

Хаотическая адвекция в двухслойном потоке над изолированной возвышенностью рельефа дна: роль частоты нестационарного возмущения*

К. В. Кошель, Д. В. Степанов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43
E-mail: kvkoshel@poi.dvo.ru

Получено 13 апреля 2006 г.

В работе рассматривается модель точечного топографического вихря в двухслойном квазигеострофическом потоке. Степень хаотизации фазового пространства в такой системе зависит от частоты нестационарного возмущения. С помощью численного моделирования показано, что зависимость степени хаотизации от частоты имеет ряд ярко выраженных экстремумов. Анализ частот оборота жидких частиц и частот соответствующих нелинейных резонансов позволил связать экстремумы указанной зависимости с исчезновением нелинейных резонансов из системы. Механизм исчезновения нелинейных резонансов с ростом частоты возмущения исследован с помощью сечений Пуанкаре.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, вихревые структуры, фазовый портрет, динамический хаос

K. V. Koshel, D. V. Stepanov

Chaotic advection in two layers flow above the isolated bottom obstacle: the role of unsteady-perturbation frequency

We consider a model of a point vortex in a two-layer quasi-geostrophic flow. In this model, the chaotization of the phase space strongly depends on the frequency of the external perturbation. Numerical experiments show that the degree of chaotization as a function of the perturbation frequency has a number of pronounced extrema. Upon examination of rotation frequencies of fluid particles and the corresponding non-linear resonances, we have found a strong connection between these extrema and disappearance of the non-linear resonances. This disappearance phenomenon has been studied using the Poincaré section technique.

Keywords: two-layer fluid, vortex structures, phase portrait, chaotic dynamics

Mathematical Subject Classifications: 37D45, 76U05, 76B47, 76E20

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ДВО РАН (гранты 06-05-96080, 06-I-П13-048).

1. Введение

Известно, что фундаментальным динамическим соотношением для невязкой однородной вращающейся жидкости является закон сохранения потенциального вихря [24], связывающий, в частности, генерацию относительной завихренности с неровностями дна. Многочисленные примеры квазистационарных топографических вихрей [6, 4], с которыми связаны ареалы обитания определенных биологических объектов, стимулируют рассмотрение реакции этих вихрей на нестационарные возмущения набегающего потока. Простейшие постановки задач для баротропных невязких моделей геофизической гидродинамики несложно сформулировать в рамках концепции фоновых течений в квазигеострофическом приближении [7, 8, 14]. Такие постановки позволяют при заданных форме бассейна, возмущения рельефа дна и расходах на границе представить динамически согласованную функцию тока $\psi(x, y, t)$ в замкнутом виде (в квадратурах), если предварительно построена соответствующая функция Грина краевой задачи для оператора Лапласа. При этом уравнения движения жидких частиц имеют гамильтонову форму

$$\dot{x} = u \equiv -\psi_y, \quad \dot{y} = v \equiv \psi_x, \quad (1.1)$$

с завихренностью поля скорости $\zeta = v_x - u_y \equiv \Delta\psi$.

В общем случае, согласно [7, 8, 14], верно представление

$$\psi = \psi_0(x, y) + \psi_s(x, y, t), \quad (1.2)$$

где первое слагаемое ψ_0 отвечает планетарно-топографической вихревой составляющей, а безвихревое проточное возмущение ψ_s обусловлено заданными расходами на границе. Для нестационарных потоков (1.2) представляет широкий класс моделей, проявляющих хаотические свойства [17, 9, 11, 10, 19, 20, 13, 21, 26, 25]. Опыт исследования хаотического переноса в баротропных моделях приведен в [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21].

Аналогичные модели можно построить и для бароклиной среды [7, 8, 14], при этом уравнения движения жидких частиц в слоях постоянной плотности также имеют гамильтонову форму (1.1).

Представляется интересным выяснить характер влияния бароклинности на Хаотическое перемешивание. Современный обзор исследований по хаотической адвекции в геофизических моделях дан в [26], а в работе [25] поставлен вопрос о зависимости степени хаотического перемешивания от частоты возмущения, однако удовлетворительного решения эта проблема не нашла до сих пор.

Целью нашей работы является исследование хаотического поведения траекторий жидких частиц в модели, аналогичной [13], однако в двухслойной постановке [7, 14]. Помимо исследования хаотического перемешивания в двухслойной модели, т.е. выяснения влияния бароклинности на хаотический транспорт, предпринимается также попытка определения влияния частоты изменения проточного течения на эффекты хаотической адвекции.

2. Формулировка модели

Рассмотрим движение пассивных маркеров в модельном поле скоростей, которое получим в квазигеострофическом приближении идеальной несжимаемой двухслойной жидкости на f -плоскости. В рамках концепции фоновых течений [7, 14] геострофические функции тока в слоях имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi' - (1-d)\psi'', \\ \psi_2 &= \psi' + d\psi'', \end{aligned} \quad (2.1)$$

