

# О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями

С. В. Гонченко, О. В. Стенькин, Л. П. Шильников

НИИ Прикладной математики и кибернетики  
603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10  
E-mail: gosv100@uic.nnov.ru, ostenkin@mail.ru, lpshilnikov@mail.ru

Получено 12 декабря 2005 г.

Пусть  $C^r$ -гладкий,  $r \geq 5$ , двумерный диффеоморфизм  $f$  имеет негрубый гетероклинический контур, содержащий несколько седловых периодических и гетероклинических траекторий, причем среди последних есть негрубые, в точках которых инвариантные многообразия соответствующих седел пересекаются нетрансверсально. Предположим, что контур содержит по крайней мере две такие седловые периодические траектории, что седловая величина (модуль произведения мультипликаторов) одной из них меньше 1, а другой — больше 1. Тогда, как показано в работе, в любой окрестности, в  $C^r$ -топологии, диффеоморфизма  $f$  в пространстве  $C^r$ -гладких диффеоморфизмов существуют области (области Ньюхауса с гетероклиническими касаниями), в которых плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество устойчивых и неустойчивых замкнутых инвариантных кривых. Для случая трехмерных потоков этот результат означает существование областей Ньюхауса, в которых плотны потоки со счетным множеством устойчивых и неустойчивых двумерных инвариантных торов.

Ключевые слова: негрубый гетероклинический контур, область Ньюхауса, замкнутая инвариантная кривая.

S. V. Gonchenko, O. V. Sten'kin, L. P. Shilnikov

## On the existence of infinitely many stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse regions with heteroclinic tangencies

Let a  $C^r$ -smooth ( $r \geq 5$ ) two-dimensional diffeomorphism  $f$  have a non-transversal heteroclinic cycle containing several saddle periodic and heteroclinic orbits and, besides, some of the heteroclinic orbits are non-transversal, i.e. at the points of these orbits the invariant manifolds of the corresponding saddles intersect non-transversally. Suppose that a cycle contains at least two saddle periodic orbits such that the saddle value (the absolute value of product of multipliers) of one orbit is less than 1 and it is greater than 1 for the other orbit. We prove that in any neighbourhood (in  $C^r$ -topology) of  $f$  in the space of  $C^r$ -diffeomorphisms, there are open regions (so-called Newhouse regions with heteroclinic tangencies) where diffeomorphisms with infinitely many stable and unstable invariant circles are dense. For three-dimensional flows, this result implies the existence of Newhouse regions where flows having infinitely many stable and unstable invariant two-dimensional tori are dense.

Keywords: nontransversal heteroclinic cycle, Newhouse region, invariant circle.

Mathematical Subject Classifications: 39Axx, 39B05

## Введение

Хорошо известно, что негрубые многомерные динамические системы, в отличие от негрубых двумерных векторных полей, могут образовывать открытые области в пространстве гладких систем. Среди таких объектов особое место занимают так называемые *области Ньюхауса*, в которых плотны системы, имеющие седловые периодические траектории, инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия которых пересекаются нетрансверсально в точках некоторых гомоклинических орбит. В этом случае говорят также, что такие системы имеют гомоклинические касания.

Одним из фундаментальных свойств областей Ньюхауса является то, что они существуют в любой окрестности (в  $C^r$ -топологии с  $r \geq 2$ ) любой системы с гомоклиническим касанием. Это динамическое явление было открыто Ньюхаусом [20] в случае двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму, обладающему следующими свойствами: а) существует седловая неподвижная (периодическая) точка  $O$  с мультипликаторами  $\lambda$  и  $\gamma$ , где  $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$ , такими, что седловая величина  $\sigma \equiv |\lambda\gamma|$  отлична от единицы; б) устойчивое  $W^s(O)$  и неустойчивое  $W^u(O)$  инвариантные многообразия касаются по некоторой гомоклинической траектории квадратичным образом.

Позднее этот результат Ньюхауса был распространен и на многомерный случай [5, 21, 22]. Причем, также как и в [20], существование областей негрубости было установлено в случае трансверсальных конечно-параметрических семейств [5]. Естественно, что такие области, как в пространстве динамических систем, так и в пространстве параметров, получили название областей Ньюхауса.

Одной из важных особенностей поведения систем в областях Ньюхауса является сосуществование грубых периодических траекторий различных типов. Так, в случае двумерных диффеоморфизмов (трехмерных потоков) при условии, что  $\sigma < 1$ , в областях Ньюхауса плотны системы, имеющие одновременно счетное множество седловых и счетное множество устойчивых периодических траекторий [19] (если  $\sigma > 1$ , — то вполне неустойчивых). В многомерном случае (размерность фазового пространства для отображений  $\geq 3$  и для потоков  $\geq 4$ ) могут сосуществовать также и седловые периодические траектории разных индексов (с разными размерностями устойчивых многообразий) [3].

Другая принципиальная особенность областей Ньюхауса состоит в том, что в них плотны системы со счетным множеством периодических траекторий любого порядка вырождения, а также системы со счетным множеством гомоклинических касаний любого порядка [4, 16, 15, 2]. При этом, в многомерном случае периодические траектории могут иметь уже несколько мультипликаторов, лежащих на единичной окружности (подробнее см. в [3, 15]). Однако, в случае двумерных диффеоморфизмов (трехмерных потоков) при условии, что  $\sigma \neq 1$ , у систем из соответствующих областей Ньюхауса все негрубые периодические траектории будут иметь лишь один мультипликатор, равный по модулю единице, либо  $+1$ , либо  $-1$ .

Области Ньюхауса существуют также и вблизи систем с негрубыми гетероклиническими контурами: здесь в отличие от гомоклинического случая имеется уже несколько седловых периодических траекторий и соответственно несколько гетероклинических орбит. На рис. 1 представлены два примера двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами: в первом случае (рис. 1а) показан контур «общего типа», второй же случай (рис. 1б) отвечает контуру «простейшего типа». Основному случаю (коразмерности один) отвечает контур, в котором ровно одна гетероклиническая траектория негрубая — в ее точках соответствующие устойчивое и неустойчивое многообразия имеют квадратичное касание —, а также седловые величины всех седел отличны от единицы. Случай, когда все седловые величины одновременно меньше или

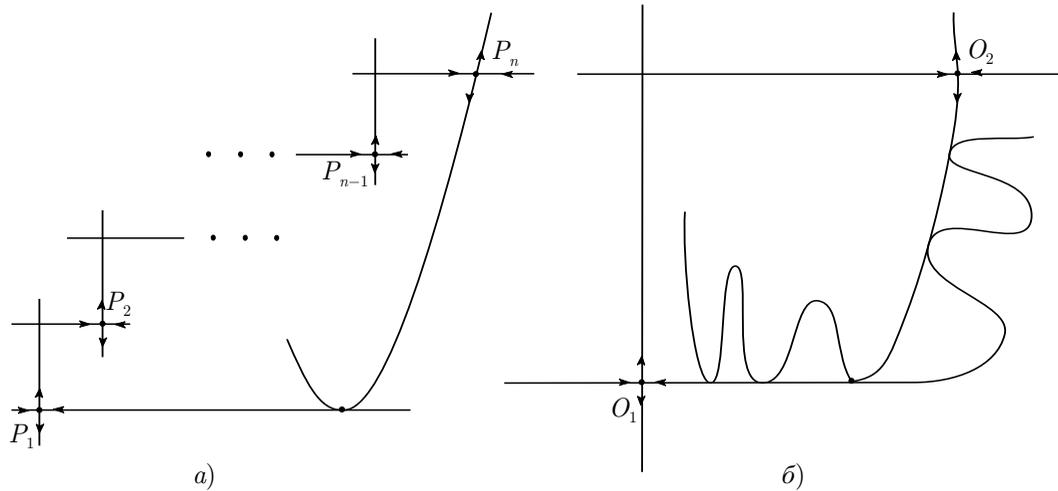


Рис. 1. Два примера двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим а) несколько седловых неподвижных точек, б) две седловые неподвижные точки.

больше единицы, в принципиальном плане не отличается от гомоклинического. Однако, если контур содержит хотя бы две седловые периодические траектории, у одной из которых седловая величина меньше, а у другой больше единицы, — мы называем такие контура *контуром смешанного типа* — возникает новое явление, которое было установлено в [6] для случая двумерных диффеоморфизмов. Именно, вблизи любого двумерного диффеоморфизма с негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество седловых, счетное множество устойчивых и счетное множество вполне неустойчивых периодических траекторий.

Это утверждение справедливо и для общих однопараметрических семейств [6]. Характерной особенностью соответствующих интервалов Ньюхауса является то, что в них плотны значения параметра, при которых диффеоморфизм семейства имеет контур «исходного типа»: он содержит те же седловые неподвижные точки, близкие грубые гетероклинические траектории и новую (многообходную) гетероклиническую траекторию, в точках которой соответствующие устойчивое и неустойчивое многообразия имеют квадратичное касание. В подобной ситуации естественно говорить об областях (интервалах) Ньюхауса с *гетероклиническими касаниями*. Отметим, что в этих областях плотны также диффеоморфизмы с гомоклиническими касаниями, а следовательно, и с негрубыми периодическими траекториями указанных выше вырождений. Однако, из того, что в окрестности исходного контура наблюдается как сжатие, так и растяжение площадей, естественно ожидать, что в таких областях Ньюхауса с гетероклиническими касаниями могут существовать периодические траектории «нейтрального типа» устойчивости, например, с двумя мультипликаторами на единичной окружности. А тогда понятно, что в этом случае можно надеяться, что в таких областях Ньюхауса будут плотны диффеоморфизмы со счетным множеством замкнутых инвариантных кривых.

Соответственно, это влечет, что у трехмерных потоков со знакопеременной дивергенцией могут существовать области Ньюхауса, в которых плотны потоки со счетным множеством двумерных инвариантных торов (как мы покажем, устойчивых и неустойчивых). Эти результаты показывают, что системы со знакопеременной дивергенцией могут обладать «смешанной динамикой», которая сочетает в себе определенные элементы диссипативного (асимптотически устойчивые и неустойчивые периодические траектории) и консервативного (бесконечное множество инвариантных торов и периодические траектории с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$ ) поведения. При

этом, как мы покажем, одним из характерных (типичных) свойств такой «смешанной динамики» является то, что в совокупности траектории различных типов неотделимы друг от друга — в их замыкании могут лежать, например, нетривиальные гиперболические множества.

Решению этих проблем посвящена данная работа<sup>1</sup>.

## 1. Основные результаты

В статье будут изучаться динамические свойства двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром. В общем случае такой контур содержит несколько грубых седловых периодических траекторий,  $O_1, \dots, O_n$ , и гетероклинических орбит,  $\Gamma_{12}, \dots, \Gamma_{n-1n}$  и  $\Gamma_{n1}$ , таких, что  $\Gamma_{ii+1} \subset W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и  $\Gamma_{n1} \subset W^u(O_n) \cap W^s(O_1)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и, кроме того, среди указанных пересечений есть нетрансверсальные (рис. 1а). Будем рассматривать случай, когда среди седловых траекторий  $O_1, \dots, O_n$ , входящих в контур, есть по крайней мере две такие, что у одной из них седловая величина меньше единицы, а у другой — больше единицы. Такой контур будем называть *негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа*.

