^*$ , в которой движение останавливается. Также  $q_N$  ограничено 0 снизу и положительной константой сверху (поскольку  $\ddot{q}_N < 0$ ).

По теореме 5.1,  $J(\mathbf{q}(t)) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t^*$ . Также легко увидеть, что существуют положительные константы  $A$  и  $B$  такие, что если  $R(t) = \max_{1 \leq i < j \leq N} q_{ij}(t)$ , то

$$AR^2(t) \leq J(\mathbf{q}(t)) \leq BR^2(t)$$

для всех  $t$ , для которых движение определено. Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow t^*} R(t) = \infty$ . Но  $R(t) = q_{1N}(t)$ , поэтому  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_{1N}(t) = \infty$  и, следовательно,  $\limsup_{t \rightarrow t^*} q_N(t) = \infty$ . Это противоречит тому, что  $q_N$  ограничена и, тем самым, доказывает теорему. ■

Трапецевидные решения с особенностями задачи 4 тел с равными массами имеют тот же тип, что и прямолинейные решения, описанные выше. Доказательство следующего результата см. в [5].

**Теорема 6.2 (Диаку, 1992 г.).** *В трапецевидной задаче 4 тел с равными массами каждое решение имеет особенность (в прошлом или в будущем), которая всегда возникает из-за столкновения и никогда из-за псевдостолкновения.*

Теорема 6.2 может быть частично обобщена на все системы с двумя степенями свободы. Доказательство нижеследующего результата см. в [23].

**Теорема 6.3 (Саари и Диаку, 1994 г.).** *Не существует инвариантного множества с двумя степенями свободы для системы (1.1), которое содержит решения, приводящие к псевдостолкновениям.*

## 7. Кластерные конфигурации

Другим классом решений, не содержащих псевдостолкновений, являются *кластерные конфигурации*. Мы будем говорить, что решение системы (1.1) является кластерной конфигурацией, если существуют положительные константы  $c_1$  и  $c_2$  такие, что всякий раз, когда

$$\rho(t) < c_1 < c_2 < R(t),$$

где  $R(t) = \max_{1 \leq i < j \leq N} q_{ij}(t)$  и  $\rho(t) = \min_{1 \leq i < j \leq N} q_{ij}(t)$ , материальные точки могут быть разбиты на два или более подмножеств, таких, что, по крайней мере, одно подмножество содержит более одной материальной точки и расстояния между материальными точками в одном и том же подмножестве меньше, чем  $\frac{1}{3}R(t)$ . Для решения в различные интервалы времени могут быть определены различные разбиения.

В задаче трех тел, например, всякий раз, когда

$$\rho(t) < 1 < 10 < R(t),$$

из неравенства треугольника следует, что  $q_{ij}(t) < 1 < \frac{R(t)}{3}$  и  $q_{ik}(t), q_{jk}(t) > 9$  для разбиения  $\{\{m_i, m_j\}, \{m_k\}\}$ . Разумеется, различные разбиения, например,  $\{\{m_2, m_3\}, \{m_1\}\}$  и  $\{\{m_1, m_2\}, \{m_3\}\}$ , могут соответствовать различным интервалам времени.

Мы можем доказать следующий результат, опубликованный в [23]. Его основная суть в том, что если материальные точки движутся в кластерах, то для них псевдостолкновение возникнуть не может. Отсюда следует, что нестолкновительные особенности могут возникнуть, только если, по крайней мере, одна материальная точка перемещается между кластерами, чтобы передать необходимую кинетическую энергию, из-за которой система становится неограниченной за конечное время.

**Теорема 7.1 (Саари и Диаку, 1994 г.).** *Решение с кластерной конфигурацией системы (1.1) не может привести к псевдостолкновениям.*

*Доказательство.* По теореме 5.1, если  $t^*$  — нестолкновительная особенность, то  $R(t) \rightarrow \infty$  и  $\rho(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t^*$ . Поэтому, если для решения, приводящего к псевдостолкновению,  $\rho(t_0) < c_1 < c_2 < R(t_0)$  для некоторого  $t_0$ , тогда  $\rho(t) < c_1 < c_2 < R(t)$  для всех  $t$  в интервале  $[t_0, t^*)$ . Следовательно, после возникновения некоторого разбиения материальных точек оно сохраняется вдоль всего решения.

Предположим, что это разбиение определяет кластеры  $S_1, S_2, \dots, S_n$  при  $n < N$ . Центром масс кластера  $S_j$  является  $C_j = \left(\sum_{i \in S_j} m_i\right)^{-1} \sum_{i \in S_j} m_i \mathbf{q}_i$ . В выражении для  $\ddot{C}_j$  члены, относящиеся к  $S_j$ , сокращаются друг с другом, поэтому  $\ddot{C}_j$  содержит только члены, включающие в себя гравитационное притяжение между материальными точками из  $S_j$  и других кластеров. Отсюда следует, что  $|\ddot{C}_j|$  ограничена сверху, следовательно,  $\dot{C}_j$  и  $C_j$  имеют пределы при  $t \rightarrow t^*$ . Пусть  $\lim_{t \rightarrow t^*} C_j(t) = C_j^*, j = 1, 2, \dots, n$ . При  $t \rightarrow t^*$  расстояние  $q_{is}$  между материальной точкой  $m_i$  из  $S_j$



