УДК 517.987.4

Формула Фейнмана-Каца-Ито для бесконечномерного уравнения Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами

Я. А. Бутко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Россия, Москва, ГСП-2, Ленинские горы
E-mail: boutko@mars.rags.ru

Получено 8 февраля 2006 г.

Рассматривается уравнение Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами в гильбертовом пространстве. Векторный потенциал играет ту же роль, что и магнитное поле в конечномерном случае. Доказано существование решения задачи Коши. Решение является локальным по временной и пространственным переменным и представляется вероятностной формулой типа Фейнмана-Каца-Ито.

Ключевые слова: бесконечномерное уравнение Шрёдингера, стохастические интегралы, векторный потенциал, формула Фейнмана-Каца-Ито, функциональные интегралы.

Ya. A. Butko

The Feynman-Kac-Ito formula for an infinite-dimensional Schrödinger equation with scalar and vector potentials

We consider an infinite-dimensional Schrödinger equation with scalar and vector potentials in a Hilbert space. The vector potential plays the same role as a magnetic field in the finite-dimensional case. We have proved the existence of the solution to the Cauchy problem. The solution is local in time and space variables and is expressed by a probabilistic formula of Feynman-Kac-Ito type.

Keywords: infinite dimensional Schrödinger equation, stochastic integrals, vector potential, Feynman-Kac-Ito formula, functional integrals.

Mathematical Subject Classifications: 28C20, 81Q05

1. Введение

Дифференциальные уравнения для функций бесконечномерного аргумента встречаются в различных разделах теоретической физики, в том числе в квантовой теории поля (например, в связи с процедурой вторичного квантования) и в теории суперструн. Систематическое математическое исследование таких уравнений было начато в 60-х годах (см., например, [8], [7], [33]). Существует множество работ, посвящённых формуле Фейнмана-Каца для уравнения теплопроводности (или в более общем случае для уравнения Колмогорова) в бесконечномерном пространстве (например, [9], [25]). Бесконечномерное уравнение Шрёдингера изучалось различными методами в работах С.Альбеверио, Ж. Бжезняка, Ю. Л. Далецкого, О. Г. Смолянова, А. Ю. Хренникова, Е. Т. Шавгулидзе и других авторов (например, [16], [23], [19], [20], [8], [18], [35]). Формула Фейнмана-Каца для уравнения Шрёдингера в бесконечномерном пространстве исследовалась в основном в работах [15], [34], [35], [21]. В этих работах был последовательно расширен класс потенциалов, для которых доказывается формула Фейнмана-Каца. В статье результаты, аналогичные результатам С. Альбеверио, О.Г. Смолянова и А.Ю. Хренникова [21], получены для бесконечномерного уравнения Шрёдингера, содержащего не только скалярный, но и векторный потенциал.

2. Уравнение Шрёдингера со скалярным и векторным потенциалами в гильбертовом пространстве

Пусть X — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $(\cdot,\cdot)$ и $||\cdot||$ — скалярное произведение и норма в X. Пусть B — симметрический ядерный оператор в X; $a: X \to X$ — векторное поле; $V: X \to \mathbb{C}$ — скалярная функция. Обозначим через H — гамильтониан квантового поля в векторном потенциале a и скалярном потенциале V:

$$Hf(t,x) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(Bf''(t,x)) + 2i(a(x), f'(t,x)) + i\,\mathrm{div}\,a(x)f(t,x) + V(x)f(t,x). \tag{2.1}$$

Символы f' и f'' обозначают соответственно первую и вторую производные (по Фреше) функции f по переменной $x \in X$.

Рассмотрим задачу Коши для бесконечномерного уравнения Шрёдингера:

$$i\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = Hf(t,x), \tag{2.2}$$

$$f(0,x) = f_0(x). \tag{2.3}$$

Введём следующие обозначения. Множества $S(c,r) = \{x \in X : ||x-c|| < r\}$ и $\bar{S}(c,r) = \{x \in X : ||x-c|| \leqslant r\}$ — это соответственно открытый и замкнутый шары в X с центром в $c \in X$ и радиусом $r > 0$. Рассмотрим $\delta,\ r > 0,\ \ c \in X$. Обозначим символом $\mathbf{C}^{1,2}([0,\delta)\times S(c,r))$ класс функций $f:\ [0,\delta)\times S(c,r) \to \mathbb{C}$ один раз непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых (по Фреше) по переменной x.

Локальным решением задачи Коши (2.2), (2.3) называется функция $f \in \mathbf{C}^{1,2}([0,\delta)\times S(c,r))$ для некоторых $r,\delta > 0,\ c \in X$, которая удовлетворяет уравнению (2.2) и $\lim_{t\to 0} f(t,x) = f_0(x)$ для любого $x \in \overline{S}(c,r)$.

Мы построим локальное решение задачи (2.2), (2.3) при некоторых ограничениях на начальные условия, скалярный и векторный потенциалы и оператор B.

3. Формула Фейнмана-Каца-Ито для положительно определённого оператора B

Обозначим через Z комплексификацию X, то есть $Z = X \oplus iX$. Это комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением, являющимся стандартным продолжением скалярного произведения в X. Открытый и замкнутый шары в Z обозначим $S^c(c,r)$, и $\overline{S}^c(c,r)$ соответственно. Символ $\sqrt{i}$ обозначает число $e^{\frac{\pi}{4}i}$. В дальнейшем мы будем рассматривать следующие подмножества Z: $D(c,r) = S(c,r)\times\sqrt{i}X$, $\overline{D}(c,r) = \overline{S}(c,r)\times\sqrt{i}X$. Элементы множества $\overline{D}(c,r)$ имеют вид $z = x + \sqrt{i}y,\ \ x \in \overline{S}(c,r),\ y \in X$. Для $z = x + \sqrt{i}y$ обозначим x через $R_{1/2}z$, y через $I_{1/2}z$.