В работе будет доказана следующая

**Основная теорема.** *В пространстве  $C^r$ -гладких,  $r \geq 5$ , двумерных диффеоморфизмов в любой окрестности (в  $C^r$ -топологии) любого диффеоморфизма с негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа существуют области Ньюхауса, в которых плотны (образуют множество второй категории) диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество устойчивых и счетное множество неустойчивых замкнутых инвариантных кривых. Кроме того, замыкание каждого из указанных множеств содержит седловые периодические траектории  $O_1, \dots, O_n$ , входящие в контур.*

Отметим, что теорема будет верна и в более вырожденных ситуациях. Например, если контур содержит хотя бы одну седловую периодическую траекторию, у которой седловая величина равна единице (заметим, что наличие негрубой гетероклинической орбиты здесь, по-прежнему, существенно). Понятно, что сколь угодно малым возмущением можно добиться, что эта седловая величина станет либо больше, либо меньше единицы, так, что для полученного контура будут выполняться условия основной теоремы. Могут быть, конечно, и более вырожденные ситуации. Например, исходный диффеоморфизм может сохранять площадь, или исходный диффеоморфизм может быть обратимым (reversible). Однако, в обоих этих случаях области Ньюхауса из основной теоремы, по методу доказательства, отвечают близким диффеоморфизмам, которые, однако, не наследуют структур исходных диффеоморфизмов (не являются, вообще говоря, ни сохраняющими площадь, ни обратимыми соответственно). Тем не менее, как установлено в работе [18], и в классе обратимых двумерных диффеоморфизмов существуют области Ньюхауса со смешанной динамикой (в которых плотны диффеоморфизмы, имеющие одновременно счетное множество седловых, асимптотически устойчивых и, автоматически, вполне неустойчивых, а также эллиптических (в симплектической категории) периодических траекторий).

Представим теперь общую схему доказательства основной теоремы.

Во-первых, существование областей Ньюхауса (с гетероклиническими касаниями) было установлено ранее, в работе [6]. Именно, там было показано, что вблизи двумерных диффеоморфизмов с негрубыми контурами смешанного типа могут существовать области Ньюхауса трех

<sup>1</sup>Основные результаты этой работы были представлены также на Международной Конференции, посвященной 100-летию А. А. Андропова, и частично опубликованы в трудах этой конференции [14].

классов. Причем, области Ньюхауса первого класса (именно те, о которых идет речь в теореме, и которые мы называем также областями Ньюхауса с гетероклиническими касаниями) существуют в любой окрестности любого такого диффеоморфизма и характеризуются тем, что в них 1) плотны диффеоморфизмы, имеющие гомоклинические касания к любой из точек  $O_1, \dots, O_n$ ; 2) плотны (образуют множество второй категории) диффеоморфизмы, имеющие счетное множество седловых, устойчивых и вполне неустойчивых периодических траекторий<sup>2</sup>. Основная теорема, таким образом, представляет еще одно характеристическое свойство областей Ньюхауса первого класса: 3) в них плотны диффеоморфизмы со счетным множеством замкнутых инвариантных кривых.

Далее, собственно для доказательства существования замкнутых инвариантных кривых, мы рассматриваем вполне самостоятельную задачу изучения основных бифуркаций периодических траекторий в случае диффеоморфизмов с так называемыми простейшими негрубыми гетероклиническими контурами смешанного типа. Каждый такой диффеоморфизм имеет только две неподвижные грубые седловые точки и две гетероклинические траектории, одна из которых негрубая (рис. 1б). В работе [6] были исследованы бифуркации в случае трансверсальных однопараметрических семейств с целью нахождения устойчивых и вполне неустойчивых периодических траекторий. В настоящей работе мы будем рассматривать уже двухпараметрические семейства общего положения с целью исследования бифуркаций рождения замкнутых инвариантных кривых (инвариантных торов в случае потоков). Соответствующие результаты будут представлены в параграфах 2, 3 и 4.

В заключительном пятом параграфе мы доказываем основную теорему. При этом, принципиальным шагом здесь является доказательство того, что в окрестности любого негрубого гетероклинического контура существуют контуры простейшего типа.

## 2. Построение отображения первого возвращения

Рассмотрим  $C^r$ -гладкий двумерный диффеоморфизм  $f_0$ , имеющий простейший негрубый гетероклинический контур  $C$  смешанного типа. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — седловые неподвижные точки, принадлежащие  $C$ , и  $\Gamma_{12} \subset W^u(O_1) \cap W^s(O_2)$  и  $\Gamma_{21} \subset W^u(O_2) \cap W^s(O_1)$  — гетероклинические траектории контура  $C$ . Для определенности полагаем, что инвариантные многообразия  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точках траектории  $\Gamma_{12}$ , а  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  имеют квадратичное касание в точках траектории  $\Gamma_{21}$ . Таким образом,  $C = \{O_1, O_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}\}$ . Пусть  $\lambda_i$  и  $\gamma_i$  — мультипликаторы точек  $O_i$  такие, что  $|\lambda_i| < 1$ ,  $|\gamma_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$ . Обозначим через  $\sigma_i$  седловую величину точки  $O_i$ , т.е.  $\sigma_i \equiv |\lambda_i \gamma_i|$ . Поскольку данный контур является контуром смешанного типа, это означает, что выполняется одно из условий: либо  $\sigma_1 < 1 < \sigma_2$ , либо  $\sigma_2 < 1 < \sigma_1$ .

Рассмотрим достаточно малую фиксированную окрестность  $U$  контура  $C = \{O_1, O_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}\}$ . Она представляет собой объединение двух окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$  и конечного числа тех окрестностей точек гетероклинических траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$ , которые лежат вне  $U_1$  и  $U_2$ .

Обозначим через  $T_{0l}(\mu)$ ,  $l = 1, 2$ , ограничение диффеоморфизма  $f_\mu$  на окрестность  $U_l$ , т.е.  $T_{0l}(\mu) \equiv f_\mu|_{U_l}$ . Соответствующие отображения  $T_{01}(\mu)$  и  $T_{02}(\mu)$  называются *локальными*

<sup>2</sup>Заметим, что, в отличие от областей Ньюхауса первого класса, диффеоморфизмы из областей второго и третьего классов не имеют никаких гомоклинических траекторий к некоторым из точек  $O_1, \dots, O_n$ , а также они не имеют гетероклинических контуров, содержащих точки  $O_1, \dots, O_n$ . Кроме того, области Ньюхауса первого класса существуют вблизи любого диффеоморфизма с негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа, тогда как области Ньюхауса второго и третьего классов могут существовать только лишь вблизи определенного вида таких диффеоморфизмов. Подробнее об этом см. в [6].

отображениями. Хорошо известно [8, 7], что на  $U_l$  можно ввести такие  $C^{r-1}$ -координаты  $(x_l, y_l)$  (также гладко зависящие от  $\mu$ ), что отображение  $T_{0l}(\mu)$  запишется в следующем виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_l &= \lambda_l(\mu)x_l + f_l(x_l, y_l, \mu)x_l^2 y_l, \\ \bar{y}_l &= \gamma_l(\mu)y_l + g_l(x_l, y_l, \mu)x_l y_l^2,\end{aligned}\quad (2.1)$$

В этом случае при всех достаточно малых  $\mu$  точка  $O_l(\mu)$  будет лежать в начале координат  $(x_l = 0, y_l = 0)$ , а уравнения многообразий  $W_{loc}^s(O_l(\mu))$  и  $W_{loc}^u(O_l(\mu))$  будут иметь вид  $y_l = 0$  и  $x_l = 0$  соответственно.

Рассмотрим снова диффеоморфизм  $f_0$ . По условию, точка  $O_1$  является  $\alpha$ -предельной для траектории  $\Gamma_{12}$  и  $\omega$ -предельной для траектории  $\Gamma_{21}$ ; также, точка  $O_2$  —  $\alpha$ -предельная для  $\Gamma_{21}$  и  $\omega$ -предельная для  $\Gamma_{12}$ . Соответственно, счетное множество гетероклинических точек (как точек траектории  $\Gamma_{12}$ , так и  $\Gamma_{21}$ ) лежат на  $W_{loc}^s(O_l)$  и  $W_{loc}^u(O_l)$ . Выберем две пары таких гетероклинических точек, именно, точки  $M_1^-(0, y_1^-) \in U_1$  и  $M_2^+(x_2^+, 0) \in U_2$  траектории  $\Gamma_{12}$ , а также точки  $M_2^-(0, y_2^-) \in U_2$  и  $M_1^+(x_1^+, 0) \in U_1$  траектории  $\Gamma_{21}$ . Для определенности, будем полагать, что  $x_1^+ > 0, y_2^- > 0$ . Очевидно, существуют такие натуральные числа  $n_1$  и  $n_2$ , что  $f_0^{n_1}(M_1^-) = M_2^+$  и  $f_0^{n_2}(M_2^-) = M_1^+$ . Рассмотрим достаточно малые окрестности  $\Pi_l^+ \subset U_l$  и  $\Pi_l^- \subset U_l$  точек  $M_l^+$  и  $M_l^-$  соответственно. Тогда для всех достаточно малых  $\mu$  будут определены *глобальные отображения*  $T_{12}(\mu) \equiv f_\mu^{n_1} : \Pi_1^- \rightarrow U_2$  и  $T_{21}(\mu) \equiv f_\mu^{n_2} : \Pi_2^- \rightarrow U_1$ .

Обозначим координаты (2.1) как  $(x_{0l}, y_{0l})$  на  $\Pi_l^+$  и  $(x_{1l}, y_{1l})$  на  $\Pi_l^-$  соответственно. Тогда отображение  $T_{12}(\mu)$  может быть записано в следующем виде (как отрезок ряда Тейлора в окрестности точки  $x_{11} = 0, y_{11} = y_1^-(\mu)$ )

$$\begin{aligned}\bar{x}_{02} - x_2^+(\mu) &= a_{12}(\mu)x_{11} + b_{12}(\mu)(y_{11} - y_1^-(\mu)) + \dots \\ \bar{y}_{02} &= c_{12}(\mu)x_{11} + d_{12}(\mu)(y_{11} - y_1^-(\mu)) + \dots\end{aligned}\quad (2.2)$$

где коэффициенты  $a_{12}, \dots, d_{12}$ , вообще говоря, зависят от параметров  $\mu$ ; кроме того,  $x_2^+(0) = x_2^+, y_1^-(0) = y_1^-$ . Заметим, что точки  $(x_2^+(\mu), 0)$  и  $(0, y_1^-(\mu))$  являются точками пересечения (грубой) гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}(\mu)$  с  $\Pi_2^+$  и  $\Pi_1^-$  соответственно. Так как  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точке  $M_2^+$  при  $\mu = 0$ , то  $d_{12}(0) \neq 0$ . Отметим также, что якобиан  $J_{12} \equiv a_{12}d_{12} - b_{12}c_{12}$  отображения  $T_{12}(0)$ , вычисленный в точке  $M_1^-$ , отличен от нуля, поскольку  $T_{12}$  — диффеоморфизм.