и материальной точкой  $m_s$  из  $S_k$  удовлетворяет неравенству

$$q_{is}(t) \leq |\mathbf{q}_i(t) - C_j^*| + |\mathbf{q}_s(t) - C_k^*| + |C_j^* - C_k^*| \leq \frac{2R(t)}{3} + |C_j^* - C_k^*|.$$

Если  $C = \max_{1 \leq i < j \leq n} |C_j^* - C_k^*|$ , то, для любых  $m_i$  и  $m_s$ , как указано выше,  $q_{is}(t) \leq \frac{2}{3}R(t) + C$ , следовательно  $R(t) \leq \frac{2}{3}R(t) + C$ . После деления этого отношения на  $R(t)$  и устремления  $t$  к  $t^*$ , мы получаем, что

$$1 \leq \frac{2}{3} + \frac{C}{R(t)} \rightarrow \frac{2}{3},$$

что является противоречием. Это завершает доказательство. ■

## 8. Примеры псевдостолкновений

В 1975 г. Джон Мазер и Ричард МакГихи привели пример псевдостолкновения в прямолинейной задаче четырех тел [15]. В одном предельном положении две материальные точки образуют кластер, в другом предельном положении образуется другой кластер из одной материальной точки, а оставшаяся материальная точка постоянно перемещается между двумя кластерами. Авторы доказали, что при выбранных соответствующим образом начальных условиях два кластера уходят на бесконечность за конечное время. Однако, для материальной точки, колеблющейся между кластерами, столкновения происходят каждый раз, когда она меняет направление. Столкновения являются «регуляризуемыми», т. е. после столкновения движение аналитически продолжается на том же самом уровне общей энергии. (Мы обсудим *регуляризацию* этого типа в § 10.) Следовательно, этот пример не доказывает гипотезу Пенлеве, которая требует, чтобы псевдостолкновение было первой из возникающих особенностей.

В 1984 г. Джо Джервер привел некоторые аргументы в пользу того, что псевдостолкновение может возникнуть в плоской задаче 5 тел [11]. Но он не привел полного доказательства для этого случая.

В 1987 г. Жихонг Ша — аспирант, занимающийся под руководством Дональда Саари в Северо-Западном университете, опубликовал полное подтверждение гипотезы Пенлеве [31]. Пример Ша связан с пространственной задачей пяти тел, в которой две пары тел образуют кластеры, а пятое тело колеблется между ними. В долгом и сложном доказательстве Ша сумел показать, что существуют начальные условия, которые приводят к псевдостолкновениям.

Непосредственно перед публикацией работы Ша, Джервер получил первый пример на плоскости для задачи  $3N$  тел при большом  $N$  [12]. Доказательства Джервера содержат множество технических вычислений. Оба вышеуказанных доказательства весьма сложны для начинающего в этой области. Более подробные обсуждения см. в [5] или непосредственно в исходных статьях, ссылки на которые приведены выше.

## 9. Взаимосвязь между особенностями

Естественно задать вопрос, существует ли некоторая связь между множествами начальных условий, приводящих к столкновениям, и множествами начальных условий, приводящих к псевдостолкновениям? Чтобы ответить на этот вопрос, предположим, что  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6N}$  — точка в фазовом пространстве, и рассмотрим решение  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  системы (1.1), которое проходит через  $\mathbf{x}$ , а более

точно такое, что  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})(0) = \mathbf{x}$ . Рассмотрим следующие множества:

$$C_\tau = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \text{ приводит к столкновению в момент } t^* \leq \tau\},$$

$$N_\tau = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \text{ приводит к псевдостолкновению в момент } t^* \leq \tau\},$$

которые представляют все точки в фазовом пространстве, которые лежат вдоль решений, ведущих к столкновениям и псевдостолкновениям, соответственно, и

$$E_\tau = \{(\mathbf{x}, t^*) \mid \mathbf{x} \in C_\tau\},$$

которое задает пару для каждой точки из  $C_\tau$  с соответствующей особенностью  $t^*$ . Также обозначим через  $\pi$  — проекцию из  $E_\tau$  в  $C_\tau$ ,

$$\pi: E_\tau \rightarrow C_\tau, \pi(\mathbf{x}, s) = \mathbf{x}.$$

Теперь мы можем доказать следующий результат, принадлежащий Саари и Ша [24].

**Теорема 9.1 (Саари и Ша, 1996 г.).** *Все предельные точки множества  $E_\tau$ , спроецированные на фазовое пространство, лежат вдоль решений, ведущих к псевдостолкновениям (т. е.  $\pi(\bar{E}_\tau \setminus E_\tau)$  содержится в  $N_\tau$ , где черта сверху означает топологическое замыкание).*

*Доказательство.* Если  $\mathbf{x}$  лежит в  $\pi(\bar{E}_\tau \setminus E_\tau)$ , тогда существует такое  $s$ , что  $(\mathbf{x}, s)$  принадлежит  $\bar{E}_\tau \setminus E_\tau$ . Напомним, что  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  является решением, со свойством  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})(0) = \mathbf{x}$ . Тогда существует такой момент времени  $\sigma \leq s$ , что  $[0, \sigma]$  является минимальным интервалом, в котором определено  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Действительно, если  $\sigma > s$ , тогда непрерывность решений по начальным данным гарантирует, что для каждого  $\epsilon > 0$  существует такая окрестность  $U$  точки  $\mathbf{x}$ , что все решения, начинающиеся в  $U$ , существуют на  $[0, \sigma - \epsilon)$ . Но это противоречит тому, что  $(\mathbf{x}, s)$  является предельной точкой множества  $E_\tau$ . Поскольку  $\mathbf{x}$  не определяет траекторию столкновения,  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  должно вести к псевдостолкновению. Это завершает доказательство. ■

Следующий результат, также доказанный Саари и Ша, показывает, что решения, ведущие к псевдостолкновениям, проходят произвольно близко к столкновениям. Его доказательство см. в [24].