Для банахова пространства E над полем K, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, пространство непрерывных n-линейных форм $b:\ E^n \to K$ обозначим символом $\mathcal{L}_n(E)$. Для $b \in \mathcal{L}_n(E)$ введём норму $||b|| = \sup_{||x_j||\leqslant 1}|b(x_1, ..., x_n)|$.

Пусть O — открытое множество в E. Функция $f:\ O \to \mathbb{C}$ называется аналитической тогда и только тогда, когда для любого $z_0 \in O$ существуют $r > 0$ и последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ симметричных форм $B_n \in \mathcal{L}_n(E)$ такие, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z - z_0, ..., z - z_0), \quad z \in S^c(z_0, r),$$

где ряд сходится равномерно.

Обозначим через $A_2(D(c,r))$ класс аналитических функций $V:\ D(c,r) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующему условию:

$$\exists\, \alpha \geqslant 0:\ \ |V(z)| \leqslant \alpha(||I_{1/2}z||^2 + 1), \quad z \in D(c,r). \tag{3.1}$$

Лемма 1 (см. [21]). *Пусть $V \in A_2(D(c,r))$, $s < r$. Тогда первые две производные функции V удовлетворяют условиям:*

$$\exists\, \alpha_1 \geqslant 0:\ \ ||V'(z)|| \leqslant \alpha_1(||I_{1/2}z||^2 + 1), \quad z \in D(c,s); \tag{3.2}$$

$$\exists\, \alpha_2 \geqslant 0:\ \ ||V''(z)|| \leqslant \alpha_2(||I_{1/2}z||^2 + 1), \quad z \in D(c,s). \tag{3.3}$$

Обозначим через $AE_1(D(c,r))$ класс аналитических функций $f_0:\ D(c,r) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\exists\, \beta,\ \gamma \geqslant 0:\ \ |f_0(z)| \leqslant \gamma e^{\beta||I_{1/2}z||}, \quad z \in D(c,r) \tag{3.4}$$

Лемма 2 (см. [21]). *Пусть $f_0 \in AE_1(D(c,r))$, $s < r$. Тогда две первые производные функции f_0 удовлетворяют соотношениям:*

$$\exists\, \beta_1,\ \gamma_1 \geqslant 0:\ \ ||f_0'(z)|| \leqslant \gamma_1 e^{\beta_1||I_{1/2}z||}, \quad z \in D(c,s) \tag{3.5}$$

$$\exists\, \beta_2,\ \gamma_2 \geqslant 0:\ \ ||f_0''(z)|| \leqslant \gamma_2 e^{\beta_2||I_{1/2}z||}, \quad z \in D(c,s) \tag{3.6}$$

Пусть B — положительно определённый симметрический ядерный оператор в X. Пусть для любого $x \in X$ векторный потенциал $a(x) = Cx$, где C — положительно определённый симметрический ядерный оператор в X, коммутирующий с B и такой, что $\mathrm{Ran}(C) \subset \mathrm{Dom}(B^{-1/2})$.

Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ в X имеет аналитическое продолжение по каждому из аргументов на пространство Z. Это аналитическое продолжение мы будем также обозначать символом $(\cdot,\cdot)$. Отметим, что получившаяся билинейная функция не является скалярным произведением в Z и действует следующим образом: для $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in X$ $(x_1+iy_1, x_2+iy_2) = (x_1,x_2) - (y_1,y_2) + i(x_1,y_2) + i(x_2,y_1)$.

Винеровский процесс в X с ковариацией B обозначим символом $\xi(t)$; предполагаем, что $\xi(0) = 0$. Математическое ожидание по вероятностной мере, соответствующей этому процессу, обозначим E.

Теорема 1. *Пусть B и C — коммутирующие положительно определённые симметрические ядерные операторы в X, причём $\mathrm{Ran}(C) \subset \mathrm{Dom}(B^{-1/2})$. Пусть для любого $x \in X$ векторный потенциал $a(x) = Cx$, $V \in A_2(D(c,r))$ и $f_0 \in AE_1(D(c,r))$. Тогда существует $\delta = \delta(B,V,C,f_0) > 0$ такое, что функция f, заданная формулой Фейнмана-Каца-Ито*

$$f(t,x) = E\left(f_0(x+\sqrt{i}\xi(t)) e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau} e^{\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau} \times \right.$$
$$\left. \times\, e^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))d\tau} e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), d\xi(\tau))} \right), \tag{3.7}$$

для $t \in [0,\delta)$ и $x \in S(c,r)$ является локальным решением задачи Коши (2.2), (2.3).

Доказательство. Сначала покажем, что функция f, заданная формулой (3.7), корректно определена, принадлежит классу $\mathbf{C}^{1,2}([0,\delta) \times S(c,r))$ и удовлетворяет начальным условиям. Далее с помощью формулы Ито для гильбертовых пространств ([9]) проверим (ср. [40]), что функция f удовлетворяет уравнению (2.2).

Обозначим через $G(t,x,\xi)$ выражение, стоящее в формуле (3.7) под знаком математического ожидания, то есть $f(t,x) = EG(t,x,\xi)$.