Аналогично, отображение  $T_{21}(\mu) \equiv f_\mu^{n_2} : \Pi_2^- \rightarrow U_1$  может быть записано в следующем виде (как отрезок ряда Тейлора в окрестности точки  $x_{12} = 0, y_{12} = y_2^-(\mu)$ )

$$\begin{aligned}\bar{x}_{01} - x_1^+(\mu) &= a_{21}(\mu)x_{12} + b_{21}(\mu)(y_{12} - y_2^-(\mu)) + \\ &+ l_{02}(\mu)(y_{12} - y_2^-(\mu))^2 + \dots \\ \bar{y}_{01} &= \mu_1 + c_{21}(\mu)x_{12} + d_{21}(\mu)(y_{12} - y_2^-(\mu))^2 + \\ &+ l_{11}(\mu)x_{12}(y_{12} - y_2^-(\mu)) + l_{03}(\mu)(y_{12} - y_2^-(\mu))^3 + \dots\end{aligned}\quad (2.3)$$

где коэффициенты  $a_{21}, \dots, l_{03}$ , вообще говоря, зависят от  $\mu$ ;  $x_1^+(0) = x_1^+, y_2^-(0) = y_2^-$  (кроме того, коэффициент  $y_2^-(\mu)$  зависит от  $\mu$  так, что второе уравнение из (2.3) не содержит линейных членов по  $y_{12}$ ). Заметим, что  $d_{21}(0) \neq 0$ , так как  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  касаются квадратичным образом в точке  $M_1^+$ , и  $J_{21} \equiv -b_{21}(0)c_{21}(0) \neq 0$  в силу того, что  $T_{21}$  — диффеоморфизм. Также обращаем внимание на то, что в правых частях отображения (2.3) явно выписаны некоторые дополнительные нелинейные члены (с коэффициентами  $l_{02}(\mu), l_{11}(\mu)$  и  $l_{03}(\mu)$ ), поскольку они будут важны в дальнейшем.

Заметим, что параметр  $\mu_1$  входит во второе уравнение системы (2.3) аддитивно. Это отражает тот факт, что  $\mu_1$  является параметром расщепления многообразий  $W^u(O_2(\mu))$  и  $W^s(O_1(\mu))$

в точке  $M_1^+$  (действительно, при  $\mu_1 d_{21} > 0$  кривые  $T_{21}(W_{loc}^u(O_2))$  и  $W_{loc}^s(O_1)$  не пересекаются, а при  $\mu_1 d_{21} < 0$  они имеют две точки трансверсального пересечения).

Как было показано в [8, 7], отображение  $T_{0l}^k(\mu) : \Pi_l^+ \rightarrow \Pi_l^-$  при всех достаточно больших  $k$  и малых  $\mu$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x_{1l} &= \lambda_l(\mu)^k x_{0l}(1 + \hat{\gamma}_l^{-k} p_{lk}(x_{0l}, y_{1l}, \mu)), \\ y_{0l} &= \gamma_l(\mu)^{-k} y_{1l}(1 + \hat{\gamma}_l^{-k} q_{lk}(x_{0l}, y_{1l}, \mu)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $\hat{\gamma}_l^{-1} = \max\{\gamma_l^{-1}, \lambda_l\}$ , а функции  $p_{lk}$  и  $q_{lk}$  равномерно ограничены по  $k$  вместе со своими производными до порядка  $(r - 2)$ .

Из (2.4) вытекает, что множество точек на  $\Pi_l^+$ , которые под действием итераций диффеоморфизма  $f_\mu$  попадают в  $\Pi_l^-$  состоит из счетного множества полосок  $\sigma_k^{0l} = \Pi_l^+ \cap T_{0l}^{-k} \Pi_l^-$ ,  $k = \bar{k}_l, \bar{k}_l + 1, \dots$ . Соответственно, под действием отображений  $T_{0l}^k$  полоски  $\sigma_k^{0l}$  преобразуются в полоски  $\sigma_k^{1l} \equiv T_{0l}^k(\sigma_k^{0l})$ , принадлежащие  $\Pi_l^-$ . Полоски  $\sigma_k^{0l}$  и  $\sigma_k^{1l}$  накапливаются при  $k \rightarrow +\infty$  к  $W_{loc}^s(O_l)$  и  $W_{loc}^u(O_l)$  соответственно. Будем считать, что окрестности  $\Pi_l^+$  и  $\Pi_l^-$  достаточно малы и выбраны так (см. [6]), что они, для некоторых достаточно больших целых  $k_1$  и  $k_2$ , содержат целиком все полоски с номерами  $\geq k_l$ , и не пересекаются с полосками с номерами, меньшими  $k_l$ .

Мы будем изучать в семействе  $f_\mu$  бифуркации *однообходных периодических траекторий* из  $U$ . Любая такая траектория имеет только по одной точке пересечения с каждой из окрестностей  $\Pi_l^+$  и  $\Pi_l^-$ ,  $l = 1, 2$ . Пусть  $\Lambda$  — некоторая однообходная периодическая траектория, и пусть  $P_l^+$  и  $P_l^-$  — точки ее пересечения с  $\Pi_l^+$  и  $\Pi_l^-$  соответственно. Тогда существуют некоторые целые  $i \geq \bar{k}_1$  и  $j \geq \bar{k}_2$  такие, что

$$P_1^+ \in \sigma_i^{01}, P_1^- \in \sigma_i^{11}, P_2^+ \in \sigma_j^{02}, P_2^- \in \sigma_j^{12}.$$

Более того, имеют место следующие соотношения

$$P_1^- = T_{01}^i(P_1^+), P_2^+ = T_{12}(P_1^-), P_2^- = T_{02}^j(P_2^+), P_1^+ = T_{21}(P_2^-).$$

Таким образом, точку  $P_1^+$  можно рассматривать как неподвижную для отображения первого возвращения  $T_{ij}(\mu)$ , которое, в свою очередь, может быть представлено в форме следующей суперпозиции локальных и глобальных отображений (рис. 2)

$$T_{ij} \equiv T_{21} \cdot T_{02}^j \cdot T_{12} \cdot T_{01}^i : \sigma_i^{01} \mapsto \Pi_i^+ \tag{2.5}$$

Соответственно, изучение бифуркаций однообходных периодических траекторий в семействе  $f_\mu$  естественным образом сводится к исследованию бифуркаций неподвижных точек отображений первого возвращения  $T_{ij}(\mu)$  для всевозможных достаточно больших  $i$  и  $j$ . При этом, формулы (2.2), (2.3) и (2.4) позволяют найти явный вид отображений  $T_{ij}(\mu)$  в исходных координатах. Кроме того, поскольку окрестность контура  $C$  достаточно мала (соответственно, малы значения локальных координат), то при достаточно малых  $\mu$  мы можем легко оценить якобиан  $J(T_{ij})$  в (возможной) неподвижной точке отображения  $T_{ij}$ , представив его как произведение якобианов отображений-сомножителей из (2.5). Именно, из (2.2), (2.3) и (2.4) получаем, что

$$|J(T_{ij})| \sim A \sigma_1^i \sigma_2^j, \tag{2.6}$$

где  $A = |J(T_{21}(0))J(T_{12}(0))|$  есть модуль произведения якобианов глобальных отображений  $T_{21}$  и  $T_{12}$ , вычисленных (при  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ) в гетероклинических точках  $M_2^-$  и  $M_1^+$  соответственно. Таким образом,

$$A = |b_{21}c_{21}| |a_{12}d_{12} - b_{12}c_{12}| \neq 0.$$





Следующая лемма показывает, что отображения  $T_{ij}$  при всевозможных достаточно больших  $i$  и  $j$  допускают в соответствующих координатах некоторое стандартное представление в виде отображений, близких к отображению Эно.

**Лемма 1. («Рескейлинг лемма»).** Пусть  $S_\delta(|\mu_1| < \delta, |\mu_2| < \delta)$  – достаточно малая окрестность начала координат на плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  и пусть  $L > 1$  – некоторое число. Тогда для всех достаточно больших  $i$  и  $j$  в  $S_\delta$  существуют области параметров  $\delta_{ij}$ , накапливающиеся при  $i, j \rightarrow \infty$  к отрезку  $I_\delta(\mu_1 = 0, |\mu_2| < \delta)$  оси  $\mu_2$ , такие, что при  $(\mu_1, \mu_2) \in \delta_{ij}$  отображение  $T_{ij}(\mu_1, \mu_2)$  может быть записано в некоторых координатах  $(X, Y)$  в одном из следующих видов, в зависимости от значения  $|J(T_{ij})|$ .

1) Если  $|J(T_{ij})| \leq L$ , то для  $T_{ij}$  имеет место представление:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y, \\ \bar{Y} &= M_1 - M_2 X - Y^2 + R \lambda_1^i \lambda_2^j X Y + Q \gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j} Y^3 + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$M_1 = -d_{12}^2 d_{21} \left[ \mu + (c_{21} x_2^+ + \dots) \lambda_2^j - (y_1^- + \dots) \gamma_1^{-i} \right] \gamma_1^{2i} \gamma_2^{2j}, \quad (2.12)$$

$$M_2 = -b_{21} c_{21} \Delta_1 (1 + \dots) \lambda_1^i \gamma_1^i \lambda_2^j \gamma_2^j, \quad (2.13)$$

$$R = \frac{\Delta_1}{d_{12} d_{21}} [2a_{21} d_{21} - 2l_{02} c_{21} - l_{11} b_{21}], \quad Q = \frac{l_{03}}{d_{12} d_{21}} \quad (2.14)$$

$$\|\varepsilon_{ij}(X, Y, M_1, M_2)\|_{C^{r-2}} = o(|\gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i \lambda_2^j|). \quad (2.15)$$

2) Если  $|J(T_{ij})| > L$ , то (обратное к  $T_{ij}$ ) отображение  $T_{ij}^{-1}$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} Y &= \bar{X}, \\ X &= \tilde{M}_1 - \tilde{M}_2 \bar{Y} - \bar{X}^2 + \tilde{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{M}_1 = -\frac{d_{12}^2 d_{21}}{(b_{21} c_{21} \Delta_1)^2} \left[ \mu + (c_{21} x_2^+ + \dots) \lambda_2^j - (y_1^- + \dots) \gamma_1^{-i} \right] \lambda_1^{-2i} \lambda_2^{-2j}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{M}_2 = -(b_{21} c_{21} \Delta_1)^{-1} (1 + \dots) \lambda_1^{-i} \gamma_1^{-i} \lambda_2^{-j} \gamma_2^{-j}, \quad (2.18)$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_{ij}(\bar{X}, \bar{Y}, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2)\|_{C^{r-2}} = O(\lambda_1^i \lambda_2^j). \quad (2.19)$$

В указанных формулах  $\Delta_1 = a_{12} d_{12} - b_{12} c_{12}$  и многоточиями обозначены асимптотически малые при  $i, j \rightarrow \infty$  коэффициенты. Также новые координаты  $(X, Y)$  и параметры  $M_1, \tilde{M}_1$  могут принимать при больших  $i$  и  $j$  значения, которые в пределе,  $i, j \rightarrow +\infty$ , покрывают все конечные величины (по конструкции, значения параметров  $M_2$  и  $\tilde{M}_2$  покрывают в пределе либо интервал  $(0, L)$  — в ориентируемом случае, либо интервал  $[-L, 0)$  — в неориентируемом).

**Замечание 1.** Оба отображения, (2.11) и (2.16), асимптотически  $C^{r-2}$ -близки к стандартному отображению Эно. Однако, в случае отображения (2.11) мы вычисляем также два малых члена  $R \lambda_1^i \lambda_2^j X Y$  и  $Q \gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j} Y^3$ , поскольку они существенно влияют на динамику при значениях параметра  $M_2$ , близких к  $+1$  или  $-1$ . В отображении (2.16) соответствующие члены не представлены явно, поскольку, по соглашению, здесь  $|\tilde{M}_2| < 1$ .