**Теорема 9.2 (Саари и Ша, 1996 г.).** *Пусть  $\mathbf{x}$  — точка из  $N_\tau$ , которая ведет к псевдостолкновению в момент времени  $\tau$ . Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существуют такие  $t_0$  из  $[0, \tau)$  и  $\mathbf{y}$  из  $C_\tau$ , что расстояние между решениями, соответствующими  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в момент времени  $t_0$ , меньше или равно  $\epsilon$ . Более того,  $t^* \leq \epsilon$ , где  $t^*$  — момент столкновения, соответствующий  $\mathbf{y}$ .*

Теоремы 9.1 и 9.2 также остаются истинными, если мы заменим  $C_\tau$  (и соответственно  $E_\tau$  и  $N_\tau$ ) множеством  $T_\tau$ , в котором вместо слова *столкновение* мы запишем *по меньшей мере тройное столкновение*. Под этим мы понимаем, что столкновение не является двойным или многократным двойным, поэтому по меньшей мере три тела столкнулись в одной и той же точке пространства. Это позволяет более ясно представить связь между столкновениями и псевдостолкновениями.

Можно подытожить результаты этого параграфа следующим образом. В множестве особенностей, возникающих в какой-нибудь конечный момент времени, который не превосходит фиксированного значения  $\tau$ , множество псевдостолкновений образовано из предельных точек множества особенностей со столкновениями, в которых участвуют, по крайней мере, три тела. Более того, решения с псевдостолкновениями проходят произвольно близко к столкновениям с участием, по крайней мере, трех тел.

## 10. Продолжение после столкновения

Когда сталкиваются две или более точечных массы, система (1.1) теряет свой смысл. Но нам хотелось бы понять, что случится после упругого отскока, происходящего без изменения полной энергии системы. Таким образом, одной из важнейших проблем, возникающих в связи с изучением особенностей в задаче  $N$  тел, является проблема *регуляризации* столкновений, т. е. продолжение движения после столкновения. С математической точки зрения для этого требуется продолжение решения после особенности  $t^*$  «осмысленным образом». Но что означает «осмысленный» в этом случае?

Одной из точек зрения на процесс регуляризации является получение глобальных аналитических решений системы (1.1), определенных на всем  $\mathbb{R}$ . Это формулировка Вейерштрасса основной задачи на соискание Шведско-Норвежского приза короля Оскара II, который в 1889 г. был присужден Пуанкаре (см. [6]). Но несмотря на важные открытия в данной области, сделанные в призовой статье, Пуанкаре не решил конкретно задачу регуляризации. Первым аналитическое продолжение двойных столкновений в задаче трех тел получил финский астроном шведского происхождения Карл Зундман [28], представивший решение в виде степенного ряда<sup>1</sup> по  $t^{1/3}$ , сходящегося при всех  $t$ . Единственный исключительный случай — это случай нулевого кинетического момента,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  (что является необходимым условием для осуществления тройных столкновений [26]). Позднее немецкий математик Карл Людвиг Зигель доказал, что за исключением дискретного набора масс, решения с тройным столкновением не могут быть аналитически продолжены [25]. Однако большая продолжительность и техническая сложность этих доказательств не позволяют нам подробно представить их.

Другой подход к этой проблеме использовался итальянским математиком Туллио Леви-Чивита [14], который считал, что осмысленная регуляризация должна быть связана с близлежащими траекториями. Тем самым он требовал, чтобы непрерывность решений по начальным данным выполнялась при прохождении через столкновение. Например, двойные столкновения в ньютоновой задаче двух тел могут возникать, только если движение происходит на прямой линии [30]. Но прямолинейное движение является предельным случаем сильно вытянутого эллипса, поэтому непрерывность по начальным условиям выполняется. Однако в задаче двух тел Манева с релятивистской поправкой к ньютонову потенциалу двойные столкновения могут происходить на спиральных траекториях, которые не аппроксимируют эллипс [4], поэтому движение не является регуляризуемым по начальным данным. Трактовка регуляризации по Леви-Чивита имеет большее практическое значение, поскольку она позволяет изучать траектории, проходящие вблизи столкновений. Современная точка зрения на регуляризацию этого типа развивается американскими математиками Чарльзом Конли, Робертом Истоном и Ричардом МакГихи (см., к примеру, [10]) и известна в литературе как *блочная регуляризация*. Предлагаем обсудить ее более подробно.

## 11. Блочная регуляризация

Чтобы представить понятие блочная регуляризация, нам предварительно нужно ввести несколько обозначений и определений. Пусть  $\mathbf{M}$  — многообразие класса  $C^\infty$  размерности  $d$ ,

<sup>1</sup>К сожалению, решение Зундмана задачи трех тел оказалось полезным только с точки зрения задачи регуляризации. В остальных случаях оно мало полезно как с теоретической так и с практической точек зрения. Это происходит из-за чрезвычайно медленной скорости сходимости, и необходимо взять, по меньшей мере,  $10^{8,000,000}$  членов степенного ряда, чтобы он мог использоваться в практических астрономических исследованиях (см. также [7] и [20], с. 125).