где нижние индексы 1 и 2 относятся к верхнему и нижнему слоям соответственно, $d = H_1/H$ — относительная толщина верхнего слоя ($H = H_1 + H_2$), а баротропная и бароклинная функции тока ψ' и ψ'' удовлетворяют в заданной области D с границей ∂D уравнениям:

$$\begin{cases} \Delta\psi' = \frac{f}{H} (\langle h \rangle_0 - h), \\ \psi'|_{\partial D} = \psi'^{(b)}(l, t), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \Delta\psi'' - k^2\psi'' = \frac{f}{H_2} (\langle h \rangle_k - h), \\ \psi''|_{\partial D} = \psi''^{(b)}(l, t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь l — непрерывный параметр, определяющий положение точки на границе, $k = L_d^{-1} = f/\sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H}}$, $g' = g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2}$ — редуцированное ускорение силы тяжести, f — постоянный (по предположению) параметр Кориолиса, L_d — внутренний радиус деформации Россби [24], и введены операции взвешенного осреднения:

$$\langle F \rangle_p = \left(\int_D F \phi^{(p)} dD \right) \left(\int_D \phi^{(p)} dD \right)^{-1} \quad (2.4)$$

с весовой функцией, которая удовлетворяет уравнению:

$$\begin{cases} \Delta\phi^{(p)} - p^2\phi^{(p)} = 1, \\ \phi^{(p)}|_{\partial D} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $p = k$ для бароклинной компоненты (2.3) и $p = 0$ для баротропной компоненты (2.2).

Подставляя решения уравнений (2.2), (2.3) в (2.1) и полученное выражение для ψ_1 в (1.1), получаем выражения для уравнений движения пассивной примеси в верхнем слое.

В качестве конкретного примера рассмотрим неограниченный бассейн с δ — образной подводной возвышенностью $h(x, y) = \tau_\infty \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$ в прямолинейном баротропном набегающем потоке, где $\tau_\infty = \pi h/k^2$ — эффективный объем горы, h — эффективная высота горы а ξ и η координаты центра горы. Здесь мы предположили, что эффективный горизонтальный размер горы порядка радиуса деформации L_d . Полагая $\psi''^{(b)}(l, t) = 0$, для безвихревого проточного течения имеем [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21]

$$\psi_{s1}(x, y, t) = \psi' = -Uy.$$

Функция тока в верхнем слое жидкости для такого рельефа имеет вид:

$$\psi_1 = -Uy - \frac{\tau_\infty f}{H} \left[\ln \left(k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) + K_0 \left(k \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) \right],$$

где U — средняя скорость набегающего потока, K_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В дальнейшем индекс 1 у функции тока мы будем опускать, поскольку будем интересоваться только верхним слоем.

Переходя к безразмерным переменным с помощью соотношений

$$(x, y) = L_d (x', y'); (u, v, U) = U (u', v', W); \psi = L_d U \psi',$$

совмещая начало координат с центром горы и опуская штрихи, окончательно получаем

$$\psi = -W(t)y - \sigma(\ln r + K_0(r)), \quad (2.6)$$

где $\sigma = \frac{fL_d}{U} \frac{h}{H} = \frac{h}{RoH}$, Ro — число Россби и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Отметим, что в силу асимптотических свойств $K_0(r)$ в окрестности нуля, функция тока (2.6) имеет регулярный характер, в отличие от случая [13, 21] с сингулярной функцией тока. Приближение квазигеострофики требует выполнения условия $\frac{h}{H} = O(Ro)$, т.е. $\sigma \sim O(1)$. В (2.6) мы считаем скорость проточного течения $W(t)$ зависящей от времени [20, 12]. В дальнейшем для простоты будем считать $\sigma = 1$, тогда система уравнений движения жидких частиц (или пассивной примеси) (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = W(t) + \frac{y}{r} \left(\frac{1}{r} - K_1(r) \right) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{r} \left(\frac{1}{r} - K_1(r) \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Если $W(t) = W_0 = \text{const}$, система уравнений (2.7) является интегрируемой, а линии тока совпадают с траекториями движения частиц пассивной примеси [17, 22].

Картина линий тока, симметричная относительно оси $x = 0$ полностью определяется значением W_0 . При $W_0 > 0.4$ в потоке нет критических точек, а в случае $W_0 < 0.4$ их появляется две: одна эллиптическая, а другая гиперболическая рис. 1. Типичная картина линий тока представлена на рис. 2. Область течения состоит из *вихревой области* (ВО) с замкнутыми линиями тока вокруг эллиптической точки и *проточной области* (ПО) с линиями тока, уходящими на бесконечность. ВО и ПО разделены сепаратрисой — линией тока с самопересечением в гиперболической точке.

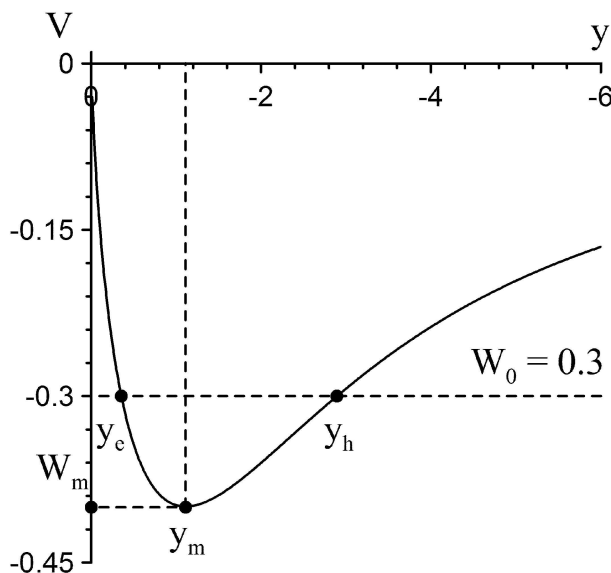


Рис. 1. Зависимость азимутальной топографической скорости от модуля координаты y при $x = 0$ и $y < 0$.