**Замечание 2.** Как было показано выше, см. формулу (2.10), якобиан отображения  $T_{ij}$  даже при фиксированных  $i$  и  $j$  может существенно зависеть от  $\mu_2$  и соответственно он может быть как больше, так и меньше единицы, на разных подинтервалах из

$I_\delta$ . В этом случае формулы (2.11) и (2.16) относятся к одному и тому же отображению  $T_{ij}$ , но представленному для разных значений  $\mu_2$ : по условию, тех, где  $|J(T_{ij})| \leq L$  и  $|J(T_{ij})| > L$  соответственно.

**Замечание 3.** Для диссипативного случая ( $\sigma_1 < 1$  и  $\sigma_2 < 1$ ), поскольку  $|J(T_{ij})| \rightarrow 0$  при  $i, j \rightarrow \infty$ , из леммы 1 вытекает, что отображение первого возвращения  $T_{ij}$  в некоторых рейскелинг-координатах будет асимптотически  $C^{r-2}$ -близко к «отображению параболы»<sup>3</sup>:

$$\bar{X} = Y, \quad \bar{Y} = M - Y^2$$

где  $M = - \left[ \mu + c_{21} \lambda_2^j x_2^+ - \gamma_1^{-i} y_1^- + \dots \right] d_{12}^2 d_{21} \gamma_1^{2i} \gamma_2^{2j}$ .

**Доказательство леммы 1.** Очевидно, нам достаточно доказать только пункт 1) леммы. Действительно, пункт 2) в этом случае получается почти автоматически. Дело в том, что в случаях  $|J(T_{ij})| > L > 1$  мы можем рассматривать диффеоморфизм  $f_0^{-1}$  вместо  $f_0$ , который будет также, очевидно, диффеоморфизмом с простейшим негрубым контуром смешанного типа. Поэтому для соответствующего представления отображения  $T_{ij}^{-1}$  получится формула, аналогичная (2.11), в которой, однако, уже нет нужды учитывать явно асимптотически малые члены. Соответственно, это приводит нас к представлению (2.16) для отображения  $T_{ij}$ .

Зафиксируем некоторые достаточно большие  $i$  и  $j$ . Согласно (2.4), для любой пары точек  $M(x_{01}, y_{01}) \in \sigma_i^{01}$  и  $T_{01}^i M(x_{11}, y_{11}) \in \sigma_i^{11}$  их координаты  $y_{01}$  и  $x_{11}$  однозначно определяются, как  $C^{r-1}$ -гладкие функции координат  $x_{01}$  и  $y_{11}$ . Поэтому мы можем использовать переменные  $(x_{01}, y_{11})$  в качестве координат на полоске  $\sigma_i^{01}$ . Аналогично, можно использовать переменные  $(x_{02}, y_{12})$  в качестве координат на полоске  $\sigma_j^{02}$ .

Тогда, в силу (2.4), (2.2) и (2.3), отображения  $T_{12} T_{01}^i : (x_{01}, y_{11}) \mapsto (\bar{x}_{02}, \bar{y}_{11})$  и  $T_{21} T_{02}^j : (\bar{x}_{02}, \bar{y}_{12}) \mapsto (\bar{\bar{x}}_{01}, \bar{\bar{y}}_{11})$  могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{x}_{02} - x_2^+ &= a_{12} \lambda_1^i x_{01} (1 + \hat{\gamma}_1^{-i} p_{1i}(x_{01}, y_{11})) + b_{12} (y_{11} - y_1^-) + \\ &+ O(\lambda_1^{2i} x_{01}^2 + |\lambda_1^i x_{01} (y_{11} - y_1^-)| + (y_{11} - y_1^-)^2), \\ \gamma_2^{-j} \bar{y}_{12} (1 + \hat{\gamma}_2^{-j} q_{2j}(\bar{x}_{02}, \bar{y}_{12})) &= c_{12} \lambda_1^i x_{01} (1 + \hat{\gamma}_1^{-i} p_{1i}(x_{01}, y_{11})) + d_{12} (y_{11} - y_1^-) + \\ &+ O(\lambda_1^{2i} x_{01}^2 + |\lambda_1^i x_{01} (y_{11} - y_1^-)| + (y_{11} - y_1^-)^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_{01} - x_1^+ &= a_{21} \lambda_2^j \bar{x}_{02} (1 + \hat{\gamma}_2^{-j} p_{2j}(\bar{x}_{02}, \bar{y}_{12})) + b_{21} (\bar{y}_{12} - y_2^-) + l_{02} (\bar{y}_{12} - y_2^-)^2 + \\ &+ O(\lambda_2^{2j} \bar{x}_{02}^2 + |\lambda_2^j \bar{x}_{02} (\bar{y}_{12} - y_2^-)| + |(\bar{y}_{12} - y_2^-)^3|), \\ \gamma_1^{-i} \bar{\bar{y}}_{11} (1 + \hat{\gamma}_1^{-i} q_{1i}(\bar{\bar{x}}_{01}, \bar{\bar{y}}_{11})) &= \mu + c_{21} \lambda_1^i \bar{x}_{02} (1 + \hat{\gamma}_2^{-j} h_{1j}(\bar{x}_{02}, \bar{y}_{12})) + \\ &+ d_{21} (\bar{y}_{12} - y_2^-)^2 + l_{11} \lambda_1^i \bar{x}_{02} (\bar{y}_{12} - y_2^-) (1 + \hat{\gamma}_2^{-j} q_{2j}(\bar{x}_{02}, \bar{y}_{12})) + \\ &+ l_{03} (\bar{y}_{12} - y_2^-)^3 + O(\lambda_2^{2j} \bar{x}_{02}^2 + |\lambda_2^j \bar{x}_{02} (\bar{y}_{12} - y_2^-)^2| + (\bar{y}_{12} - y_2^-)^4). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Отметим, что в [10] аналогичный результат был получен в предположении о возможности достаточно гладкой линеаризации седловых отображений  $T_{01}$  и  $T_{02}$ . Мы видим, что это предположение является излишним, хотя в [10] утверждалось о его необходимости для осуществления рейскелинга.

В новых координатах  $(\xi, \eta)$ , где

$$\begin{aligned} x_{01} - x_1^+ &= \xi_1 & x_{02} - x_2^+ &= \xi_2, \\ y_{11} - y_1^- &= \eta_1 & y_{12} - y_2^- &= \eta_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

эти отображения переписутся, очевидно, следующим образом:  $T_{12}T_{01}^i$  — как

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 &= a_{12}\lambda_1^i x_1^+(1 + \dots) + a_{12}\lambda_1^i(1 + \dots)\xi_1 + b_{12}(1 + \dots)\eta_1 + \psi_1^{ij}(\xi_1, \eta_1), \\ \gamma_2^{-j}(\bar{\eta}_2 + y_2^-)(1 + \hat{\gamma}_2^{-j}q_{2j}(\bar{\xi}_2 + x_2^+, \bar{\eta}_2 + y_2^-)) &= c_{12}\lambda_1^i x_1^+(1 + \dots) + \\ &+ c_{12}\lambda_1^i(1 + \dots)\xi_1 + d_{12}(1 + \dots)\eta_1 + \psi_2^{ij}(\xi_1, \eta_1); \end{aligned} \quad (2.21)$$

и  $T_{21}T_{02}^j$  — как

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= a_{21}\lambda_2^j x_2^+(1 + \dots) + a_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + b_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2 + l_{02}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + \psi_3^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2), \\ \gamma_1^{-i}(\bar{\eta}_1 + y_1^-)(1 + \hat{\gamma}_1^{-i}q_{1i}(\bar{\xi}_1 + x_1^+, \bar{\eta}_1 + y_1^-)) &= \mu + c_{21}\lambda_2^j x_2^+(1 + \dots) + \\ &+ c_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + d_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + l_{11}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2 + \\ &+ l_{11}x_2^+\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\eta}_2 + l_{03}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^3 + \psi_4^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2); \end{aligned} \quad (2.22)$$

где многоточиями в (2.21) и (2.22) обозначены асимптотически малые при  $i, j \rightarrow \infty$  коэффициенты (независящие от  $\xi$  и  $\eta$ ). Заметим, что при выводе формулы (2.21) мы учитывали, что  $\lambda_1^{2i} \leq \lambda_1^i \hat{\gamma}_1^{-i}$ ,  $\lambda_2^{2j} \leq \lambda_2^j \hat{\gamma}_2^{-j}$ . Также мы выписали «остаточные члены»

$$\begin{aligned} \psi_1^{ij}(\xi_1, \eta_1) &= O(|\lambda_1^i \hat{\gamma}_1^{-i}| \xi_1^2 + |\lambda_1^i \xi_1 \eta_1| + \eta_1^2), \\ \psi_2^{ij}(\xi_1, \eta_1) &= O(|\lambda_1^i \hat{\gamma}_1^{-i}| \xi_1^2 + |\lambda_1^i \xi_1 \eta_1| + \eta_1^2), \\ \psi_3^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) &= O(|\lambda_2^j \hat{\gamma}_2^{-j}| \bar{\xi}_2^2 + |\lambda_2^j \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2| + |\bar{\eta}_2^3|), \\ \psi_4^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) &= O(|\lambda_2^j \hat{\gamma}_2^{-j}| \bar{\xi}_2^2 + |\lambda_2^j \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2^2| + |\bar{\eta}_2^4|), \end{aligned}$$

обозначения которых не будут меняться ниже по тексту (но указанные порядки малости будут сохраняться).

Подставим в левую часть второго уравнения из (2.21) выражение для  $\bar{\xi}_1$  из первого уравнения системы (2.21); а также в левую часть второго уравнения из (2.22) — выражение для  $\bar{\xi}_1$  из первого уравнения системы (2.22). Далее, продифференцируем по  $\bar{\eta}_2$  обе части полученного второго уравнения системы (2.22). Поскольку  $d_{21} \neq 0$ , уравнение, полученное в результате дифференцирования, будет однозначно определять  $\bar{\eta}_2$  как гладкую функцию переменных  $\bar{\xi}_2$  и  $\bar{\eta}_1$ :

$$\bar{\eta}_2 = \varphi(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_1) = O(|\gamma_1 \hat{\gamma}_1|^{-i} + |\lambda_2|^j).$$

Легко видеть, что если мы запишем схематично уравнения (2.21) и первое уравнение (2.22) в виде

$$\bar{\xi}_2 = \rho_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1 = \rho_2(\bar{\eta}_2, \xi_1), \quad \bar{\xi}_1 = \rho_3(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)$$

(мы можем это сделать, так как  $d_{12} \neq 0$ ), то система

$$\eta_2 = \varphi(\xi_2, \eta_1), \quad \xi_2 = \rho_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1 = \rho_2(\eta_2, \xi_1), \quad \xi_1 = \rho_3(\xi_2, \eta_2),$$

будет иметь единственное решение  $(\xi_1^*, \xi_2^*, \eta_1^*, \eta_2^*)$ , где

$$\xi_1^*, \eta_2^* = O(|\gamma_1 \hat{\gamma}_1|^{-i} + |\lambda_2|^j), \quad \xi_2^*, \eta_1^* = O(|\gamma_2|^{-j} + |\lambda_1|^i).$$

По конструкции, следующий сдвиг начала координат:

$$\xi_1^{new} = \xi_1 - \xi_1^*, \quad \eta_1^{new} = \eta_1 - \eta_1^*, \quad \xi_2^{new} = \xi_2 - \xi_2^*, \quad \eta_2^{new} = \eta_2 - \eta_2^*,$$