$\Delta$  — замкнутое множество, содержащееся в  $\mathbf{M}$ , и  $\mathbf{V}: \mathbf{M} \setminus \Delta \rightarrow \mathbf{M} \setminus \Delta$  — векторное поле класса  $C^1$ , которое определяет систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}).$$

Если  $\mathbf{x}$  — решение задачи Коши, определенное условием  $\mathbf{x}(0) = \gamma$ , то также обозначим  $\mathbf{x}(t)$  через  $\gamma t$ . Также рассмотрим подмножества  $\mathbf{A}$  множества  $\mathbf{M} \setminus \Delta$  и  $\Lambda$  множества  $\mathbb{R}$ . Если  $\gamma t$  определено для каждого  $\mathbf{x}$  из  $\mathbf{A}$  и  $t$  из  $\Lambda$ , обозначим

$$\mathbf{A}\Lambda = \{\gamma t \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A}, t \in \Lambda\}.$$

Будем называть  $\gamma t$  *действием* векторного поля  $\mathbf{V}$  на многообразии  $\mathbf{M} \setminus \Delta$ . Далее предположим, что  $\mathbf{N}$  является компактным подмногообразием многообразия  $\mathbf{M}$  класса  $C^\infty$  той же самой размерности  $d$ . Обозначим через  $\mathbf{n}$  границу  $\mathbf{N}$  и предположим, что  $\mathbf{n}$  и  $\Delta$  не пересекаются. Далее обозначим через

$$\mathbf{n}^+ = \{\gamma \in \mathbf{n} \mid \text{для некоторого } t > 0, \gamma(-t, 0) \cap \mathbf{N} = \emptyset\}$$

множество *точек входа* границы  $\mathbf{n}$  и через

$$\mathbf{n}^- = \{\gamma \in \mathbf{n} \mid \text{для некоторого } t > 0, \gamma(0, t) \cap \mathbf{N} = \emptyset\}$$

множество *точек выхода* границы  $\mathbf{n}$ . Другими словами,  $\mathbf{n}^+$  и  $\mathbf{n}^-$  — точки входа в и выхода из  $\mathbf{N}$  соответственно для решений системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ . Аналогично обозначим через

$$\tau = \{\gamma \in \mathbf{n} \mid \mathbf{V} \text{ касается } \mathbf{n} \text{ на } \gamma\}$$

множество *точек касания* решений с  $\mathbf{n}$ . Заметим, что  $\mathbf{n}^+ \cup \mathbf{n}^- \cup \tau = \mathbf{n}$ . Будем говорить, что  $\mathbf{N}$  — *изолирующий блок* для  $\mathbf{V}$ , если  $\tau = \mathbf{n}^+ \cap \mathbf{n}^-$  и  $\tau$  — подмногообразие класса  $C^\infty$  и коразмерности 1 для  $\mathbf{n}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В общем случае  $\mathbf{n}^+ \cap \mathbf{n}^-$  не является подмножеством  $\tau$ , и  $\tau$  не является подмножеством  $\mathbf{n}^+ \cap \mathbf{n}^-$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если  $\mathbf{N}$  — изолирующий блок для  $\mathbf{V}$ , то  $\mathbf{n}^+$  и  $\mathbf{n}^-$  являются подмногообразиями  $\mathbf{n}$  с общей границей  $\tau$ .

Далее определим множества

$$\mathbf{a}^+ = \{\gamma \in \mathbf{n}^+ \mid \gamma t \in \mathbf{N} \text{ для всех } t \geq 0, \text{ для которых } \gamma t \text{ определено}\},$$

представляющие собой все точки входа, для которых решение не покидает  $\mathbf{N}$ , и

$$\mathbf{a}^- = \{\gamma \in \mathbf{n}^- \mid \gamma t \in \mathbf{N} \text{ для всех } t \leq 0, \text{ для которых } \gamma t \text{ определено}\},$$

представляющие собой все точки выхода, для которых решение начинается в  $\mathbf{N}$ . Следовательно,  $\mathbf{n}^+ \setminus \mathbf{a}^+$  — это множество всех точек из  $\mathbf{n}^+$ , соответствующих решениям, которые входят в  $\mathbf{N}$  и в конечном итоге покидают его, а  $\mathbf{n}^- \setminus \mathbf{a}^-$  — это множество точек из  $\mathbf{n}^-$ , соответствующих решениям, которые покидают  $\mathbf{N}$ , ранее войдя в него в некоторый момент времени. Также определим функцию

$$\pi: \mathbf{n}^+ \setminus \mathbf{a}^+ \rightarrow \mathbf{n}^- \setminus \mathbf{a}^-, \quad \pi(\gamma) = \gamma t^+,$$

где  $t^+ = \sup\{t \geq 0 \mid \gamma t \in \mathbf{N}\}$ . Отметим, что  $\pi$  вполне определена, и что она является гомеоморфизмом из  $\mathbf{n}^+ \setminus \mathbf{a}^+$  в  $\mathbf{n}^- \setminus \mathbf{a}^-$ .