Так как $\operatorname{div} a(x) = \mathrm{tr} C$, то $\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau = t\,\mathrm{tr} C$, и значит

$$\exists\, K_1 \geqslant 0 : \quad \left| e^{\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau} \right| \leqslant e^{tK_1}. \tag{3.8}$$

Поскольку $f_0 \in AE_1(D(c,r))$, $V \in A_2(D(c,r))$, то

$$\exists\, \beta,\gamma \geqslant 0 : \quad |f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))| \leqslant \gamma e^{\beta||\xi(t)||}, \tag{3.9}$$

$$\exists\, \alpha \geqslant 0 : \quad |e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau}| \leqslant e^{t\alpha(1+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)}. \tag{3.10}$$

Напомним, что оператор $A : X \to X$ называется замкнутым, если из условий $x_n \in \mathrm{Dom}(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \mathrm{Dom}(A)$ и $Ax = y$. Так как B, C — ограниченные (а значит и замкнутые) операторы и $\mathrm{Ran}(C) \subset Dom(B^{-1/2}) \subset Dom(B^{-1})$, то оператор $B^{-1}C$ определён на всём X и замкнут. Тогда по теореме Банаха о замкнутом графике [10] оператор $B^{-1}C$ является ограниченным. Следовательно, для $x \in S(c, r)$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца

$$
\begin{aligned}
&|(B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))| = \\
&\quad = |(B^{-1}Cx, Cx) + \sqrt{i}(B^{-1}Cx, C\xi(\tau)) + \sqrt{i}(B^{-1}C\xi(\tau), Cx) + i(B^{-1}C\xi(\tau), C\xi(\tau))| \leqslant \\
&\leqslant ||B^{-1}Cx||\cdot(||Cx||+||C||\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||)+||Cx||\cdot||B^{-1}C||\cdot\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||+||B^{-1}C||\cdot||C||\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2.
\end{aligned}
$$

И значит,

$$
\exists\, K_2 \geqslant 0: \quad |e^{2i\int_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))d\tau}| \leqslant e^{tK_2(1+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)}. \tag{3.11}
$$

Рассмотрим стохастический интеграл

$$
\frac{2}{\sqrt{i}}\int_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), d\xi(\tau)).
$$

Для $a(x) = Cx$ имеем:

$$
\frac{2}{\sqrt{i}}\int_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), d\xi(\tau)) = 2\int_0^t (B^{-1}C\xi(\tau), d\xi(\tau)) + \frac{2}{\sqrt{i}}\int_0^t (B^{-1}Cx, d\xi(\tau)).
$$

Найдём каждое из слагаемых. Интегрируя $\int_0^t (B^{-1}Cx, d\xi(\tau))$ по частям, получим

$$
\int_0^t (B^{-1}Cx, d\xi(\tau)) = (B^{-1}Cx, \xi(t))
$$

для почти всех ξ (напомним, что $\xi(0) = 0$ почти наверное).

Проверим с помощью формулы Ито ([9], [40]), что

$$
\int_0^t (B^{-1}C\xi(\tau), d\xi(\tau)) = \frac{1}{2}((B^{-1}C\xi(t), \xi(t)) - t\mathrm{tr}C). \tag{3.12}
$$

Для этого возьмём стохастический дифференциал от обеих частей (3.12).

$$
d(\int_0^t (B^{-1}C\xi(\tau), d\xi(\tau))) = (B^{-1}C\xi(t), d\xi(t)).
$$

Для функции $g: X \to \mathbb{R},\ g(x) = (B^{-1}Cx, x)$ и $h_1,\ h_2 \in X$ выполняется $g'(x)h_1 = 2(B^{-1}Cx, h_1)$ и $g''(x)h_1h_2 = 2(B^{-1}Ch_1, h_2)$. Тем самым, $dg(t, \xi) = 2(B^{-1}C\xi(t), \cdot)d\xi + \frac{1}{2}\cdot 2(B^{-1}C\cdot, \cdot)d\xi d\xi = 2(B^{-1}C\xi(t), d\xi) + \mathrm{tr}\,C dt$. И значит,

$$
d(\frac{1}{2}((B^{-1}C\xi(t), \xi(t)) - t\mathrm{tr}C)) = (B^{-1}C\xi(t), d\xi(t)),
$$

что доказывает равенство (3.12).

Таким образом, для некоторых $k_1,\ k_2 > 0$ имеем

$$\left| e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)),\, d\xi(\tau))} \right| \leqslant e^{k_1|(B^{-1}Cx,\, \xi(t))|} e^{k_2|(||B^{-1}C||\cdot||\xi(t)||^2 - t\operatorname{tr} C)|}.$$

И следовательно, для векторного потенциала $a:\ a(x) = Cx$, $x \in X$ верно следующее:

$$\exists\, K_3 \geqslant 0: \quad \left| e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), d\xi(\tau))} \right| \leqslant e^{K_3(||\xi(t)||^2 + ||\xi(t)|| + t)}. \tag{3.13}$$

Таким образом, из оценок (3.8)–(3.13) получаем

$$\sup_{x\in S(c,r)} |G(t,x,\xi)| \leqslant \gamma e^{tK_1} e^{\beta||\xi(t)||} e^{t\alpha(1+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)} \times$$

$$\times\, e^{tK_2(1+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)|| + \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)} \cdot e^{K_3(||\xi(t)||^2+||\xi(t)||+t)}. \tag{3.14}$$