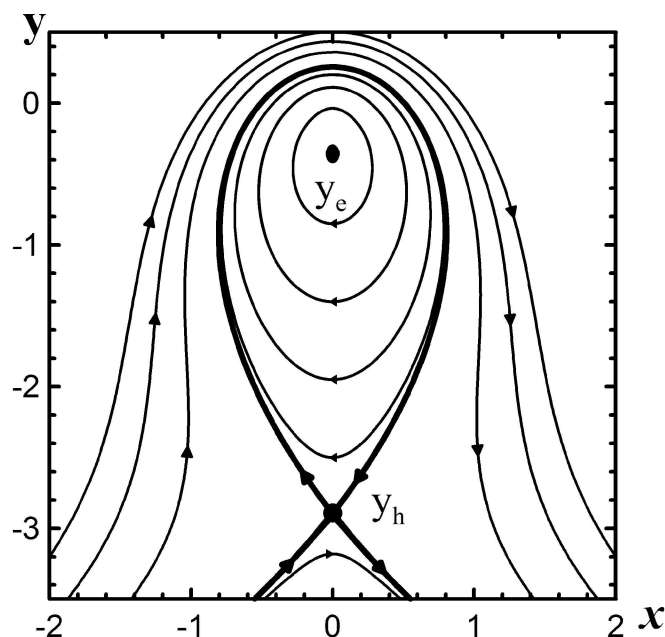


Рис. 2. Линии тока невозмущенной системы. Выделены сепаратриса, эллиптическая и гиперболическая точки.

В стационарном случае частица, находящаяся в начальный момент времени в ВО на определенной линии тока, будет оставаться на ней всегда [24, 17, 12], т. е. пассивные частицы, находящиеся в ВО не могут попасть в ПО.

С линией тока, находящейся в ВО и совпадающей с траекторией жидкой частицы в невозмущенном случае, можно связать такую характеристику как время оборота частицы вокруг эллиптической точки T . Зависимость соответствующей частоты оборота $\Omega(\rho) = 2\pi/T$ от расстояния между точкой пересечения соответствующей траектории ρ (в начальный момент времени) и эллиптической особой точкой представлена на рис. 3. Характер зависимости $\Omega(\rho)$ типичен для различных модельных полей скорости (сингулярных и регулярных) [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21, 2]: с приближением начального положения траектории к гиперболической точке период обращения стремится к бесконечности (соответственно $\Omega(\rho)$ стремится к нулю), а при приближении к эллиптической точке характер изменения $\Omega(\rho)$ для сингулярных и регулярных полей скорости существенно различен. В первом случае $\Omega(\rho)$ стремится к бесконечности, а во втором — к некоторой конечной величине [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21, 2].

Нетрудно получить частоту оборота жидкой частицы в малой окрестности эллиптической точки. Действительно, представим координаты в окрестности эллиптической точки в виде

$$\begin{aligned} x &= x_e + \sqrt{r_e/W_0} \rho \sin \varphi, \\ y &= y_e - \left(1/\sqrt{V'(r_e)}\right) \rho \cos \varphi, \end{aligned}$$

где $x_e = 0$, $y_e = r_e$ — координаты эллиптической точки, $V(r) = -(\frac{1}{r} - K_1(r))$ — азимутальная топографическая скорость, а ρ , φ полярные координаты с центром в эллиптической точке (угол φ отсчитывается против часовой стрелки от направленной вниз оси). Разлагая правые части (2.7) до членов первого порядка малости по ρ и учитывая, что в эллиптической точке $W_0 - V(r_e) = 0$,

получаем

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = 0, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{W_0 V'(r_e)}{r_e}}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Таким образом, в малой окрестности эллиптической точки имеем

$$\Omega(0) = \sqrt{\frac{W_0 V'(r_e)}{r_e}} = \sqrt{\frac{W_0(-W_0 + K_0(r_e)r_e)}{r_e^2}}. \quad (2.9)$$

3. Транспорт пассивной примеси в нестационарном потоке

Как было сказано выше, гамильтоновы системы вида (2.7), называемые иногда системами с 3/2 степенями свободы, в нестационарном случае допускают хаотическое поведение траекторий. Это приводит к тому, что частицы пассивной примеси могут покидать ВО ([17, 9]), т. е. появляется возможность транспорта пассивной примеси из ВО в ПО.

Для интегрирования возмущенной системы (2.7) использовался метод Булерша-Штерра с адаптивным шагом [16]. Он эффективен с точки зрения временных затрат и при этом обеспечивает достаточно высокую точность расчетов.

Набегающий поток задавался в виде:

$$W(t) = W_0(1 - \varepsilon \sin \omega t),$$

где W_0 — средняя скорость набегающего потока, ε — относительная амплитуда возмущения, а ω — частота возмущения. Во всех численных экспериментах выбирались следующие значения указанных выше параметров $W_0 = 0.3, \varepsilon = 0.1$, если не оговорены другие. Отметим, что при таких значениях параметров $r_e \approx 0.355$, а частота оборота жидких частиц в окрестности эллиптической точки по оценке (2.9) равна $\Omega(0) \approx 0.56290$, что соответствует значению, полученному численно рис. 3.

Для анализа хаотического транспорта из ВО в ПО распределим в начальный момент времени пятно из 8251 маркера, равномерно заполнив всю ВО. Рассчитывая соответствующие траектории движения и считая, что маркер, достигший контрольной полосы $|x| = 3$, покидает ВО, оценим степень выноса.