Теперь мы можем определить понятие блочной регуляризации. Предположим, что  $\mathbf{N}$  — изолирующий блок и что  $\Delta$  является подмножеством  $\mathbf{N}$ . Если  $\pi$  допускает единственное продолжение в виде гомеоморфизма из  $\mathbf{n}^+$  в  $\mathbf{n}^-$ , то  $\Delta$  называется *блочно-регуляризуемой*. В задаче  $N$  тел  $\Delta$  является особенностью со столкновением, поэтому блочная регуляризация столкновения означает соединение единственным способом решения со столкновением с выходящим решением, так чтобы непрерывность решений по начальным данным для всех близлежащих траекторий выполнялась.

Для блочной регуляризации ньютоновой задачи двух тел Роберт Истон доказал следующий результат [10].

**Теорема 11.1 (Истон, 1971 г.).** *Решения со столкновениями в ньютоновой задаче двух тел являются блочно-регуляризуемыми.*

Доказательство основано на ранее сформулированной идее, что задача двух тел на прямой, в которой происходят столкновения, является предельным случаем эллиптических траекторий. Для блочной регуляризации тройных столкновений Ричард МакГири получил следующее утверждение [16], доказательство которого является слишком длинным для нашей статьи, носящей вводный характер.

**Теорема 11.2 (МакГири, 1974 г.).** *За исключением пренебрежительно малого множества наборов масс тройные столкновения не являются блочно-регуляризуемыми.*

Фактически, необходимым условием для того, чтобы столкновения были блочно регуляризуемыми, является их исключительность с точки зрения теории меры (это выполняется в случае ньютоновой задачи  $N$  тел, что доказал Дональд Саари в 1971–1973 гг., см. [5]). Докажем результат в этом смысле.

**Теорема 11.3.** *Предположим, что для любого изолирующего блока  $\mathbf{N}$  соответствующий гомеоморфизм  $\pi: \mathbf{n}^+ \setminus \mathbf{a}^+ \rightarrow \mathbf{n}^- \setminus \mathbf{a}^-$  является таким, что  $\mathbf{a}^+$  и  $\mathbf{a}^-$  содержат множества, которые являются открытыми в индуцированной топологии. Тогда множество особенностей  $\Delta$  не является блочно-регуляризуемым.*

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{N}$  — изолирующий блок, для которого соответствующий гомеоморфизм  $\pi$  может быть продолжен до гомеоморфизма из  $\mathbf{n}^+$  в  $\mathbf{n}^-$ . Но  $\mathbf{a}^+$  и  $\mathbf{a}^-$  — замкнутые множества в  $\mathbf{N}$ , который является компактным, поэтому они также являются компактными. Сначала предположим, что  $\mathbf{a}^+$  и  $\mathbf{a}^-$  одномерные. Тогда, по крайней мере, одно из их связных подмножеств гомеоморфно некоторому замкнутому интервалу  $[a, b]$  и граничные точки отображаются в концы интервала. Но существует бесконечное множество гомеоморфизмов из  $[a, b]$  в  $[a, b]$ , которые отображают  $a$  в  $a$  и  $b$  в  $b$ . Поэтому продолжение не является единственным. Для множеств более высоких размерностей  $\mathbf{a}^+$  и  $\mathbf{a}^-$  мы можем обобщить идею, используя гиперкубы вместо интервалов. Это завершает доказательство. ■

Тот факт, что двойные столкновения в задаче двух тел Манева не являются блочно-регуляризуемыми — следствие этой теоремы. Это происходит потому, что множество начальных данных, приводящих к столкновениям, содержит открытое множество. Интересно заметить, что не существует связи между блочной регуляризацией и аналитической регуляризацией вдоль решения. Подробности см. в [5].

## 12. Многообразии столкновений

Полезное средство для понимания особенностей со столкновениями было описано американским математиком Ричардом МакГихи [16]. Его идея заключается в использовании подходящих преобразований, которые раздувают особенность в *многообразии столкновений*, которое расширяет фазовое пространство. Поток в многообразии столкновений является фиктивным в том смысле, что он не имеет физического смысла, но ввиду непрерывности решений по начальным данным его исследование позволяет получить информацию о физическом поведении траекторий, проходящих вблизи столкновения. Во многих случаях эту информацию можно использовать для получения глобальных результатов о качественных свойствах потока.

Теперь применим эту идею к задаче двух тел, заданной однородным потенциалом  $U(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-\alpha}$ , где  $|\mathbf{x}|$  — расстояние между двумя материальными точками с единичной массой, а  $\alpha > 0$  — константа. Заметим, что при  $\alpha = 1$  мы получим потенциал Ньютона с единичными массами. (Подробное изложение этого анализа см. в [17].) Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\alpha|\mathbf{x}|^{-\alpha-2}\mathbf{x}.$$

Очевидно, что столкновения происходят, только если  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = \mathbf{0}$ . Интегралы энергии и кинетического момента задаются уравнениями

$$\frac{1}{2}|\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^{-\alpha} = h \quad \text{и} \quad x_1y_2 + x_2y_1 = c,$$

где  $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$  — импульс. Далее рассмотрим преобразования МакГихи

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbf{0}) \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (r, \theta, w, v),$$

заданные формулами

$$\begin{cases} x_1 = r^\gamma \cos \theta, \\ x_2 = r^\gamma \sin \theta, \\ y_1 = r^{-\beta\gamma}(v \cos \theta - w \sin \theta), \\ y_2 = r^{-\beta\gamma}(v \sin \theta + w \cos \theta), \end{cases}$$