приводит систему (2.21) и (2.22) к виду

$$\bar{\xi}_2 = a_{12} \lambda_1^i (1 + \dots) \xi_1 + b_{12} (1 + \dots) \eta_1 + \psi_1^{ij}(\xi_1, \eta_1), \quad (2.23)$$

$$\gamma_2^{-j} (\bar{\eta}_2 + \hat{\gamma}_2^{-j} h_2(\xi_1, \eta_1, \bar{\eta}_2)) = c_{12} \lambda_1^i (1 + \dots) \xi_1 + d_{12} (1 + \dots) \eta_1 + \psi_2^{ij}$$

и

$$\bar{\xi}_1 = a_{21} \lambda_2^j (1 + \dots) \bar{\xi}_2 + b_{21} (1 + \dots) \bar{\eta}_2 + l_{02} (1 + \dots) \bar{\eta}_2^2 + \psi_3^{ij}$$

$$\gamma_1^{-i} (\bar{\eta}_1 + \hat{\gamma}_1^{-i} h_1(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1)) = [\mu + c_{21} \lambda_2^j x_2^+ - \gamma_1^{-i} y_1^- + \dots] + \quad (2.24)$$

$$+ c_{21} \lambda_2^j (1 + \dots) \bar{\xi}_2 + d_{21} (1 + \dots) \bar{\eta}_2^2 + l_{11} \lambda_2^j (1 + \dots) \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2 +$$

$$+ l_{03} (1 + \dots) \bar{\eta}_2^3 + \psi_4^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2),$$

соответственно, где функции  $h_{1,2}$  — равномерно ограничены при  $i, j \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными, и

$$h_1(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, 0) \equiv 0, \quad h_2(\xi_1, \eta_1, 0) \equiv 0; \quad (2.25)$$

$$h_1 = \bar{\eta}_1 \left( \lambda_2^j O(\bar{\xi}_2) + O(|\bar{\eta}_1| + |\bar{\eta}_2|) \right), \quad h_2 = \bar{\eta}_2 \left( \lambda_1^i O(\xi_1) + O(|\bar{\eta}_2| + |\eta_1|) \right).$$

При этом заметим, свободные члены, как в уравнениях в (2.23), так и в первом уравнении из (2.24), отсутствуют, также как нет линейных членов по  $\bar{\eta}_2$  во втором уравнении из (2.24). Кроме того, все свободные члены во втором уравнении из (2.24) заключены в квадратные скобки.

Очевидно, что мы можем ввести новую координату

$$\eta_1^{new} = \eta_1 + \frac{1}{d_{12}(1 + \dots)} [c_{12} \lambda_1^i (1 + \dots) \xi_1 + O(\lambda_1^i \hat{\gamma}_1^{-i} \xi_1^2, \lambda_1^i \xi_1 \eta_1)]$$

таким образом, что правая часть второго уравнения системы (2.23) не будет зависеть от  $\xi_1$ , а сама система примет следующий вид

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\Delta_1}{d_{12}} \lambda_1^i (1 + \dots) \xi_1 + b_{12} (1 + \dots) \eta_1 + \psi_1^{ij}(\xi_1, \eta_1), \quad (2.26)$$

$$\gamma_2^{-j} (\bar{\eta}_2 + \hat{\gamma}_2^{-j} h_2(\xi_1, \eta_1, \bar{\eta}_2)) = d_{12} \eta_1 + O(\eta_1^2),$$

где  $\Delta_1 = (a_{12}d_{12} - b_{12}c_{12})$  — это якобиан отображения  $T_{12}$ , вычисленный в точке  $M_1^-$ . При этом, система (2.24) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= a_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + b_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2 + l_{02}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + \psi_3^{ij}(\bar{\xi}_2, \eta_1), \\ \gamma_1^{-i}(\bar{\eta}_1 + \hat{\gamma}_1^{-i}h_1(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1)) &= [\mu + c_{21}\lambda_2^j x_2^+ - \gamma_1^{-i}y_1^- + \dots] + \\ &+ c_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + \frac{c_{12}}{d_{12}}b_{21}(1 + \dots)\gamma_1^{-i}\lambda_1^i\bar{\eta}_2 + d_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + \\ &+ l_{11}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2 + l_{03}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^3 + \psi_3^{ij}(\bar{\xi}_2, \eta_1)\bar{\eta}_2^4 \end{aligned} \quad (2.27)$$

с некоторыми новыми функциями  $h_1$  и  $h_2$ , которые удовлетворяют (2.25).

Рассмотрим второе уравнение системы (2.26) при  $\xi_1 = 0$ . При больших  $j$  оно однозначно определяет  $\eta_1$  как функцию  $\bar{\eta}_2$ :

$$\eta_1 = \Phi(\bar{\eta}_2) = \frac{1}{d_{12}(1 + \dots)}\gamma_2^{-j}\bar{\eta}_2 + O(|\gamma_2\hat{\gamma}_2|^{-j}).$$

Обозначим через  $S(\xi_1, \eta_1)$  правую часть первого уравнения из (2.26). Введем новую координату

$$\xi_2^{new} = \xi_2 - S(0, \Phi(\eta_2)).$$

Тогда (новая)  $\bar{\xi}_2$  будет зануляться при  $\xi_1 = 0$ . Таким образом, после этой замены координат, уравнения (2.26) и (2.27) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 &= \frac{\Delta_1}{d_{12}}\lambda_1^i(1 + \dots)\xi_1 + O(|\lambda_1^i\hat{\gamma}_1^{-i}|\xi_1^2 + |\lambda_1^i\xi_1\eta_1|), \\ \gamma_2^{-j}(\bar{\eta}_2 + \hat{\gamma}_2^{-j}h_2(\xi_1, \eta_1, \bar{\eta}_2)) &= d_{12}\eta_1 + O(\eta_1^2); \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= a_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + b_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2 + l_{02}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + \psi_3^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2), \\ \gamma_1^{-i}(\bar{\eta}_1 + \hat{\gamma}_1^{-i}h_1(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1)) &= [\mu + c_{21}\lambda_2^j x_2^+ - \gamma_1^{-i}y_1^- + \dots] \\ &+ c_{21}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2 + \rho_{ij}\bar{\eta}_2 + d_{21}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^2 + \\ &+ l_{11}\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2 + l_{03}(1 + \dots)\bar{\eta}_2^3 + \psi_4^{ij}(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $\rho_{ij} = O(|\gamma_1^{-i}\lambda_1^i| + |\gamma_2^{-j}\lambda_2^j|)$ .

Теперь, как мы делали раньше, снова сдвинем координаты  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  на некоторые малые величины порядков  $O(|\gamma_1^{-i}\lambda_1^i| + |\gamma_2^{-j}\lambda_2^j|)$ ,  $O(|\gamma_1^{-i}\lambda_1^i| + |\gamma_2^{-j}\lambda_2^j\lambda_1^i|)$ ,  $O(|\gamma_1^{-i}\lambda_1^i\gamma_2^{-j}| + |\gamma_2^{-2j}\lambda_2^j|)$  и  $O(|\gamma_1^{-i}\lambda_1^i| + |\gamma_2^{-j}\lambda_2^j|)$  соответственно так, чтобы в последнем уравнении из (2.29) отсутствовал линейный по  $\bar{\eta}_2$  член, а в остальных отсутствовали свободные члены.

Теперь мы перемасштабируем координаты

$$\xi_1 = \alpha_1 u_1 \quad \eta_1 = \beta_1 v_1 \quad \xi_2 = \alpha_2 u_2 \quad \eta_2 = \beta_2 v_2,$$

где

$$\beta_1 = -\frac{\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-2j}}{d_{21}d_{12}^2}(1 + \dots); \quad \beta_2 = -\frac{\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}}{d_{21}d_{12}}(1 + \dots);$$

$$\alpha_1 = -\frac{b_{21}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}}{d_{21}d_{12}}(1 + \dots); \quad \alpha_2 = -\frac{\Delta_1 b_{21}\lambda_1^i\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}}{d_{21}d_{12}^2}(1 + \dots).$$

Тогда уравнения (2.28) и (2.29) перепишутся следующим образом (здесь мы учитываем, что  $h_1 = O(\bar{\eta}_1)$ ,  $h_2 = O(\bar{\eta}_2)$ ):

$$\bar{u}_2 = u_1 + O(\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}\hat{\gamma}_1^{-i}u_1^2, \gamma_1^{-i}\gamma_2^{-2j}u_1v_1), \quad (2.30)$$

$$\bar{v}_2 + O(\hat{\gamma}_2^{-j}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}|\bar{v}_2||\bar{v}_2| + |u_1| + |\gamma_2^{-j}v_1|) = v_1 + O(\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-2j}v_1^2);$$

$$\bar{\bar{u}}_1 = \frac{a_{21}\Delta_1}{d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{u}_2 + \bar{v}_2 - \frac{l_{02}}{d_{12}d_{21}b_{21}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}(1 + \dots)\bar{v}_2^2 +$$

$$+ O(\lambda_1^{2i}|\lambda_2^j\hat{\gamma}_2^{-j}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}\bar{u}_2^2 + |\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}\lambda_1^i\lambda_2^j\bar{u}_2\bar{v}_2| + \gamma_1^{-2i}\gamma_2^{-2j}|\bar{v}_2|^3),$$

$$\bar{\bar{v}}_1 + O(\hat{\gamma}_2^{-j}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}|\bar{\bar{v}}_1|(|\bar{v}_2| + |\gamma_2|^{-j}\bar{\bar{v}}_1 + |\lambda_1^i\bar{u}_2|)) = M_1 - M_2\bar{u}_2 - \bar{v}_2^2 - \quad (2.31)$$

$$- \frac{l_{11}b_{21}\Delta_1}{d_{21}d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^j(1 + \dots)\bar{u}_2\bar{v}_2 + \frac{l_{03}}{d_{21}d_{12}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}(1 + \dots)\bar{v}_2^3 +$$

$$+ O(\lambda_1^{2i}|\lambda_2^j\hat{\gamma}_2^{-j}\bar{u}_2^2 + |\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}\lambda_1^i\lambda_2^j\bar{u}_2|\bar{v}_2^2 + \gamma_1^{-2i}\gamma_2^{-2j}\bar{v}_2^4);$$

где

$$M_2 = -b_{21}c_{21}(a_{12}d_{12} - b_{12}c_{12})(1 + \dots)\lambda_1^i\gamma_1^{-i}\lambda_2^j\gamma_2^{-j},$$

$$M_1 = -\left[\mu + c_{21}\lambda_2^jx_2^+ - \gamma_1^{-i}y_1^- + \dots\right]d_{12}^2d_{21}\gamma_1^{2i}\gamma_2^{2j}.$$

Подставим значения для  $\bar{u}_2$  и  $\bar{v}_2$ , заданные формулами (2.30), в правую часть системы (2.31). Тогда отображение  $T_{ij}$  перепишется в следующем виде

$$\bar{\bar{u}}_1 = \frac{a_{21}\Delta_1}{d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^ju_1 + v_1(1 + \dots) - \frac{l_{02}}{d_{12}d_{21}b_{21}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}v_1^2 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|),$$

$$\bar{\bar{v}}_1 = M_1(1 + \dots) - M_2(1 + \dots)u_1 - v_1^2(1 + \dots) - \quad (2.32)$$

$$- \frac{l_{11}b_{21}\Delta_1}{d_{21}d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^ju_1v_1 + \frac{l_{03}}{d_{21}d_{12}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}v_1^3 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|).$$

Заменой координат

$$U = u_1, \quad V = \frac{a_{21}\Delta_1}{d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^j(1 + \dots)u_1 + v_1,$$