На рис. 4 представлена зависимость от времени доли вымытых маркеров от их общего числа $N(t)$ при различных значениях частоты возмущения. Процесс вымывания состоит из двух этапов: первый — быстрый, на котором вымывается большая часть маркеров и второй — предельный, на котором маркеры почти полностью прекращают покидать ВО. Характер кривых $N(t)$ при различных частотах возмущения говорит о качественной схожести процесса вымывания. Однако имеются частоты, при которых, наряду с быстрым этапом, можно выделить промежуточный этап вымывания маркеров. Он характеризуется наличием излома у зависимости $N(t)$. Этот эффект иллюстрирует эволюция доли вымытых маркеров от их общего числа при $\omega = 0.11$ (выделено на рис. 4 жирной линией и представлено на врезке в логарифмическом масштабе). Кроме того, установлено, что с ростом частоты возмущения скорость вымывания маркеров на начальном этапе уменьшается и, соответственно, увеличивается время достижения стационарного значения $N(t) = N_\infty$, после которого маркеры перестают покидать ВО.

На рис. 5 представлена зависимость предельной доли вымытых маркеров $N_\infty(\omega)$ от частоты возмущения. Наряду с наличием оптимальной частоты, при которой ВО покидает максимальное

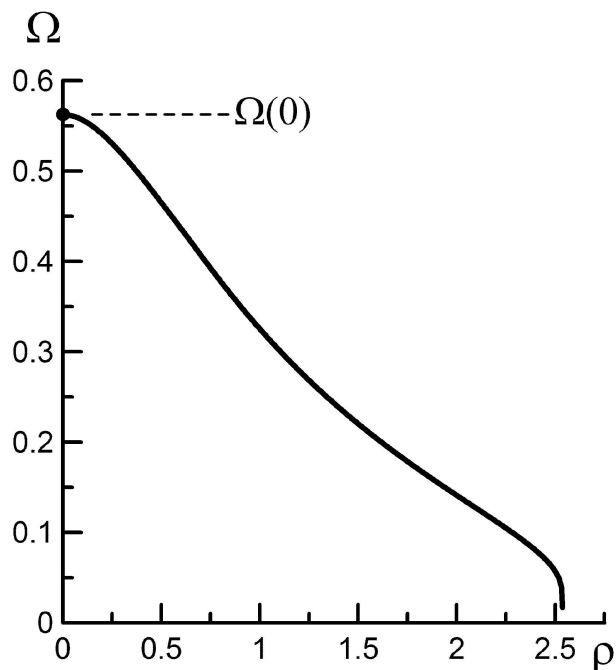


Рис. 3. Зависимость частоты оборота жидкой частицы от расстояния до эллиптической точки в невозмущенном случае.

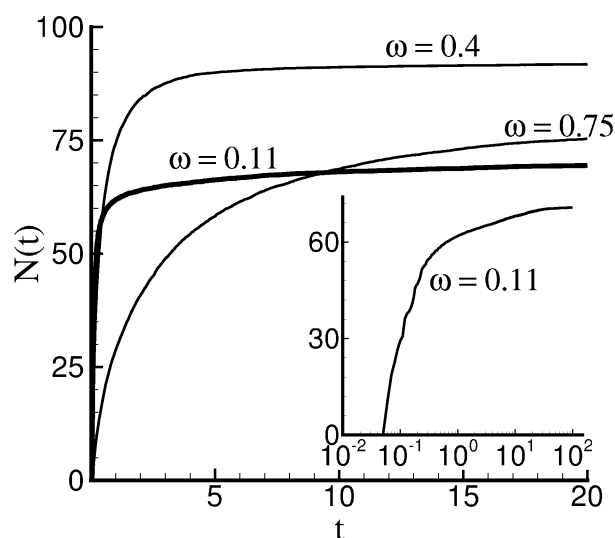


Рис. 4. Зависимость доли вынесенных из ВО маркеров от времени для указанных частот возмущения.

число маркеров, имеется несколько явно выраженных локальных экстремумов. Отметим, что подобное поведение $N_{\infty}(\omega)$ не было обнаружено ни в одной из ранее рассмотренных моделей [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21], т.е. ранее выделялся только один максимум степени хаотического перемешивания при оптимальной частоте.

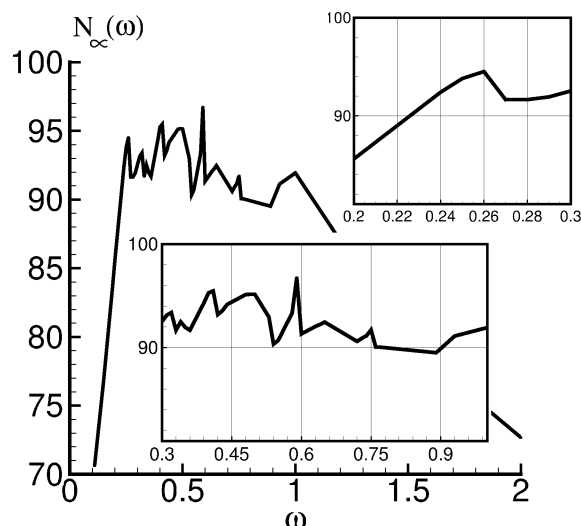


Рис. 5. Зависимость предельной доли вынесенных маркеров (в процентах от начального количества) от частоты возмущения.