где  $\beta = \frac{\alpha}{2}$  и  $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$ . Этот аналитический диффеоморфизм приводит к новым уравнениям

$$\begin{cases} \dot{r} = (\beta + 1)v, \\ \dot{\theta} = r^{-1}w, \\ \dot{w} = r^{-1}(\beta - 1)wv, \\ \dot{v} = r^{-1}[w^2 + \beta(v^2 - 2)], \end{cases} \quad (12.1)$$

соотношения для энергии и кинетического момента имеют вид

$$w^2 + v^2 - 2 = 2hr^{\alpha\gamma} \quad \text{и} \quad r^{(1-\beta)\gamma}w = c.$$

Определим *многообразие постоянной энергии*

$$\mathbf{M}(h) = \{(r, \theta, w, v) \in \mathbb{R}^4 \mid r \geq 0, w^2 + v^2 - 2 = 2hr^{\alpha\gamma}\}$$

и многообразии столкновений

$$\mathbf{C} = \{(r, \theta, w, v) \in \mathbb{R}^4 \mid r = 0, w^2 + v^2 = 2\},$$

которое содержится в  $\mathbf{M}(h)$  при каждом значении  $h$ . Отметим, что  $\mathbf{C}$  гомеоморфно двумерному тору  $S^1 \times S^1$ . Система (12.1) неопределена на  $\mathbf{C}$ . Чтобы продолжить систему (12.1) на  $\mathbf{C}$  (что геометрически означает вложение тора в фазовое пространство), изменим масштаб временной переменной с помощью преобразования

$$dt = r d\tau,$$

являющегося аналитическим диффеоморфизмом, который преобразует систему (12.1) к виду

$$\begin{cases} r' = (\beta + 1)rv, \\ \theta' = w, \\ w' = (\beta - 1)wv, \\ v' = w^2 + \beta(v^2 - 2). \end{cases} \quad (12.2)$$

Штрих означает дифференцирование по фиктивной временной переменной  $\tau$ . Соотношения для энергии и кинетического момента, а также многообразия  $\mathbf{M}(h)$  и  $\mathbf{C}$  в этих новых переменных сохраняют свой вид. Отметим, что система (12.2) теперь определена при  $r = 0$ , поэтому фазовое пространство продолжается на многообразии столкновений  $\mathbf{C}$ . Последние два уравнения системы (12.2) образуют независимую систему

$$\begin{cases} w' = (\beta - 1)wv, \\ v' = w^2 + \beta(v^2 - 2), \end{cases} \quad (12.3)$$

для которой окружность  $w^2 + v^2 = 2$  соответствует многообразию столкновений  $\mathbf{C}$ . Любое решение системы (12.3), которое приближается к этой окружности, стремится к столкновению. (Используя результаты §§ 3 и 4, легко увидеть, что псевдостолкновения невозможны.) Чтобы проверить, могут ли происходить столкновения, нам предварительно следует исследовать поток на многообразии столкновений, который не имеет непосредственного физического смысла. Система (12.3) также дает нам глобальную качественную картину задачи. Эта картина зависит от значений параметра  $\beta$ . Обсудим далее все возможные случаи.

### 13. Случай $\beta < 1$

В этом параграфе определим глобальный поток системы (12.3) при  $\beta < 1$ . Как мы увидим, качественное поведение решений в этом классе частично похоже на поведение решений задачи Кеплера ( $\beta = \frac{1}{2}$ ), которая содержится в описываемом классе.

Система (12.3) имеет 4 положения равновесия:  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$  и  $(0, \pm\sqrt{2})$ . Окружность  $w^2 + v^2 = 2$  и прямая  $w = 0$  являются инвариантными множествами. Информацию об остальной части потока можно получить, линеаризуя систему в каждом из положений равновесия. Линеаризация позволяет нам сделать вывод, что  $(0, \pm\sqrt{2})$  являются седлами. Используя интеграл энергии также можно увидеть, что  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$  являются центрами. В результате получаем изображение потока на рис. 1. Из соотношения для энергии можно вычислить, что окружность  $w^2 + v^2 = 2$  соответствует  $h = 0$ , тогда как потоки внутри и вне окружности отвечают  $h < 0$  и  $h \geq 0$ , соответственно. Вспоминая, что инвариантная окружность представляет собой многообразие столкновений  $\mathbf{C}$ , мы можем сделать следующие выводы из изучения систем (12.2) и (12.3).



**Теорема 13.1 (МакГихи, 1981 г.).** При  $h \geq 0$  (что соответствует гиперболическим или параболическим траекториям в задаче Кеплера) и  $w \neq 0$  (т.е. для ненулевого кинетического момента) все решения неограничены в обоих направлениях; если  $w = 0$ , то решения либо начинаются со столкновения, либо заканчиваются столкновением. Для  $h < 0$  (что соответствует эллиптическим траекториям в задаче Кеплера) все решения ограничены. Существуют две устойчивых круговых периодических траектории, соответствующих критическим точкам  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ ; при  $w = 0$  траектории начинаются со столкновения и заканчиваются столкновением; все другие траектории являются либо периодическими, либо квазипериодическими.