мы зануляем линейный по  $u_1$  член в правой части первого уравнения. Соответственно, отображение (2.32) приводится к виду

$$\begin{aligned} \bar{U} &= V(1 + \dots) - \frac{l_{02}}{d_{12}d_{21}b_{21}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}V^2 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|), \\ \bar{V} &= M_1(1 + \dots) - M_2(1 + \dots)U + \frac{a_{21}\Delta_1}{d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^jV - V^2(1 + \dots) - \\ &\quad - \frac{l_{11}b_{21}\Delta_1}{d_{21}d_{12}}\lambda_1^i\lambda_2^jUV + \frac{l_{03}}{d_{21}d_{12}}\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}V^3 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Новый линейный по  $V$  член во втором уравнении может быть немедленно уничтожен посредством малого сдвига координат на константу порядка  $O(\lambda_1^i\lambda_2^j)$ . Тогда после дополнительного перемасштабирования координат вида  $U = U_{new}(1 + \dots), V = V_{new}(1 + \dots)$ , система (2.33) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \bar{U} &= V - S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}V^2 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|), \\ \bar{V} &= M_1 - M_2U - V^2 - S_2\lambda_1^i\lambda_2^jUV + S_3\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}V^3 + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{l_{02}}{d_{12}d_{21}b_{21}}, \quad S_2 = \left[ \frac{l_{11}b_{21}\Delta_1}{d_{21}d_{12}} - 2\frac{a_{21}\Delta_1}{d_{12}} \right], \quad S_3 = \frac{l_{03}}{d_{21}d_{12}}, \\ M_2^{new} &= -b_{21}c_{21}\Delta_1\lambda_1^i\gamma_1^i\lambda_2^j\gamma_2^j(1 + \dots), \\ M_1^{new} &= - \left[ \mu + c_{21}\lambda_2^jx_2^+ - \gamma_1^{-i}y_1^- + \dots \right] d_{12}^2d_{21}\gamma_1^{2i}\gamma_2^{2j}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Далее, преобразование координат вида

$$\begin{aligned} X &= U - S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}(V - M_1), \\ Y &= V + S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}M_2U + o(\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}), \end{aligned}$$

приводит систему (2.34) к

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y, \\ \bar{Y} &= M_1(1 + S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}M_2) - M_2X - Y^2 + S_3Y^3 + \\ &\quad + (2S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}M_2 - S_2\lambda_1^i\lambda_2^j)XY + o(|\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}| + |\lambda_1^i\lambda_2^j|), \end{aligned} \quad (2.36)$$

где, согласно (2.35),

$$S_2\lambda_1^i\lambda_2^j - 2S_1\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j}M_2 = \frac{\Delta_1}{d_{12}d_{21}} [2a_{21}d_{21} - 2l_{02}c_{21} - l_{11}b_{21}] \lambda_1^i\lambda_2^j(1 + \dots),$$

Теперь полученные уравнения совпадают с (2.11). Лемма доказана.

### 3. Бифуркации неподвижных точек обобщенного отображения Эно

Лемма 1 дает определенный стандартный путь изучения бифуркаций однообходных периодических траекторий в семействе  $f_{\mu_1, \mu_2}$ . Именно, зная соотношения (2.12) и (2.13) между исходными параметрами  $(\mu_1, \mu_2)$  и рескейлинг-параметрами  $(M_1, M_2)$ , нам достаточно исследовать бифуркации неподвижных точек отображения (2.11) и затем «спроектировать» их на исходные отображения первого возвращения  $T_{ij}$  (при всевозможных достаточно больших  $i$  и  $j$ ).

Рассмотрим двумерное отображение следующего вида

$$\bar{X} = Y, \quad \bar{Y} = M_1 - M_2 X - Y^2 + \tilde{R}XY + \tilde{Q}Y^3. \quad (3.1)$$

Оно называется *обобщенным отображением Эно* и было введено в [12, 1], как нормальная форма отображений первого возвращения в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием при  $\sigma = 1$ . Если положить в (3.1)  $\tilde{R} \equiv R\lambda_1^i \lambda_2^j$  и  $\tilde{Q} \equiv Q\gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j}$ , то отображение (3.1) будет отличаться от (2.11) только лишь отсутствием членов  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ , которые не являются существенными [12], если  $R \neq 0$  и  $r \geq 5$ . Последнее требование означает, по лемме 1, что отображение (3.1) по крайней мере  $C^3$ -близко к исходному отображению (2.11), и эта близость вполне достаточна (при больших  $i$  и  $j$ ) для целей исследования бифуркаций. Однако, существенным моментом здесь является то, что  $R \neq 0$  (соответственно  $\tilde{R} \neq 0$ ). Действительно, в противном случае отображение (3.1) будет иметь вид

$$\bar{X} = Y, \quad \bar{Y} = M_1 - M_2 X - Y^2 + \tilde{Q}Y^3. \quad (3.2)$$

Это отображение (отображение Эно с малым консервативным членом) имеет постоянный якобиан  $J = M_2$  и, следовательно, демонстрирует вырожденные бифуркации точек с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$ . Это уже не так, если  $\tilde{R} \neq 0$ . Бифуркации неподвижных точек отображения (3.1) в случае, когда коэффициенты  $\tilde{R}$  и  $\tilde{Q}$  малы, были изучены в в [12, 1] — в основном, для случая  $M_2 > 0$ . Случай произвольных  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{Q}$  и  $M_2$  анализировался в [13]. Здесь мы приведем некоторые наиболее важные результаты, чтобы использовать их в дальнейшем.

На плоскости параметров  $(M_1, M_2)$  обобщенное отображение Эно (3.1) имеет три бифуркационные кривые, отвечающие существованию негрубых неподвижных точек, — это кривые  $L^+$ ,  $L^-$  и  $L^\varphi$ . Отображение (3.1) имеет неподвижную точку с мультипликатором  $+1$  при  $(M_1, M_2) \in L^+$ ; с мультипликатором  $-1$  при  $(M_1, M_2) \in L^-$ ; и с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$  («сложный фокус») при  $(M_1, M_2) \in L^\varphi$ , где  $0 < \varphi < \pi$ . Уравнения этих кривых имеют следующий вид

$$\begin{aligned} L^+ : M_1 &= -\frac{(1+M_2)^2}{4}(1+O(\tilde{R})), \\ L^- : M_1 &= \frac{3(1+M_2)^2}{4}(1+O(\tilde{R})), \\ L^\varphi : \begin{cases} M_1 = (\cos^2\psi - 2\cos\psi)(1+O(\tilde{R})), \\ M_2 = 1 - R\lambda_1^i \lambda_2^j \cos\psi(1+O(|\tilde{R}|+|\tilde{Q}|)) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что уравнение кривой  $L^\varphi$  представлено в параметрическом виде (где параметром является угловой аргумент  $\psi$ ,  $0 < \psi < \pi$ , мультипликатора «сложного фокуса»).

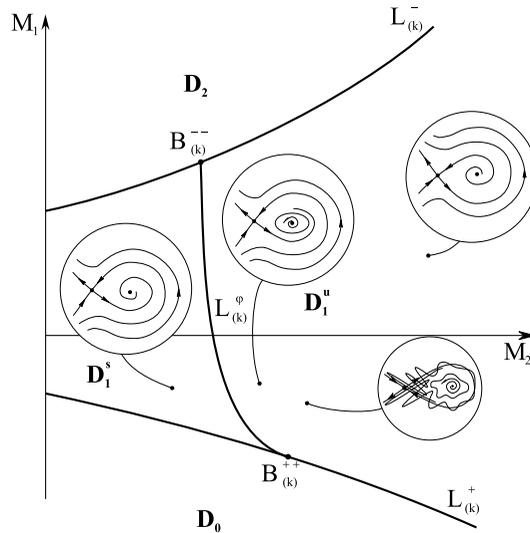


Рис. 3. Элементы бифуркационной диаграммы для обобщенного Эно в полуплоскости  $M_2 > 0$  в случае  $\tilde{R} < 0$ .

Для первой ляпуновской величины<sup>4</sup> сложного фокуса при  $(M_1, M_2) \in L^\varphi$  имеет место следующая формула [12]

$$G_1 = \frac{\tilde{R}}{16(1 - \cos \psi)} (1 + O(|\tilde{R}| + |\tilde{Q}|)). \quad (3.4)$$

Это означает, что в случае  $\tilde{R} < 0$  при пересечении кривой  $L^\varphi$  из сложного фокуса рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая (см. рис. 3). Случай  $\tilde{R} > 0$  отвечает соответственно рождению неустойчивой инвариантной кривой.

На полуплоскости  $M_2 > 0$  можно также указать четыре бифуркационные точки,  $B^{++}$ ,  $B^{--}$ ,  $B^{2\pi/3}$  и  $B^{\pi/2}$  такие, что отображение (3.1) имеет неподвижную точку с мультипликаторами, соответственно,  $\nu_1 = \nu_2 = +1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = -1$ ,  $\nu_{1,2} = e^{\pm i2\pi/3}$  и  $\nu_{1,2} = e^{\pm i\pi/2}$ . Первые три точки являются невырожденными (в смысле [17]), если  $\tilde{R} \neq 0$ . Неподвижная точка с мультипликаторами  $\nu_{1,2} = e^{\pm i\pi/2}$  будет невырожденной, если  $\tilde{R} \neq 0$  и  $\tilde{R} \neq 2\tilde{Q}$  [13].

Особый интерес для нас представляет бифуркационная точка  $B^{--}$ . Дело в том, что в её малой окрестности, в случае  $\tilde{R} \neq 0$ , есть области параметров  $M_1$  и  $M_2$ , где устойчивая и неустойчивая замкнутые инвариантные кривые сосуществуют. На рис. 4 представлена бифуркационная диаграмма для потоковой локальной нормальной формы (так называемая нормальная форма Хорозова–Такенса [23, 9]) в случае  $\tilde{R} < 0$ . Здесь устойчивый и неустойчивый предельный циклы сосуществуют при значениях параметров  $M_1$  и  $M_2$  из областей «4» и «5» (закрашенные области на рис. 4), окружающих точку  $B^{--}$ . В случае  $\tilde{R} > 0$  нормальная форма Хорозова–Такенса получается из предыдущей посредством обращения времени (конечно, и в этом случае также существуют области параметров, где одновременно система имеет как и устойчивый, так и неустойчивый предельный циклы). Можно показать, что в «4» и «5» существуют «подобласти» вблизи

<sup>4</sup>Заметим, что двумерное отображение вблизи неподвижной точки с мультипликаторами  $e^{\pm i\psi}$ , где  $0 < \psi < \pi$  и  $\psi \neq \pi/2, 2\pi/3$ , может быть приведено к локальной нормальной форме вида

$$\bar{w} = e^{i\psi} (w + G_{21} w^2 w^*) + O(|w|^4),$$

где  $w$  и  $w^*$  — комплексные координаты ( $w^*$  сопряжено с  $w$ ). Тогда первая ляпуновская величина  $G_1$  определяется как  $G_1 = \text{Re}G_{21}$ .