Сравним значения частот возмущения, соответствующих локальным экстремумам степени выноса, с зависимостью частоты оборота жидкой частицы от расстояния между эллиптической точкой и точкой пересечения ее траектории с осью Oy ниже эллиптической точки невозмущенного потока рис. 3. Частоты возмущения, соответствующие экстремумам степени выноса, оказываются такими, что ближайший к центру вихря нелинейный резонанс, порождаемый таким возмущением, реализуется на частоте, близкой к максимальной частоте оборота жидких частиц, возможной в системе. Действительно, поскольку $\Omega(\rho)$ фактически определяется значением переменной-угол [22, 3] за период оборота жидкой частицы, а в окрестности эллиптической точки, в соответствии с (2.8), ρ есть переменная-действие [22, 3], справедливо следующее рассуждение. Нелинейные резонансы кратности $\frac{m}{n}$, где m и n целые числа [22, 3], при заданной частоте возмущения ω реализуются в окрестности невозмущенных траекторий с частотой оборота $\Omega(\rho) = \frac{m}{n}\omega$, т.е. на расстоянии ρ от эллиптической точки (в системе координат ρ, φ). Таким образом, с ростом частоты возмущения, в соответствие с зависимостью $\Omega(\rho)$ (см. рис. 3), нелинейные резонансы приближаются к эллиптической точке. Когда ближайший к эллиптической точке нелинейный резонанс подходит к ней на расстояние, равное его ширине по переменной ρ , которую в таком случае можно считать действием, его ширина начинает уменьшаться, не превосходя расстояния от его центра до эллиптической точки. При стремлении этого расстояния к нулю ($\omega \rightarrow \frac{n}{m}\Omega(0)$), резонанс исчезает. Конечно, только в достаточно грубом приближении предельную частоту оборота, реализующуюся в системе рис. 3 и (2.9), можно считать критической для ближайшего к эллиптической точке нелинейного резонанса. Действительно, перекрытие этого резонанса со следующими за ним [22, 3] начинает уменьшаться при его сужении по действию. Таким образом, критическая частота должна находиться между предельной и той, что отстоит от нее на ширину нелинейного резонанса по частоте. Однако, поскольку частотный интервал даже для резонанса $\omega = \Omega(\rho)$ невелик по сравнению с $\Omega(0)$, оценку критической частоты, как предельной частоты оборота, можно считать удовлетворительной, что подтверждается и численными расчетами.

Для анализа структуры фазового пространства возмущенной системы воспользуемся сечениями Пуанкаре. В силу открытости нашей системы сечениями Пуанкаре будем считать поло-

жения нескольких траекторий, выводимые при значениях времени $t = l2\pi/\omega$, где целочисленный параметр l меняется от единицы до того значения, после которого траектория покидает ВО. Представление траекторий на сечениях Пуанкаре мы будем называть орбитами. Известно [22, 3], что если отношение частоты оборота невозмущенной траектории к частоте внешнего возмущения есть число рациональное $\frac{\Omega(\rho)}{\omega} = \frac{m}{n}$, то она разрушается на n эллиптических и n гиперболических орбит. Таким образом, в окрестности орбиты с таким отношением частот, реализуется нелинейный резонанс кратности $\frac{m}{n}$, где m будем считать порядком резонанса, а n числом эллиптических точек или, что то же самое, числом островов устойчивости. На сечении Пуанкаре эллиптические и гиперболические орбиты представлены набором точек, число которых равно n , КАМ-торы представляют собой сплошные замкнутые линии, а канторы – линии с промежутками. Так как КАМ-торы являются непроходимыми барьерами для маркеров, а окрестности эллиптических орбит состоят из КАМ-торов, появляется возможность с помощью анализа структуры фазового пространства дать интерпретацию нехарактерной зависимости $N_\infty(\omega)$. Действительно, каждому нелинейному резонансу на сечениях Пуанкаре соответствует либо n островов устойчивости, если резонансы перекрываются слабо, либо эти острова устойчивости могут быть разрушены, и на их месте образуются области нерегулярного поведения, если мы имеем сильное перекрытие резонансов [22, 3]. Именно из областей нерегулярного поведения маркеры могут выноситься в ПО [9, 11, 10, 19, 20, 13, 21]. С ростом частоты возмущения ближайший к центру ВО нелинейный резонанс приближается к центральной области устойчивости и частично разрушает ее, тем самым площадь его окрестности с нерегулярным поведением увеличивается, и, соответственно, увеличивается степень выноса. После достижения частотой нелинейного резонанса критического значения (например, при $\frac{\Omega(0)}{\omega} = 2$ частота возмущения равна половине максимальной частоты оборота), этот нелинейный резонанс должен исчезать. При этом он перестанет разрушать центральную область устойчивости и следующий за ним остров устойчивости, что приведет к уменьшению площади нерегулярного поведения и степени выноса. Таким образом, получаем локальный минимум $N_\infty(\omega)$. С дальнейшим ростом частоты возмущения следующий нелинейный резонанс начнет приближаться к центру ВО, и ситуация повторится. Таким образом, предлагаемый механизм объясняет появление локальных максимумов и минимумов зависимости $N_\infty(\omega)$ и позволяет предсказать на каких частотах они реализуются. Последнее утверждение подтверждает таблица 1, в которой приведены частоты возмущения, соответствующие локальным экстремумам, и их отношение к критической частоте, показывающее кратность нелинейного резонанса, исчезающего на данной частоте возмущения.