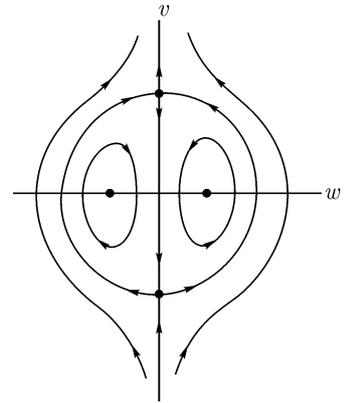


Рис. 1. Поток системы (12.3) при  $\beta < 1$

### 14. Случай $\beta = 1$

В этом параграфе мы определим глобальный поток системы (12.3) при  $\beta = 1$ . Это пограничный случай между  $\beta < 1$  и  $\beta > 1$ , и он демонстрирует весьма интересное качественное поведение.

Переменная  $w$  становится кинетическим моментом. При  $h = 0$   $v$  также становится первым интегралом. Из соотношения для энергии можно увидеть, что окружность  $w^2 + v^2 = 2$  соответствует  $h = 0$ , тогда как потоки внутри и вне окружности отвечают  $h < 0$  и  $h \geq 0$  соответственно. Система (12.3) имеет бесконечно много положений равновесия, и все они лежат на окружности  $w^2 + v^2 = 2$ . Другие траектории являются вертикальными в фазовой плоскости, поэтому они либо достигают многообразия столкновения  $\mathbf{C}$ , либо нет. Поток изображен на рис. 2. Мы получаем следующий результат.

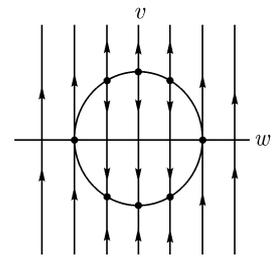


Рис. 2. Поток системы (12.3) при  $\beta = 1$

**Теорема 14.1 (МакГихи, 1981 г.).** При  $h > 0$  и  $|w| > \sqrt{2}$ , каждое решение неограничено в обоих направлениях движения времени; при  $|w| \leq \sqrt{2}$  каждое решение либо начинается со столкновения либо заканчивается столкновением и неограничено в другом направлении. При  $h = 0$  и  $v \neq 0$  каждое решение также либо начинается со столкновения, либо заканчивается столкновением и неограничено в другом направлении; при  $v = 0$  каждое решение является круговым. При  $h < 0$  каждое решение начинается со столкновения и заканчивается столкновением.

### 15. Случай $\beta > 1$

В этом параграфе мы определим глобальный поток системы (12.3) при  $\beta > 1$ . В этом случае качественное поведение потока сильно отличается от поведения потока в задаче Кеплера.

Система (12.3) вновь имеет 4 положения равновесия:  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$  и  $(0, \pm\sqrt{2})$ , но, в отличие от случая  $\beta < 1$ , первые два положения равновесия теперь лежат вне окружности  $w^2 + v^2 = 2$ , которая является инвариантным множеством. Информацию об остальной части потока можно получить, линеаризуя систему в каждом из положений равновесия. Линеаризация позволяет сделать вывод, что  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$  и  $(0, \pm\sqrt{2})$  являются седлами, поэтому поток выглядит так, как показано



на рис. 3. Из соотношения для энергии мы видим, что окружность  $w^2 + v^2 = 2$  соответствует  $h = 0$ , тогда как потоки внутри и вне окружности отвечают  $h < 0$  и  $h \geq 0$  соответственно. Вспоминая, что инвариантная окружность представляет собой многообразие столкновений  $\mathbf{C}$ , можно сделать следующие выводы из изучения систем (12.2) и (12.3).

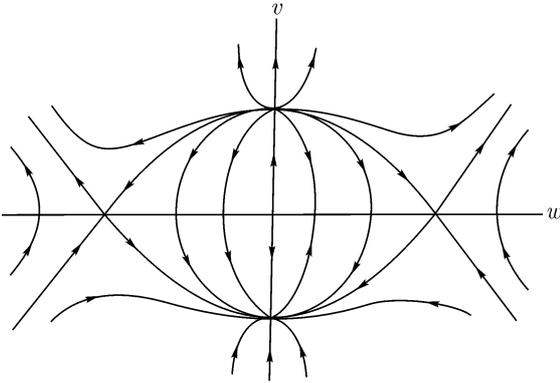


Рис. 3. Поток системы (12.3) при  $\beta > 1$

**Теорема 15.1 (МакГихи, 1981 г.).** *Круговые периодические траектории, соответствующие положениям равновесия  $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ , которые теперь возникают при положительной энергии, неустойчивы. Некоторые решения, являющиеся асимптотическими к одной из круговых траекторий, приводят к столкновениям, тогда как другие неограничены. При  $h > 0$  существуют неограниченные решения со столкновением, решения, начинающиеся со столкновения и заканчивающиеся столкновением, и решения, неограниченные в обоих направлениях. При  $h \leq 0$  все решения начинаются со столкновения и заканчиваются столкновением за исключением*

*решений с нулевой энергией и кинетическим моментом, которые начинаются со столкновения или заканчиваются столкновением и неограничены в другом направлении.*

## 16. Выводы и перспективы

Изучение особенностей является важным для понимания качественного поведения решений в динамике систем материальных точек. В некоторых случаях доля начальных условий, приводящих к столкновениям, является пренебрежимо малой, но в других она может быть большой как с точки зрения теории меры, так и с топологической точки зрения (см. также [22]).