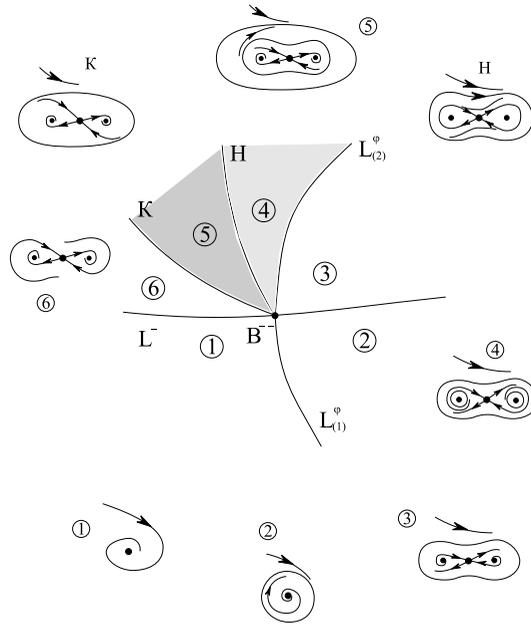


Рис. 4. Элементы бифуркационной диаграммы вблизи точки  $B^{--}$

точки  $B^{--}$  такие, что при соответствующих значениях параметров уже отображение (3.1) имеет одновременно как устойчивую, так и неустойчивую инвариантную кривые. Будем обозначать эти области как  $D^{suc}$ .

Таким образом, для обобщенного отображения Эно при условии  $R \neq 0$  мы всегда можем найти на полуплоскости  $M_2 > 0$  параметров  $(M_1, M_2)$  три области  $D^s$ ,  $D^u$  и  $D^{suc}$  такие, что отображение имеет устойчивую неподвижную точку при  $(M_1, M_2) \in D^s$ , вполне неустойчивую неподвижную точку при  $(M_1, M_2) \in D^u$ , а также устойчивую и неустойчивую инвариантные кривые при  $(M_1, M_2) \in D^{suc}$ .

#### 4. О структуре бифуркационного множества однообходных периодических траекторий в семействе $f_{\mu_1\mu_2}$

Теперь мы можем воспроизвести основные элементы бифуркационной однообходных периодических траекторий семейства  $f_{\mu_1\mu_2}$ . Для этого будем использовать формулы (2.12) и (2.13), связывающие исходные параметры  $(\mu_1, \mu_2)$  с рескейлинг-параметрами  $(M_1, M_2)$  отображения (3.1), а также учтём, что

$$\tilde{R} = R\lambda_1^i\lambda_2^j, \quad \tilde{Q} = Q\gamma_1^{-i}\gamma_2^{-j} \tag{4.1}$$

в случае отображения  $T_{ij}$ . Таким путём мы можем спроектировать бифуркационные кривые  $L^+$ ,  $L^-$  и  $L^\varphi$ , см. формулу (3.3), заданные на плоскости параметров  $(M_1, M_2)$ , на соответствующие кривые  $L_{ij}^+$ ,  $L_{ij}^-$  и  $L_{ij}^\varphi$ , определенные уже на плоскости исходных параметров  $(\mu_1, \mu_2)$ . Отметим, что, по построению, неподвижная точка отображения (2.11) отвечает однообходной периодической траектории периода  $(i+j+n_1+n_2)$  диффеоморфизма  $f_{\mu_1,\mu_2}$ , а замкнутая инвариантная кривая отображения (2.11) соответствует периодической замкнутой кривой  $C_{ij}$ , состоящей из  $(i+j+n_1+n_2)$  компонент связности: пусть  $C_{ij}^0 = C_{ij} \cap \sigma_i^{01}$  — компонента связности кривой  $C_{ij}$ , принадлежащая полоске  $\sigma_i^{01}$ , тогда инвариантность кривой  $C_{ij}$  означает, что  $f_{\mu_1,\mu_2}^{i+j+n_1+n_2}(C_{ij}^0) = T_{ij}(C_{ij}^0) = C_{ij}^0$ .

Рассмотрим сначала случай диффеоморфизма  $f_0$ , у которого оба глобальных отображения  $T_{12}$  и  $T_{21}$  одновременно ориентируемые или неориентируемые. В этом случае, очевидно, для счетного множества  $i$  и  $j$  отображения первого возвращения  $T_{ij}$  будут также ориентируемыми. По лемме 1, у рескейлинг-формы (2.11) (или (2.16)) таких отображений будет  $M_2 > 0$  (или  $\tilde{M}_2 > 0$ ), и здесь имеет место следующая лемма.

**Лемма 2.** На  $S_\delta$  существуют счетное множество бифуркационных кривых  $L_{ij}^+, L_{ij}^-$  и  $L_{ij}^\varphi$ . При этом,

- 1) кривые  $L_{ij}^+$  и  $L_{ij}^-$  накапливаются к отрезку  $I_\delta$  при  $i, j \rightarrow \infty$ ;
- 2) кривые  $L_{ij}^\varphi$  накапливаются к точкам отрезка  $I_\delta$  так, что для любой точки  $(0, \mu_2^*) \in I_\delta$  существуют последовательности  $\{i_n(\mu_2^*)\}$  и  $\{j_n(\mu_2^*)\}$  целых чисел такие, что соответствующие им кривые  $L_{i_n j_n}^\varphi$  накапливаются к точке  $(0, \mu_2^*)$  при  $i_n \rightarrow \infty$  и  $j_n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.**

Установим сначала соотношения между параметрами  $M_2$  и  $\mu_2$  (а также  $\tilde{M}_2$  и  $\mu_2$ ). Поскольку  $M_2 > 0$  ( $\tilde{M}_2 > 0$ ), из (2.13) (соответственно из (2.18)) имеем, что

$$M_2 = A\sigma_1^i \sigma_2^j, (\tilde{M}_2 = \tilde{A}\sigma_1^{-i} \sigma_2^{-j}), \tag{4.2}$$

где  $A = |b_{21}c_{21}\Delta_1(1 + \dots)|$ ,  $\tilde{A} = |b_{21}c_{21}\Delta_1|^{-1}(1 + \dots)$ ,  $\sigma_l = |\lambda_l \gamma_l|$ ,  $l = 1, 2$ , и многоточиями обозначены коэффициенты, асимптотически малые при  $i, j \rightarrow \infty$ . В этом случае  $M_2 > 0$ . Учитывая (2.7) и (2.8), соотношения (4.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} M_2 &= A\sigma_1^{i-j(\nu_0+\mu_2)}, \\ \tilde{M}_2 &= \tilde{A}\sigma_1^{-(i-j(\nu_0+\mu_2))}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Заметим, что уравнения (3.3) определяют также бифуркационные кривые  $L_{ij}^+$  и  $L_{ij}^-$  отображения (2.11) или соответственно (2.16) (на плоскости параметров  $(M_1, M_2)$ ) с точностью до асимптотически малых при  $i, j \rightarrow \infty$  членов. Тогда, учитывая соотношения (4.3), (2.12) и (2.17), мы можем записать уравнения кривых  $L_{ij}^+$  и  $L_{ij}^-$ , в исходных параметрах  $(\mu_1, \mu_2)$ , в следующем виде

$$\begin{aligned} L_{ij}^+ : \quad \mu_1 &= \gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+ + r_{ij} + \frac{(1 + A\sigma_1^{i-j(\nu_0+\mu_2)})^2 (1 + \dots)}{4d_{12}^2 d_{21}} \gamma_1^{-2i} \gamma_2^{-2j}, \\ L_{ij}^- : \quad \mu_1 &= \gamma_1^{-i} y_1^- - c_{21} \lambda_2^j x_2^+ + r_{ij} - \frac{3(1 + A\sigma_1^{i-j(\nu_0+\mu_2)})^2 (1 + \dots)}{4d_{12}^2 d_{21}} \gamma_1^{-2i} \gamma_2^{-2j}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где  $r_{ij} = o(|\lambda_2^j| + |\gamma_1^{-i}|)$ . Эти кривые определены на  $S_\delta$  при всех достаточно больших  $i$  и  $j$  и, очевидно, при  $i, j \rightarrow \infty$  накапливаются к отрезку  $I_\delta(\mu_1) = 0, |\mu_2| \leq \delta$  оси  $\mu_2$ .

Что касается кривых  $L_{ij}^\varphi$ , то они для некоторых  $i$  и  $j$  могут не принадлежать  $S_\delta$ . Действительно, формулы (4.3) и (3.3) показывают, что выполнены следующие соотношения для параметра  $\mu_2$  на кривой  $L_{ij}^\varphi$

$$1 - R\lambda_1^i \lambda_2^j = A\sigma_1^{i-j(\nu_0+\mu_2)}.$$

Отсюда находим, что

$$\mu_2 = \frac{i}{j} - \nu_0 + \frac{\ln A}{j \ln \sigma_1} + O(\lambda_1^i \lambda_2^j) \tag{4.5}$$

Так как  $|\mu_2| < \delta$ , то равенство (4.5) может быть выполнено только лишь для таких  $i$  и  $j$ , для которых

$$\left| \frac{i}{j} - \nu_0 \right| < \delta$$



Последнее неравенство имеет бесконечно много целочисленных решений в  $i$  и  $j$  для любого  $\delta$ . Это значит, что в  $S_\delta$  содержится счетное множество кривых  $L_{ij}^\varphi$ . Более того, из формулы (4.5) следует, что каждая точка  $(0, \mu_2^*) \in S_\delta$  является предельной для множества кривых  $L_{ij}^\varphi$ . Действительно, пусть  $i_n$  и  $j_n$  будут целочисленными последовательностями, такими, что  $i_n/j_n$  будет стремиться к  $(\mu_2^* + \nu_0)$ . Тогда из (4.5) следует, что кривые  $L_{i_n j_n}^\varphi$  накапливаются к точке  $(0, \mu_2^*)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это завершает доказательство леммы 2.

Формулы (2.12) и (2.13) позволяют нам построить на плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  не только бифуркационные кривые  $L_{ij}^+$ ,  $L_{ij}^-$  и  $L_{ij}^\varphi$  для достаточно больших  $i$  и  $j$ , но также и соответствующие области  $D_{ij}^s$ ,  $D_{ij}^u$  и  $D_{ij}^{suc}$ . Здесь, например,  $D_{ij}^{suc} \subset S_\delta$  — область, при значениях параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  из которой диффеоморфизм  $f_{\mu_1 \mu_2}$  имеет одновременно устойчивую и неустойчивую периодические инвариантные кривые. Как мы определили область  $D_{ij}^{suc}$ , она прилегает к точке  $B_{ij}^{--} \in L_{ij}^-$ . Из леммы 2 непосредственно вытекает, что в  $S_\delta$  имеется бесконечно много областей  $D_{ij}^{suc}$ , и, в частности, верно следующее утверждение.

**Лемма 3.** *На плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  в любой окрестности начала координат существует счетное множество областей  $D_{ij}^{suc}$ , накапливающихся к  $(0, 0)$  при  $i \rightarrow \infty$  и  $j \rightarrow \infty$  таких, что диффеоморфизм  $f_{\mu_1, \mu_2}$  имеет при  $(\mu_1, \mu_2) \in D_{ij}^{suc}$  устойчивую и неустойчивую периодические замкнутые инвариантные кривые.*

Лемма 3 верна и в том случае, когда у диффеоморфизма  $f_0$  ровно одно из глобальных отображений,  $T_{12}$  или  $T_{21}$ , является неориентируемым. При этом, если хотя бы одна из седловых неподвижных точек,  $O_1$  или  $O_2$ , имеет один отрицательный и один положительный мультипликатор, то мы выберем числа  $i$  и  $j$  подходящей четности. В оставшихся случаях (ровно одно из отображений  $T_{12}$  или  $T_{21}$  имеет отрицательный якобиан, и мультипликаторы точек  $O_1$  и  $O_2$  одного знака), используя конструкцию из [6], мы находим в семействе  $f_{\mu_1}$  последовательности  $\mu_{pq}$  или  $\mu_{nm}$  значений параметра  $\mu_1$  такие, что соответствующий диффеоморфизм  $f_{\mu_1}$  имеет негрубый гетероклинический контур (смешанного типа) либо а) с ориентируемым двухобходными глобальным отображением  $\hat{T}_{21} = T_{21} T_{02}^q T_{12} T_{01}^p T_{21}$ ; либо б) с ориентируемым двухобходными глобальным отображением  $\hat{T}_{12} = T_{12} T_{01}^n T_{21} T_{02}^m T_{12}$ . Очевидно, что лемма 3 будет верна и в этом случае.