Таблица 1. Резонансные частоты

ω	0.26	0.32	0.34	0.41	0.48	0.59	0.65	0.76	1.06
$\frac{\Omega(0)}{\omega}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	≈ 1	≈ 1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\approx \frac{1}{2}$

Предлагаемый механизм описывает изменения фазового портрета системы, определяющие степень выноса достаточно грубо. Для более детального анализа рассмотрим несколько сечений Пуанкаре.

Начнем с частоты возмущения $\omega = 0.11$, сечение Пуанкаре для которой представлено на рис. 6. Структура ВО состоит из *центральной области регулярного поведения* (ЦОРП) внутри которой находятся первичные резонансы: $\frac{5}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}$ (два острова устойчивости) и первичных резонансов меньшего порядка, находящихся вне последнего неразрушенного КАМ тора, т.е. вне

ЦОРП: $\frac{11}{3}$ и $\frac{3}{1}$. При столь малой частоте возмущения ближайшими к эллиптической точке оказываются резонансы, ширины которых недостаточно для разрушения ЦОРП, и они поглощаются центральной областью, т. е. оказываются внутри последнего неразрушенного КАМ-тора, окружающего ЦОРП. Резонанс $\frac{3}{1}$ окружен вторичным резонансом из пяти островов. ЦОРП представляет собой совокупность вложенных друг в друга инвариантных кривых – КАМ-торов с общим центром в эллиптической точке. Границей ЦОРП считаем последний неразрушенный КАМ-тор, ближайший к резонансу $\frac{7}{2}$. Такую же структуру имеют и окрестности эллиптических точек указанных выше резонансов. Остальные резонансы разрушены или настолько малы, что не видны. Таким образом, существуют две области из которых пассивная примесь не вымывается. Первая область состоит из ЦОРП, включившей резонансы вплоть до $\frac{7}{2}$, а вторая область представлена первичным резонансом $\frac{3}{1}$ и вторичным резонансом из пяти островов вокруг него (вклад резонанса $\frac{11}{3}$ несуществен посколькy с ростом n и m ширина резонансов уменьшается). Площади этих двух областей определяют транспорт пассивной примеси. Поскольку с ростом n и m ширина нелинейных резонансов уменьшается, критерий перекрытия резонансов начинает срабатывать только в окрестности резонанса $\frac{3}{1}$ и, тем самым, степень выноса при малых частотах возмущения определяется положением нелинейного резонанса, для которого начинает выполняться критерий Чирикова [22, 3, 18]. Дальше от ЦОРП находятся резонансы кратностей $\frac{2}{1}$ и $\frac{1}{1}$, ширина которых приводит к полному перекрытию, а последующие перекрываются в силу того, что расстояние между резонансами уменьшается с ростом их кратности. Отметим, что при столь малых частотах ситуация внутри ЦОРП очень напоминает случай сингулярных моделей полей скорости, в которых предельной частоты оборота не существует и нелинейные резонансы всегда поглощаются ЦОРП, т. е. окружаются КАМ-тором, приближаясь к эллиптической точке, но не исчезают из системы.

С ростом частоты возмущения центры резонансов с достаточно малым m эллиптические и гиперболические точки начинают приближаться к ЦОРП. Происходит процесс перекрытия резонансов и, как следствие, — разрушение КАМ-торов. Кроме того, в соответствии с оценками степени перекрытия из [22, 3, 18], с ростом частоты нелинейного резонанса за счет роста частоты возмущения при фиксированной кратности его ширина растет, что также приводит к увеличению степени перекрытия. При этом увеличиваются как площади областей с нерегулярным поведением траекторий, так и степень выноса частиц.

При $\omega = 0.12$ мы также имеем две области, оказывающие существенное влияние на транспорт примеси. Первая, состоит из ЦОРП с несколькими первичными резонансами, находящимися внутри ее внешнего КАМ-тора, а вторая из первичного резонанса $\frac{3}{1}$ и вторичных (слабо выраженных) резонансов вокруг него. Резонанс $\frac{5}{1}$ при этой частоте исчезает, поскольку его частота достигла критического значения (2.9). Процесс исчезновения резонанса рассмотрим ниже на примере более широких резонансов — с меньшим m . Отметим, что при малых частотах скорость выноса маркеров из областей нерегулярного поведения достаточно высока, поэтому такие области практически не заполнены на сечениях Пуанкаре (за исключением малых окрестностей островов устойчивости), в отличие от случаев более высоких частот возмущения.

Дальнейший рост частоты возмущения приводит к исчезновению резонансов $\frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{3}{1}$. Однако процесс исчезновения резонансов, указанных выше, так же как и для случая $\omega = 0.12$, протекает при наличии общего КАМ-тора. Таким образом, основное влияние на степень выноса