И следовательно,

$$\exists\, K_4 \geqslant 0: \quad \sup_{x\in S(c,r)} |G(t,x,\xi)| \leqslant \gamma e^{tK_4(1+\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)|| + \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)}. \tag{3.15}$$

По теореме Ферника [28] для любого $T > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $Ee^{\varepsilon \max\limits_{0\leqslant s\leqslant T}||\xi(s)||^2} < \infty$. Тогда для $t < \delta = \varepsilon/(2K_4)$ с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца получаем:

$$E|G(t,x,\xi)| \leqslant \gamma e^{tK_4} \left(Ee^{2tK_4 \max\limits_{0\leqslant s\leqslant T}||\xi(s)||} \right)^{1/2} \left(Ee^{2tK_4 \max\limits_{0\leqslant s\leqslant T}||\xi(s)||^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Таким образом, функция f, задаваемая формулой (3.7), корректно определена.

Так как для почти всех ξ $\lim_{t\to 0} G(t,x,\xi) = f_0(x)$ и оценка G равномерна по $t \in [0,\delta)$, то по теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем, что $\lim_{t\to 0} f(t,x) = f_0(x)$. Следовательно, функция f, задаваемая формулой (3.7), удовлетворяет начальным условиям.

Покажем существование первой и второй производной функции f по переменной x.

Обозначим

$$u(t,x,\xi) = e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau} e^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))d\tau} \times$$

$$\times\, e^{\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau} e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)), d\xi(\tau))}.$$

Из оценок (3.8), (3.10) - (3.13) следует, что

$$\exists K_5 \geqslant 0: \quad |u(t,x,\xi)| \leqslant K_5 t(1 + \max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)|| + \max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2). \tag{3.16}$$

Пусть $h \in X$. Обозначим

$$v(t,x,\xi,h) =$$

$$= 2i\int_0^t \left[(B^{-1}Ch, Cx + \sqrt{i}C\xi(\tau)) + (B^{-1}Cx + \sqrt{i}B^{-1}C\xi(\tau), Ch) \right] d\tau -$$

$$-i\int_0^t V'_x(x+\sqrt{i}\xi(\tau))h d\tau + \frac{2}{\sqrt{i}}\int_0^t (B^{-1}Ch, d\xi(\tau)).$$

Тогда $u'_x(t,x,\xi)h = u(t,x,\xi)v(t,x,\xi,h)$.

Оценим $|v(t,x,\xi,h)|$ для $h \in S(0,1)$.

$$\left|2i\int_0^t \Big[(B^{-1}Ch, Cx+\sqrt{i}C\xi(\tau)) + (B^{-1}Cx+\sqrt{i}B^{-1}C\xi(\tau), Ch)\Big]\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant 4t||B^{-1}C||\cdot||C||\cdot(||x|| + \max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||) \leqslant k_3t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||) \quad (3.17)$$

для некоторого $k_3 \geqslant 0$.

Тогда по лемме 1 и оценке (3.17) для $h \in S(0,1)$ существуют $k_3,\ k_4 \geqslant 0$ такие, что

$$|v(t,x,\xi,h)| \leqslant (t\alpha_1(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||) + k_3t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||) + k_4||\xi(t)||)$$

и, следовательно,

$$\exists\, K_6 \geqslant 0: \ \ |v(t,x,\xi,h)| \leqslant K_6t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||). \quad (3.18)$$

Рассмотрим $G'_x(t,x,\xi)h$.

$$G'_x(t,x,\xi)h = f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))u(t,x,\xi)v(t,x,\xi,h) + u(t,x,\xi)f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t))h.$$

По лемме 2 и из (3.16), (3.18) получаем:

$$\exists K_7, K_8 \geqslant 0\colon \sup_{x\in S(c,r)}|G'_x(t,x,\xi)h| \leqslant K_7t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)|| + \max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)e^{K_8||\xi(t)||}. \quad (3.19)$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца и теоремы Ферника также как и для $E|G(t,x,\xi)|$ показывается, что для $h \in S(0,1)$ выполнено условие $E|G'_x(t,x,\xi)h| < \infty$.

Заметим, что линейный функционал $[h \mapsto E(G'_x(t,x,\xi)h)]$ является ограниченным. Поскольку оценка (3.19) равномерна по $x \in S(c,r)$, то по теореме Лебега о мажорированной сходимости $E(G'_x(t,x,\xi)h) = (EG(t,x,\xi))'_x h$ — производная по Фреше функции $EG(t,x,\xi))$ по направлению h.

Теперь покажем, что существует вторая производная по переменной x функции $f(t,x) = EG(t,x,\xi)$. Пусть $h_1,\ h_2 \in X$. Тогда

$$G''_{xx}(t,x,\xi)h_1h_2 = u(t,x,\xi)\{f''_0(x+\sqrt{i}\xi(t))h_1h_2 + f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t))h_1v(h_2)+$$
$$+f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t))h_2v(h_1) + f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))v(h_1)v(h_2) + f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))v'(h_1)h_2\},$$

где $v(h)$ обозначает $v(t,x,\xi,h)$.