Многие из вышеизложенных идей могут использоваться в других задачах, а также могут быть обобщены для неоднородных потенциалов, например, для квазиоднородных потенциалов, которые имеют вид  $\frac{a}{r^\alpha} + \frac{b}{r^\beta}$ , где  $a, b, \alpha$ , и  $\beta$  — константы, удовлетворяющие  $0 \leq \alpha < \beta$ . Они являются обобщениями многих потенциалов, используемых в астрономии, физике и химии, а именно потенциалов Ньютона, Манева, Кулона, ван дер Ваальса, Шварцшильда, Биркгофа, Леннарда — Джонса, Либоффа и т. д.

Также важными являются анизотропические потенциалы, только два из которых изучались применительно к задаче двух тел вплоть до настоящего момента: анизотропические задачи Кеплера [13] и Манева [3], [8], [9]. Первая полезна для понимания связей, существующих между классической и квантовой механиками, тогда как вторая находится на пересечении классической, квантовой и релятивистской механики. В каждом из этих случаев, а также в общем случае, особенности играют критическую роль. Изучение квазиоднородных потенциалов с этой точки зрения еще далеко не завершено.

## Список литературы

- [1] Bruns H. *Über die Integrale des Vielkörper-Problems* // Acta Math., 1887, V. 11, p. 25–96.
- [2] Chazy J. *Sur les singularités impossible du problème des  $n$  corps* // Compt. rend. Hebd. Séanc. l'Acad. Sci. Paris, 1920, V. 170, p. 575–577.
- [3] Craig S., Diacu F., Lacomba E. A., Perez E. *On the anisotropic Manev problem* // J. Math. Phys., 1999, V. 40, p. 1359–1375.
- [4] Delgado J., Diacu F., Lacomba F. N., Mingarelli A., Mioc V., Perez E., Stoica C. *The global flow of the Manev problem* // Journ. Math. Phys., 1996, V. 37, № 6, p. 2748–2761.
- [5] Diacu F. *Singularities of the  $N$ -Body Problem — An Introduction to Celestial Mechanics* // Les Publications CRM, Montréal, 1992.
- [6] Diacu F., Holmes P. *Celestial Encounters — The Origins of Chaos and Stability* // Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [7] Diacu F. *The solution of the  $n$ -body problem* // Math. Intelligencer, 1996, V. 18, № 3, p. 66–70.
- [8] Diacu F. *Stability in the anisotropic Manev problem*, submitted for publication.
- [9] Diacu F., Santoprete M. *Nonintegrability and chaos in the anisotropic Manev problem*, in preparation.
- [10] Easton R. *Regularization of vector fields by surgery* // Journ. Differential Equations, 1971, V. 10, p. 92–99.
- [11] Gerver J. *A possible model for a singularity without collisions in the five-body problem* // Journ. Diff. Equations, 1984, V. 52, p. 76–90.
- [12] Gerver J. *The existence of pseudocollisions in the plane* // Journ. Diff. Equations, 1991, V. 89, p. 1–68.
- [13] Gutzwiller M. C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* // Springer Verlag, New York, 1990.
- [14] Levi-Civita T. *Sur la régularisation du problème des trois corps* // Acta Math., 1920, V. 42, p. 99–144.
- [15] Mather J., McGehee R. *Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time*. In: *Dynamical Systems Theory and Applications* (Ed. Moser J.) // Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, New York, 1975, V. 38, p. 573–587.
- [16] McGehee R. *Triple collision in the collinear three-body problem* // Inventiones math., 1974, V. 27, p. 191–227.
- [17] McGehee R. *Double collisions for a classical particle system with nongravitational interaction* // Comment. Math. Helvetici, 1981, V. 56, p. 524–557.
- [18] McGehee R. *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics* // Expo. Math., 1986, V. 4, p. 335–345.
- [19] Painlevé P. *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* // Hermann, Paris, 1897.
- [20] Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics* (edited and introduced by D. L. Goroff) // Amer. Inst. Phys., 1993. См. также: Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*. Избранные труды в трех томах // М.: Наука, 1971.
- [21] Saari D. *Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems* // Arch. Rational Mech. Anal., 1973, V. 49, p. 311–320.
- [22] Saari D. *Collisions are of first category* // Proceedings Amer. Math. Soc., 1975, V. 47, № 2, p. 442–445.

- [23] Saari D., Diacu F. *Superhyperbolic expansion, noncollision singularities and symmetry configurations* // Celestial Mechanics, 1994, V. 60, p. 91–98.
- [24] Saari D., Xia Z. *Singularities in the Newtonian  $n$ -body problem* // Contemporary Math., 1996, V. 198, p. 21–30.
- [25] Siegel C. L. *Der Dreierstoss* // Annals of Math., 1941, V. 42, № 1, p. 127–168.
- [26] Siegel C. L., Moser J. K. *Lectures on Celestial Mechanics* // Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [27] Sperling H.-J. *On the real singularities of the  $N$ -body problem* // Journ. Reine Angew. Math., 1970, V. 245, p. 15–40.
- [28] Sundman K. *Mémoire sur le problème des trois corps* // Acta Math., 1912, V. 36, p. 105–179.
- [29] von Zeipel H. *Sur les singularités du problème des  $n$  corps* // Arkiv för Mat. Astr. Fys., 1908, V. 4, № 32, p. 1–4.
- [30] Wintner A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* // Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941. См. также: Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики* // М.: Наука, 1967.
- [31] Xia Z. *The existence of noncollision singularities in the  $N$ -body problem* // Annals of Math., 1992, V. 135, p. 411–468.