## 5. Доказательство основной теоремы

Пусть диффеоморфизм  $g$  имеет гетероклинический контур, который содержит грубые седловые периодические траектории  $P_1, \dots, P_n$  и гетероклинические орбиты  $\tilde{\Gamma}_{ii+1}, \tilde{\Gamma}_{n1}$  такие, что  $\tilde{\Gamma}_{ii+1} \subset W^u(P_i) \cap W^s(P_{i+1})$ ,  $\tilde{\Gamma}_{n1} \subset W^u(P_n) \cap W^s(P_1)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Без ограничения общности, мы можем предположить, что все указанные пересечения трансверсальны и только одно из них нетрансверсально, например, пусть многообразия  $W^u(P_n)$  и  $W^s(P_1)$  касаются. Более того, мы можем считать, что  $W^u(P_n)$  и  $W^s(P_1)$  касаются в точках гетероклинической траектории  $\tilde{\Gamma}_{n1}$  квадратичным образом. Пусть данный контур будет контуром смешанного типа. Покажем, что в этом случае вблизи  $g$  существует диффеоморфизм с простейшим негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа.

Пусть  $q$  — некоторое целое число такое, что точки периодических траекторий  $P_1, \dots, P_n$  являются неподвижными точками отображения  $g^q$ . Выберем по одной из точек,  $O_i, i = 1, \dots, n$ , из каждой траектории  $P_i$  и рассмотрим для отображения  $g$  гетероклинический контур, состоящий из неподвижных точек  $O_1, \dots, O_n$  и гетероклинических траекторий  $\Gamma_{ii+1} \subset \tilde{\Gamma}_{ii+1}$ ,  $\Gamma_{n1} \subset \tilde{\Gamma}_{n1}$  (точки траекторий  $\Gamma_{ii+1}$  диффеоморфизма  $g^q$  — это соответствующие точки траекторий  $\tilde{\Gamma}_{ii+1}$ , взятые через  $q$  итераций  $g$ ). Тогда, по построению, диффеоморфизм  $g^q$  имеет гетероклинический контур такой, что траектории  $\Gamma_{ii+1}, i = 1, \dots, n-1$ , являются грубыми (многообразия  $W^u(O_i)$

и  $W^s(O_i + 1)$  пересекаются трансверсально в точках траекторий  $\Gamma_{ii+1}$ , а траектория  $\Gamma_{n1}$  — негрубая: в её точках многообразия  $W^u(O_n)$  и  $W^s(O_1)$  имеют квадратичное касание.

По условию теоремы, седловые величины по крайней мере двух точек из множества  $\{O_1, \dots, O_n\}$  расположены по разные стороны от единицы. Рассмотрим случай, когда этими точками являются  $O_1$  и  $O_n$ . Так как пересечение многообразий  $W^u(O_i)$  и  $W^s(O_i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , трансверсально, то в силу  $C^r$ - $\lambda$ -леммы найдется гетероклиническая траектория  $\Gamma_{1n}$ ,  $\Gamma_{1n} \subset U$ , в точках которой будут трансверсально пересекаться многообразия  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_n)$ . Таким образом, контур  $C = \{O_1, O_n, \Gamma_{1n}, \Gamma_{n1}\}$  является, по построению, простейшим негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа.

Теперь рассмотрим случай, когда седловые величины точек  $O_1$  и  $O_j$ ,  $j \in \{2, \dots, n - 1\}$ , лежат по разные стороны от единицы. Выберем сначала некоторую грубую гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{1j} \subset U$ , в точках которой трансверсально пересекаются  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_j)$ . Пусть  $M_1^+ \in W_{loc}^s(O_1) \cap W^u(O_n)$  — некоторая точка траектории  $\Gamma_{n1}$ , и пусть  $\Pi_1^+$  — её некоторая малая окрестность. Обозначим через  $l_0^u$  компоненту связности множества  $W^u(O_n) \cap \Pi_1^+$ , содержащую точку  $M_1^+$ . Как вытекает опять из  $C^r$ - $\lambda$ -леммы, к кривой  $l_0^u$  будут накапливаться (в  $C^r$ -топологии) кривые  $w_k$  из множества  $W^u(O_j) \cap \Pi_1^+$ . Таким образом, мы можем расщепить исходное гетероклиническое касание так, что некоторая кривая  $w_k$  (с большим  $k$ ) будет квадратично касаться отрезка  $W_{loc}^s(O_1) \cap \Pi_1^+$ . Соответственно, новый диффеоморфизм  $\tilde{g}^q$  будет иметь негрубую гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{jk}$ , в точках которой квадратично касаются многообразия  $W^u(O_j)$  и  $W^s(O_1)$ . Таким образом, контур  $\tilde{C} = \{O_1, O_j, \Gamma_{1j}, \Gamma_{jn}\}$  является, по построению, простейшим негрубым гетероклиническим контуром смешанного типа.

Теперь наши результаты, полученные в параграфах 2–4, могут быть применены к областям Ньюхауса с гетероклиническими касаниями. Существование таких областей было установлено в [6]. Здесь мы только отметим следующее характеристическое свойство этих областей, обозначим их через  $\Delta_i$ , на котором будет основано доказательство.

*В  $\Delta_i$  плотны диффеоморфизмы с простейшими негрубыми гетероклиническими контурами, содержащими неподвижные точки  $\tilde{O}_1$  и  $\tilde{O}_2$ , близкие к точкам  $O_1$  и  $O_2$  исходного контура.*

Теперь основная теорема легко вытекает из наших результатов при помощи процедуры вложенных областей. Действительно, пусть  $g^0 \in \Delta_i$ . Выберем сколь угодно близкий к  $g^0$  диффеоморфизм  $g^1 \in \Delta_i$ , который имеет простейший негрубый гетероклинический контур смешанного типа. Согласно лемме 3, в любой окрестности диффеоморфизм  $g^1$  существует область  $\nu_1 \subset \Delta_i$  такая, что любой диффеоморфизм из  $\nu_1$  имеет устойчивую и неустойчивую инвариантные кривые. Далее, находим внутри  $\nu_1$  новый диффеоморфизм  $g^2$ , который имеет простейший негрубый гетероклинический контур смешанного типа. Опять по лемме 3, существует окрестность  $\nu_2 \subset \nu_1$  такая, что любой диффеоморфизм из  $\nu_2$  имеет уже две устойчивых и две неустойчивых инвариантных замкнутых кривых, и т.д. Таким образом, получаем последовательность вложенных областей

$$\nu_1 \supset \nu_2 \supset \dots \nu_n \supset \dots \tag{5.1}$$

таких, что любой диффеоморфизм из  $\nu_n$  имеет одновременно  $n$  устойчивых и  $n$  вполне неустойчивых инвариантных замкнутых кривых. Это завершает доказательство теоремы.

**Замечание 4.** *Бесконечная последовательность (5.1) может быть дополнена вложенными областями, отвечающими существованию устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических траекторий. Таким образом, получаем, что в областях  $\Delta_i$  плотны диффеоморфизмы, которые имеют одновременно бесконечное множество*

устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических траекторий, а также устойчивых и вполне неустойчивых замкнутых инвариантных кривых. Заметим, что такие диффеоморфизмы будут образовывать в  $\Delta_i$  множество второй категории, поскольку оно определяется процедурой счетного пересечения открытых и всюду плотных множеств.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 04-01-00487 и 05-01-00558, гранта Президента России по поддержке ведущих научных школ No.9686.2006.1, а также гранта CRDF No. RU-M1-2583-MO-04. Авторы благодарят Д.В.Тураева за полезные замечания.

## Список литературы

- [1] Гонченко С. В., Гонченко В. С. *О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями* // Труды МИАН, 2004, т. 244, с. 84–114.
- [2] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса* // Proc. of Int. Conf., dedicated to 90-th Anniversary of L. S. Pontryagin (August, 31 - September, 6, 1998, Moscow), V. 6 "Dynamical systems" (в кн. "Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры", 1999, т. 67, с. 69–128.)
- [3] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре* // Докл. Росс. Акад. Наук, 1993, т. 330, №2, с. 144–147.
- [4] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре* // ДАН СССР, 1991, т. 320, №2, с. 269–272.
- [5] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай)* // Докл. Росс. Акад. Наук, 1993, т. 329, №4, с. 404–407.
- [6] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром* // Труды МИАН, 1997, т. 216, с. 76–125.
- [7] Гонченко С. В., Шильников Л. П. *О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре* // Известия Росс. Акад. Наук. Серия математическая, 1992, т. 56, №6, с. 1165–1197.
- [8] Гонченко С. В., Шильников Л. П. *Об инвариантах  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией* // Укр. мат. журнал, 1990, т. 42, №2, с. 153–159.
- [9] Хорозов Е. И. *Версальные деформации эквивариантных векторных полей для случаев симметрии порядка 2 и 3* // Труды семинаров им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, с. 163–192.
- [10] Colli E. *Infinitely many coexisting strange attractors* // Ann. Inst. Poincare, 1998, V. 15, №5, p. 539–579.
- [11] Gonchenko M.S. *On the structure of 1:4 resonances in Hénon maps* // Int. J. Bifurcation and Chaos, 2005, V. 15, №11.
- [12] Gonchenko S.V., Gonchenko V.S. *On Andronov-Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies* // Preprint No 556, WIAS, Berlin, 2000.
- [13] Gonchenko V. Kuznetsov Y., Meijer H. *Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies* // SIAM Journal on Appl. Dyn. Sys., 2005, V. 4, p. 407–436.

- [14] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Stenkin O. V. *On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori*. Proceedings of the Int. Conf. "Progress in Nonlinear Scienc", dedicated to 100-th Anniversary of A. A. Andronov (July 2-6), V. 1 "Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics" // Nizhni Novgorod, 2002, p. 80–102.
- [15] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. *Dynamical Phenomena in Systems with Structurally Unstable Poincaré Homoclinic Orbits* // Chaos, 1996, V. 6, №1, p. 15–31.
- [16] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. *On Models with non-Rough Poincaré Homoclinic Curves* // Physica D, V. 62, №1–4, p. 1–14.
- [17] Kuznetsov Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory* // New York: Springer-Verlag, 1995.
- [18] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. *Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits* // Nonlinearity, 2004, V. 17, p. 1217–1244.
- [19] Newhouse S. E. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks* // Topology, 1974, V. 13, p. 9–18.
- [20] Newhouse S. E. *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms* // Publ. Math. IHES., 1979, V. 50, p. 101–151.
- [21] Palis J., Viana M. *High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks* // Ann.Math., 1994, V. 140, p. 207–250.
- [22] Romero N. *Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions* // Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1995, V. 15, p. 735–757.
- [23] Takens F. *Forced Oscillations and Bifurcations* // Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, 1974, V. 2, p. 1–111.