Найдём и оценим $v'(h_1)h_2$.

$$v'(h_1)h_2 = 2i\int_0^t \left[(B^{-1}Ch_1, Ch_2) + (B^{-1}Ch_2, Ch_1)\right]d\tau - i\int_0^t V''_{xx}(x+\sqrt{i}\xi(\tau)h_1h_2d\tau.$$

Следовательно, по лемме 1 для $h_1, h_2 \in S(0,1)$ выполняется следующее

$$\exists K_9 \geqslant 0: \ \ |v'(h_1)h_2| \leqslant K_9t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2). \quad (3.20)$$

Тогда по лемме 2 и из оценок (3.16), (3.18), (3.20) получаем

$$\sup_{x\in S(c,r)}|G''_{xx}(t,x,\xi)h_1h_2| \leqslant K_5t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)|| + \max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)\times$$
$$\times\left[\gamma_2e^{\beta_2||\xi(t)||} + 2\gamma_1K_6te^{\beta_1||\xi(t)||}(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||) + K_9\gamma t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)\right],$$

и значит

$$\exists K_{10},\ K_{11} \geqslant 0:$$
$$\sup_{x\in S(c,r)} |G''_{xx}(t,x,\xi)h_1h_2| \leqslant K_{10}t(1+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||+\max_{0\leqslant s\leqslant t}||\xi(s)||^2)^2 e^{K_{11}||\xi(t)||}. \quad (3.21)$$

Снова применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца и теорему Ферника, заключаем, что $E|(G''_{xx}(t,x,\xi)h_1h_2)|<\infty$, и по теореме Лебега непрерывная вторая производная функции f по переменной x существует для $t\in[0,\delta)$.

Покажем теперь, что функция $f=EG$ удовлетворяет уравнению (2.2). Найдём стохастический дифференциал функции $G(t,x,\xi)$. Введём обозначения:

$$\widetilde{f}_0(t,x,\xi)=f_0(x+\sqrt{i}\xi(t)),$$
$$u_1(t,x,\xi)=e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau}$$
$$u_2(t,x,\xi)=e^{\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau}$$
$$u_3(t,x,\xi)=e^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)),a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))d\tau}$$
$$u_4(t,x,\xi)=e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)),d\xi(\tau))}$$

Тогда по формуле Ито для гильбертовых пространств (см. [9])

$$d\widetilde{f}_0(t,x,\xi)=\sqrt{i}(f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t)),d\xi)+\frac{i}{2}\operatorname{tr}Bf''_0(x+\sqrt{i}\xi(t))dt,$$
$$du_1(t,x,\xi)=-ie^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau}V(x+\sqrt{i}\xi(t))dt,$$
$$du_2(t,x,\xi)=e^{\int\limits_0^t \operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau}(\operatorname{div} a(x+\sqrt{i}\xi(t)))dt,$$
$$du_3(t,x,\xi)=$$
$$=2ie^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)),a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)))d\tau}(B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(t)),a(x+\sqrt{i}\xi(t)))dt,$$
$$du_4(t,x,\xi)=e^{\frac{2}{\sqrt{i}}\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(\tau)),d\xi(\tau))}\times$$
$$\times\left\{\frac{2}{\sqrt{i}}(B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(t)),d\xi)-2i(B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(t)),a(x+\sqrt{i}\xi(t)))dt\right\}.$$

И при $u(t,x,\xi)=\prod_{j=1}^4 u_j(t,x,\xi)$ по формуле для стохастического дифференциала от произведения функций (см. [40] стр. 170) получим

$$dG(t,x,\xi)=u(t,x,\xi)\left\{\sqrt{i}(f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t)),d\xi)+\frac{i}{2}\operatorname{tr}Bf''_0(x+\sqrt{i}\xi(t))dt\right.$$
$$-i(Vf_0)(x+\sqrt{i}\xi(t))dt+(f_0\operatorname{div}a)(x+\sqrt{i}\xi(t))dt+$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{i}}(B^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(t)),d\xi(t))+2(f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t)),a(x+\sqrt{i}\xi(t)))dt\right\}. \quad (3.22)$$

Заметим, что в правой части равенства в фигурной скобке при dt стоит выражение

$$-i[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}Bf''_0(x+\sqrt{i}\xi(t))+V(x+\sqrt{i}\xi(t))f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))+$$
$$+i\operatorname{div}a(x+\sqrt{i}\xi(t))f_0(x+\sqrt{i}\xi(t))+2i(f'_0(x+\sqrt{i}\xi(t)),a(x+\sqrt{i}\xi(t)))]=$$
$$=-iHf_0(x+\sqrt{i}\xi(t)).$$

И следовательно, так как $G(0,x,\xi) = f_0(x)$ для почти всех ξ, имеем

$$G(t,x,\xi) = f_0(x) - i\int_0^t u(t,x,\xi)Hf_0(x+\sqrt{i}\xi(\tau))d\tau + \int_0^t (...)d\xi. \tag{3.23}$$

Определим $(Q_tf_0)(x) = Eu(t,x,\xi)f_0(x+\sqrt{i}\xi(t)) \equiv EG(t,x,\xi) \equiv f(t,x)$. Пользуясь теоремой Фубини и тем, что $E(d\xi) = 0$, из равенства (3.23) получаем, что полугруппа операторов $Q_t,\ t \geqslant 0$ удовлетворяет соотношению

$$(Q_tf_0)(x) = f_0(x) - i\int_0^t Q_s(Hf_0)(x)ds. \tag{3.24}$$

Заметим, что полугруппа $Q_s = e^{-isH},\ s > 0$ является решением уравнения (3.24). Тогда в силу единственности решения уравнения (3.24) функция $f(t,\cdot) \equiv (Q_tf_0)(\cdot) \equiv EG(t,\cdot,\xi)$ совпадает с $e^{-itH}f_0$, а значит дифференцируема по t и удовлетворяет уравнению Шрёдингера (2.2). Тем самым, теорема доказана.