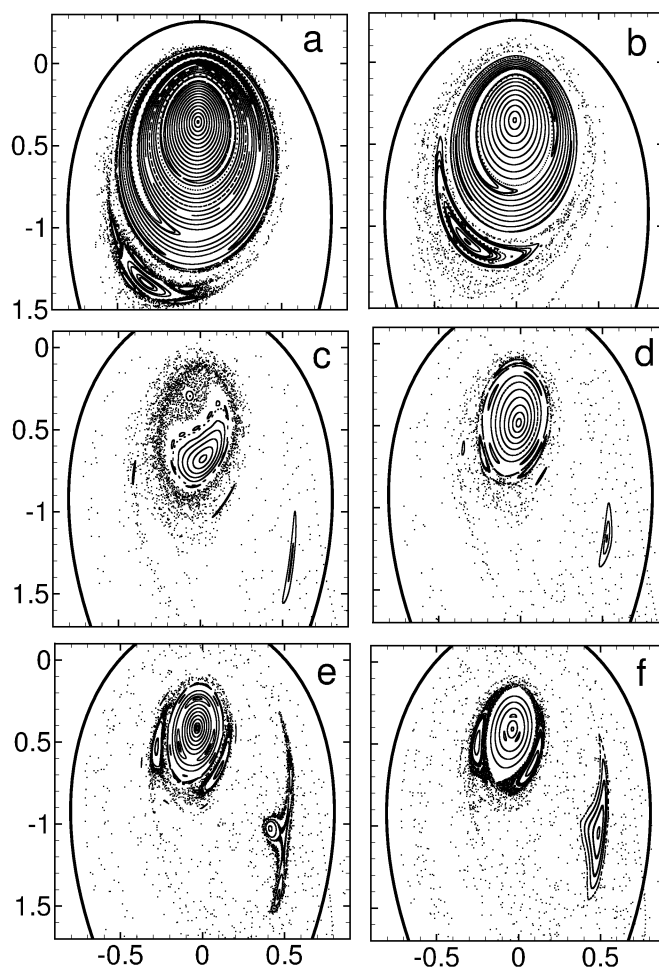


Рис. 6. Сечения Пуанкаре при частотах возмущения: а — 0.11; б — 0.12; в — 0.26; д — 0.29; е — 0.32; ф — 0.33.

продолжает оказывать ближайший к ЦОРП первичный резонанс, не окруженный КАМ-тором.

Рассмотрим структуру ВО при $\omega = 0.26 \approx \Omega(0)/2$, рис. 6. В этом случае ситуация меняется, поскольку к ЦОРП приближается нелинейный резонанс на частоте 2ω , который имеет ширину, сравнимую с ЦОРП. Очевидно, он полностью разрушает ее при дальнейшем увеличении частоты возмущения рис. 6. Уже при этой частоте возмущения площадь части ВО, содержащей маркеры с нерегулярным поведением, практически максимальна, поскольку, следующие за ближайшим к эллиптической точке нелинейные резонансы достаточно низких кратностей ($\frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ и т. д.), имеют значительную ширину и взаимно разрушаются, так что мы видим только очень маленькие остаточные острова устойчивости, соответствующие резонансам $\frac{3}{2}, \frac{1}{1}$. При этом существенно, что исчезновение резонанса $\frac{2}{1}$ происходит путем слияния его гиперболической точки с эллиптической точкой ЦОРП, а после исчезновения упомянутых особых точек резонанс становится ЦОРП с эллиптической точкой, смещенной относительно исходной рис. 6. Изменившееся положение центра ЦОРП приводит к тому, что наши оценки частот нелинейных резонансов и их положения в рамках теории возмущений, т. е. на основе анализа частот оборота невозмущенной системы рис. 3, становятся неприменимыми или, скорее, достаточно грубыми. По-видимому, в

этой ситуации вместо невозмущенной системы следует рассматривать некий эффективный гамильтониан, учитывающий влияние периодического возмущения в нулевом порядке. Однако нам пока не удастся построить такой гамильтониан, поэтому для дальнейшего анализа мы продолжим опираться на частоты оборота невозмущенной системы, осознавая, с одной стороны, качественный уровень такого анализа и учитывая, с другой стороны, что при достаточно больших частотах точность получаемых оценок будет возрастать [3, 18]. В момент исчезновения ЦОРП и возникновения новой, мы имеем локальный минимум при $\omega = 0.29$, поскольку следующий крупный нелинейный резонанс $\frac{1}{1}$, находится достаточно далеко от новой ЦОРП, а локальный максимум при $\omega = 0.26$ связан с максимальным перекрытием резонанса и ЦОРП. Таким образом, наряду с перекрытием резонансов на транспорт пассивной примеси начинает существенно влиять процесс исчезновения резонансов. Действуя одновременно, они приводят к наличию локальных экстремумов у зависимости $N_{\infty}(\omega)$. Локальные максимумы связаны с максимальным перекрытием резонансов, а локальные минимумы с исчезновением резонансов. Причем, поскольку с ростом частоты возмущения исчезают широкие резонансы малой кратности, то увеличивающееся влияние на транспорт начинают оказывать резонансы все более высоких порядков. Локальные максимумы и минимумы также могут быть следствием перекрытия и исчезновения вторичных резонансов, окружающих первичные. Например, локальный минимум при $\omega = 0.33$ связан с исчезновением вторичного резонанса из трех островов вокруг первичного резонанса $\frac{1}{1}$, который разрушает первичный резонанс при $\omega = 0.32$, а при $\omega = 0.36$ — с исчезновением первичного резонанса $\frac{3}{2}$ рис. 7, который поглощается ЦОРП, не разрушая ее полностью. Отметим, что разрушение ЦОРП в последнем случае происходит несколько иначе. Два острова устойчивости, соответствующие нелинейному резонансу $\frac{3}{2}$, и ЦОРП окружаются общим КАМ-тором, а с дальнейшим ростом частоты внутри него сливаются и исчезают эллиптическая точка ЦОРП, а также гиперболические и эллиптические точки нелинейного резонанса, после чего вся структура начинает играть роль ЦОРП рис. 7. При этом эллиптическая точка новой ЦОРП смещается к исходному положению эллиптической точки невозмущенной системы, т. е., по-видимому, вклад возмущения в нулевом порядке начинает уменьшаться. Таким образом, мы видим, что резонансы с $n > 1$ не могут разрушить ЦОРП, и, соответственно, сначала поглощаются ей, а потом исчезают из системы.