4. Формула Фейнмана-Каца-Ито для оператора B с неопределённым знаком

Мы можем обобщить теорему 1 на случай ядерного симметрического оператора B с неопределённым знаком, $\mathrm{Ker}B = \{0\}$. Для этого рассмотрим ортонормированный базис $\{e_j\}_j$ собственных векторов оператора B, $Be_j = b_je_j$. Обозначим через X_+ подпространство X, порождённое векторами e_j, отвечающими положительным собственным значениям оператора B. Ортогональный проектор на подпространство X_+ будем обозначать Π_+. И аналогично X_- — подпространство X, порождённое векторами e_j, отвечающими отрицательным собственным значениям оператора B. Соответствующий ортогональный проектор: Π_-. Символ $\sqrt{i_B}$ обозначает оператор, действующий следующим образом: для $x = \sum_j x_je_j \in X$ выполняется $\sqrt{i_B}\,x = \sum_j \sqrt{i\mathrm{sgn}b_j}\,x_je_j$, то есть $\sqrt{i_B} = \sqrt{i}\Pi_+ + \sqrt{-i}\Pi_-$ (считаем, что $\sqrt{-i} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$).

Рассмотрим множества $\mathbf{D}(c,r) = S(c,r) \times \sqrt{i_B}X = S(c,r) \times \sqrt{i}X_+ \times \sqrt{-i}X_-$. Элементы таких множеств имеют вид: $z = x + \sqrt{i}y_+ + \sqrt{-i}y_-$, где $x \in S(c,r)$, $y_+ \in X_+$, $y_- \in X_-$. Будем обозначать $R_{1/2}z = x$, ${I^+}_{1/2}z = y_+$, ${I^-}_{1/2}z = y_-$. Также будем рассматривать $\overline{\mathbf{D}}(c,r) = \overline{S}(c,r) \times \sqrt{i_B}X$.

Обозначим через $A_2(\mathbf{D}(c,r))$ класс аналитических функций $V : \mathbf{D}(c,r) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям на рост:

$$\exists\,\alpha \geqslant 0 : |V(z)| \leqslant \alpha[||{I^+}_{1/2}z||^2 + ||{I^-}_{1/2}z||^2 + 1],\ \ z \in \mathbf{D}(c,r). \tag{4.1}$$

Лемма 3 (см. [21]). *Пусть $V \in A_2(\mathbf{D}(c,r))$, $s < r$. Тогда первые две производные функции V удовлетворяют условиям:*

$$\exists\,\alpha_1 \geqslant 0 : ||V'(z)|| \leqslant \alpha_1[||{I^+}_{1/2}z||^2 + ||{I^-}_{1/2}z||^2 + 1],\ \ z \in \mathbf{D}(c,s). \tag{4.2}$$

$$\exists\,\alpha_2 \geqslant 0 : ||V''(z)|| \leqslant \alpha_2[||{I^+}_{1/2}z||^2 + ||{I^-}_{1/2}z||^2 + 1],\ \ z \in \mathbf{D}(c,s). \tag{4.3}$$

Обозначим через $AE_1(\mathbf{D}(c,r))$ класс аналитических функций $f_0 : \mathbf{D}(c,r) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям на рост:

$$\exists\, \beta, \gamma \geqslant 0 : \quad |f_0(z)| \leqslant \gamma e^{\beta[||I^+{}_{1/2}z||^2 + ||I^-{}_{1/2}z||^2]}, \quad z \in \mathbf{D}(c,s). \tag{4.4}$$

Лемма 4 (см. [21]). *Пусть $f_0 \in AE_1(\mathbf{D}(c,r))$, $s < r$. Тогда первые две производные функции f_0 удовлетворяют условиям:*

$$\exists\, \beta_1, \gamma_1 \geqslant 0 : \quad ||f_0'(z)|| \leqslant \gamma_1 e^{\beta_1[||I^+{}_{1/2}z||^2 + ||I^-{}_{1/2}z||^2]}, \quad z \in \mathbf{D}(c,s). \tag{4.5}$$

$$\exists\, \beta_2, \gamma_2 \geqslant 0 : \quad ||f_0''(z)|| \leqslant \gamma_2 e^{\beta_2[||I^+{}_{1/2}z||^2 + ||I^-{}_{1/2}z||^2]}, \quad z \in \mathbf{D}(c,s). \tag{4.6}$$

Введём операторы $\mathrm{sgn}B = \Pi_+ - \Pi_-$ и $|B| = B\,\mathrm{sgn}B$. Оператор $|B|$ является положительно определённым симметрическим ядерным оператором и, следовательно, мы можем построить соответствующий ему Винеровский процесс $\xi(t)$. Математическое ожидание по мере, порождённой этим процессом, обозначим $E_{|B|}$.

Теорема 2. *Пусть B и C — симметрические ядерные операторы в X, причём* $\mathrm{Ker}B = \{0\}$, *C — положительно определён, коммутирует с $|B|$ и* $\mathrm{Ran}(C) \subset \mathrm{Dom}(|B|^{-1/2})$. *Пусть для любого $x \in X$ $a(x) = Cx$, $V \in A_2(\mathbf{D}(c,r))$ и $f_0 \in AE_1(\mathbf{D}(c,r))$. Тогда существует $\delta = \delta(B,V,C,f_0) > 0$ такое, что функция f, заданная формулой Фейнмана-Каца-Ито*

$$f(t,x) = E_{|B|}\Bigg(f_0(x + \sqrt{i_B}\xi(t)) e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau))d\tau} e^{\int\limits_0^t \mathrm{div}\, a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau))d\tau} \cdot$$
$$\cdot\, e^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)))d\tau} e^{2\int\limits_0^t ((\sqrt{i_B}|B|)^{-1}a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)), d\xi(\tau))} \Bigg), \tag{4.7}$$

для $t \in [0,\delta)$ и $x \in S(c,r)$ является локальным решением задачи Коши (2.2)*,* (2.3).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, с помощью лемм 4, 3 проверяется, что функция f, заданная формулой (4.7), принадлежит классу $\mathbf{C}^{1,2}([0,\delta) \times S(c,r))$. Легко видеть, что начальные условия также выполняются. Пользуясь формулой Ито, покажем, что функция f удовлетворяет уравнению Шрёдингера (2.2).

Как и прежде введём обозначения:

$$\widetilde{f_0}(t,x,\xi) = f_0(x + \sqrt{i_B}\xi(t)),$$
$$u_1(t,x,\xi) = e^{-i\int\limits_0^t V(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau))d\tau}$$
$$u_2(t,x,\xi) = e^{\int\limits_0^t \mathrm{div}\, a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau))d\tau}$$
$$u_3(t,x,\xi) = e^{2i\int\limits_0^t (B^{-1}a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)), a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)))d\tau}$$
$$u_4(t,x,\xi) = e^{2\int\limits_0^t ((\sqrt{i_B}|B|)^{-1}a(x+\sqrt{i_B}\xi(\tau)), d\xi(\tau))}$$
$$u(t,x,\xi) = \prod_{j=1}^{j=4} u_j(t,x,\xi),$$

$G(t,x,\xi) = \widetilde{f}_0(t,x,\xi)u(t,x,\xi)$.
Тогда пользуясь тем, что $(\sqrt{i_B})^2|B| = i\ \mathrm{sgn} B|B| = iB$, получим:
$d\widetilde{f}_0(t,x,\xi) = (\sqrt{i_B}f_0'(x+\sqrt{i}\xi(t)), d\xi) + \frac{i}{2}\mathrm{tr}\, Bf_0''(x+\sqrt{i}\xi(t))dt.$
Заметим, что $(\sqrt{i_B})^{-2}|B|^{-1} = -i\ \mathrm{sgn} B|B|^{-1} = -iB^{-1}$, и следовательно,
$du_4(t,x,\xi) = u_4(t,x,\xi)\left\{2((\sqrt{i_B}|B|)^{-1}a(x+\sqrt{i}\xi(t)), d\xi) + \right.$
$\left. + 2i(B^{-1}a(x+\sqrt{i_B}\xi(t)), a(x+\sqrt{i_B}\xi(t)))dt\right\}.$
Таким образом,

$$\begin{aligned} dG(t,x,\xi) =& \\ &= u(t,x,\xi)\{([...], d\xi) + \frac{i}{2}\mathrm{tr}\, Bf_0''(x+\sqrt{i_B}\xi(t))dt - i(Vf_0)(x+\sqrt{i_B}\xi(t))dt + \\ &+ (f_0 \,\mathrm{div}\, a)(x+\sqrt{i_B}\xi(t))dt + 2(f_0'(x+\sqrt{i_B}\xi(t)), a(x+\sqrt{i_B}\xi(t)))dt\Big\} = \\ &= u(t,x,\xi)\left\{-iHf_0(x+\sqrt{i_B}\xi(t))dt + ([...], d\xi)\right\}. \end{aligned}$$

Это значит, что семейство операторов

$$Q_t: \ (Q_tf_0)(x) = E_{|B|}[u(t,x,\xi)f_0(x+\sqrt{i_B}\xi(t))] \equiv E_{|B|}G(t,x,\xi)$$

удовлетворяет уравнению (3.24), и следовательно, функция $f(t,x) = (Q_tf_0)(x)$ является решением уравнения Шрёдингера (2.2). Что и требовалось доказать.

Благодарности

Автор выражает чувство глубокой признательности профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за полезные дискуссии, внимание и поддержку. Также автор благодарит профессоров А. Ю. Хренникова и Жд. Бжезняка за любезно предоставленную возможность ознакомления с некоторыми их публикациями.

Список литературы

[1] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. *Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах I* // Труды Моск. Мат. Общества, 1971, т. 24, с. 133–174.

[2] Альбеверио С., Смолянов О. Г. *Бесконечномерные стохастические уравнения Шрёдингера-Белавкина* // Успехи Математических Наук, 1997, т. 52, № 4, с. 197–198.

[3] Богачев В. И. *Гауссовские меры* // М.: Наука, Физматлит, 1997.

[4] Бутко Я. А. *Функциональные интегралы для уравнения Шрёдингера в компактном римановом многообразии* // Математические Заметки, 2006, т. 79, № 2.

[5] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы* // М.: Наука, 1986.

[6] Вентцель А. Д. *Курс теории случайных процессов* // М.: Наука, 1975.

[7] Гельфанд И. М., Яглом А. М. *Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике* // Успехи Математических Наук, 1956, т. 11, № 1, с. 77–114.

[8] Далецкий Ю. Л., Стремский В. В. *Фейнмановские интегралы для уравнений Шрёдингера в функциональных производных* // Успехи Мат. Наук, 1969, т. 24, № 1, с. 191–192.

[9] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* // М.: Наука, Физматлит, 1983.

[10] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // М.: Наука, 1972.

[11] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного* // СПб.: Издательство «Лань», 2002.

[12] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1, 2 // М.: Мир, 1978.

[13] Смолянов О. Г. *Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения* // М.: Издательство Московского Университета, 1979.

[14] Смолянов О. Г., Фомин С. В. *Меры на топологических линейных пространствах* // Успехи Математических Наук, 1976, т. XXXI, вып. 4(190), с. 3–56.

[15] Смолянов О. Г. *Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование Шрёдингера* // Доклады Академии Наук, 1982, т. 263, № 3, с. 558–562.

[16] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. *Континуальные интегралы* // М.: Издательство МГУ, 1990.

[17] Фейнман Р., Хибс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям* // М.: Мир, 1968.

[18] Albeverio S., Brzezniak Z. *Oscillatory integrals on Hilbert spaces and Schrödinger equation with magnetic fields* // Journal of Mathematical Physics, 1995, V. 36, № 5, p. 2135–2156.

[19] Albeverio S., Brzezniak Z. *Finite Dimensional Approximation Approach to Oscillatory Integrals and Stationary Phase In Infinite Dimensions* // Journal of Functional Analysis, 1993, V. 113, p. 177–243.

[20] Albeverio S., Brzezniak Z., Haba Z. *On the Schrödinger Equation with Potentials which are Laplace Transforms of Measures* // Potential Analysis, 1998, V. 9, p. 65–82.

[21] Albeverio S., Khrennikov A., Smolyanov O. *The Probabilistic Feynman-Kac Formula for an Infinite-Dimensional Schrödinger Equation with Exponential and Singular Potentials* // Potential Analysis, 1999, V. 11, p. 157–181.

[22] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals* // Lecture Notes in Math., V. 523. Berlin: Springer, 1976.

[23] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. *Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions* // Inv. Math., 1977, V. 40, p. 59–106.

[24] Albeverio S., Roeckner M. *Stochastic differential equations in infinite-dimensions: solutions via Dirichlet forms* // *Prob. Theory and Related Fields*, 1991, V. 89, p. 347–386.

[25] Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions* // Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[26] Doss H. *Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schr"odinger a Coefficients Analytiques* // Communications in Math. Phys, 1980, V. 73, № 3, p. 247–264.

[27] Engel K. J., Nagel R. *One-Parameter Semigroups for Linear Operators* // Graduate Texts in Mathematics, V. 194. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[28] Fernique M. X. *Integrabilite des vecteurs Gaussienns* // C. R. Acad. Sci. Paris, 1970, Serie A, t. 270, p. 1698–1699.

[29] Feynman R. P. *Space-time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics* // Rev. Mod. Phys., 1948, V. 20, p. 367–387.

[30] Feynman R. P. *An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics* // *Phys. Rev.*, 1951, V. 84, p. 108–128.

[31] Ito K. *Wiener integral and Feynman integral* // Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability, 1960, № 2. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, p. 227—238.

[32] Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View* // New-York: Springer, 1987.

[33] Gross L. *Abstract Wiener spaces* // Proc. 5-th Berkeley Symp., Math. Stat. Prob., 1965, V. 2, p. 31—42.

[34] Khrennikov A. Yu. *Infinite-dimensional pseudodifferential operators* // Math. USSR Izv., 1988, V. 31, p. 576—601.

[35] Khrennikov A. Yu. *An existence theorem for the solution of the infinite-dimensional Schrödinger equation with quadratic potential* // Uspehi Mat. Nauk, 1984, V. 39, p. 163—164.

[36] Kuo H. H. *Gaussian measures on Banach spaces* // Berlin, Lecture Notes in Math., 1975, V. 463.

[37] Malliavin P. *Hypoellipticity in Infinite Dimensions* // Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Boston: Birkhauser Boston, 1990.

[38] Nelson E. *Feynman Integrals and the Schrödinger Equation* // J. Math. Phys., 1964, V. 5, № 3, p. 332-343.

[39] Roepstorff G. *Path Integral Approach to Quantum Physics* // B.: Springer, 1994.

[40] Simon B. *Functional Integration and Quantum Physics* // NY: Acad. Press, 1979.

[41] Smolyanov O. G., Shavgulidze E. T. *The Feynman Formulas for Solving Infinite-Dimensional Schrödinger Equations with Polynomial Potentials* // Doklady Acad. Nauk, 2003, V. 67, p. 369—373.

[42] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. *Hamiltonian Feynman Path Integrals via the Chernoff Formula* // J. Math. Phys., 2002, V. 43, № 10, p. 5161—5171.

[43] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. von. *Change of measures and their logarithmic derivatives under smooth transformations* // C. R. Acad. Sci. Paris, 1995, t. 321, Serie I, p. 103—108.

[44] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. von. *Smooth Probability Measures and Associated Differential Operators* // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 1999, V. 2, p. 51—78.

[45] Smolyanov O. G., Weizsäcker H. von, Wittich O. *Construction of Diffusions on Sets of Mappings from an Interval to Compact Riemannian Manifolds* // Doklady Acad. Nauk, 2005, V. 71, p. 391—396.

[46] Trotter H. F. *On the Product of Semigroups of Operators* // Proc. Amer. Math. Soc., 1959, V. 10, p. 545—551.