В дальнейшем картина усложняется. Локальный минимум при $\omega = 0.42$ связан не с исчезновением вторичного резонанса, а с появлением общего КАМ-тора, окружающего вторичный резонанс из пяти островов и первичный резонанс $\frac{1}{1}$ рис. 7. Хотя все же исчезновение и перекрытие резонансов довольно четко соответствует локальным экстремумам. Таким образом, описанный механизм имеет место и в окрестности крупных островов устойчивости, что согласуется с фрактальной структурой фазового пространства [1].

При дальнейшем росте частоты возмущения локальные минимумы все более отклоняются от значений, при которых происходит исчезновение резонансов. Это связано с тем, что нелинейный резонанс $\frac{1}{1}$ полностью разрушает ЦОРП, находясь достаточно далеко от нее. Таким образом, в области частот, отстоящих от критической на ширину нелинейного резонанса $\frac{1}{1}$, транспорт определяется окрестностью этого резонанса ($\omega = 0.46, 0.47$). Тем не менее, механизм образования локальных экстремумов работает и здесь. При $\omega = 0.54$ имеется локальный минимум, связанный с появлением общего КАМ-тора, окружающего нелинейный резонанс $\frac{1}{1}$ и вторичный резонанс $\frac{5}{4}$ рис. 8, т. е. вторичный резонанс поглощается первичным, так же как первичные погло-

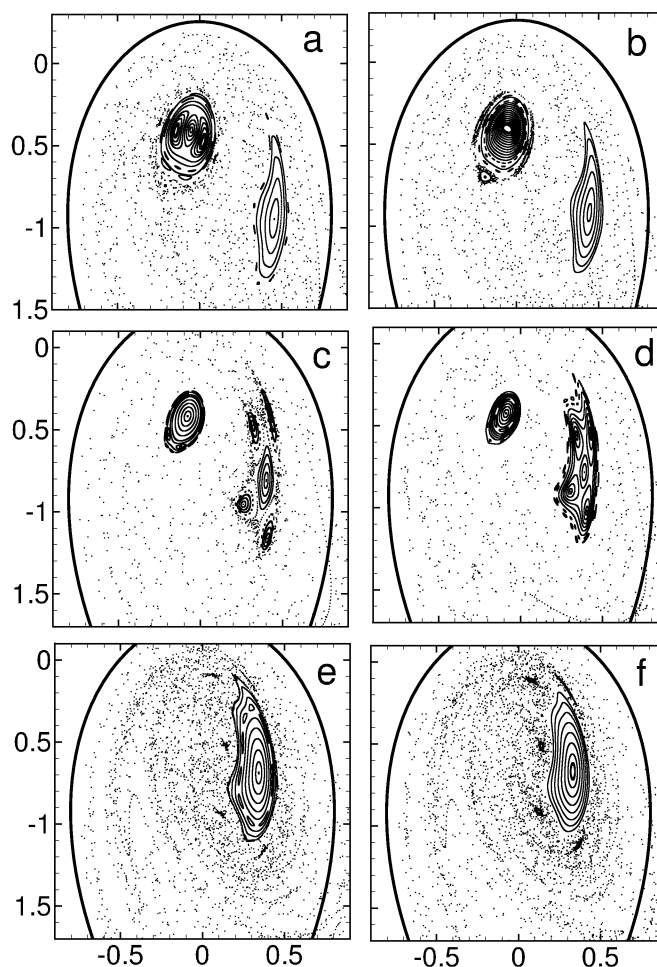


Рис. 7. Сечения Пуанкаре при частотах возмущения: а — 0.36; б — 0.37; в — 0.41; д — 0.42; е — 0.46; ф — 0.47.

щались ЦОРП. Рост числа вымытых маркеров при изменении частоты возмущения от $\omega = 0.54$ до $\omega = 0.59$ связан с ростом ширины резонансов с частотой и, соответственно, — с усилением перекрытия резонансов, а также с тем, что вторичный резонанс из четырех островов, окружающий первичный резонанс, шире поглощенного ранее резонанса из 5 островов, и поэтому он сильнее разрушает первичный резонанс. На этой частоте трудно различить, является ли остров устойчивости все еще первичным резонансом или уже начал играть роль ЦОРП, поскольку она полностью разрушена, и процесс слияния гиперболических и эллиптических точек наблюдать не удастся.

Еще одной характерной особенностью сечений Пуанкаре на частотах, близких к оптимальной, является хорошее заполнение области нерегулярности. Это связано с тем, что при этих частотах скорость выноса маркеров из вихревой области заметно уменьшается.

При $\omega = 0.59$ наблюдается глобальный экстремум. Он связан с исчезновением резонанса $\frac{1}{1}$ рис. 8. Действительно, в системе не остается ни одного резонанса первого порядка, который бы мог существенно повлиять на транспорт пассивной примеси. Поскольку ширина нелинейных резонансов обратно пропорциональна их порядку m и числу островов устойчивости n , суще-

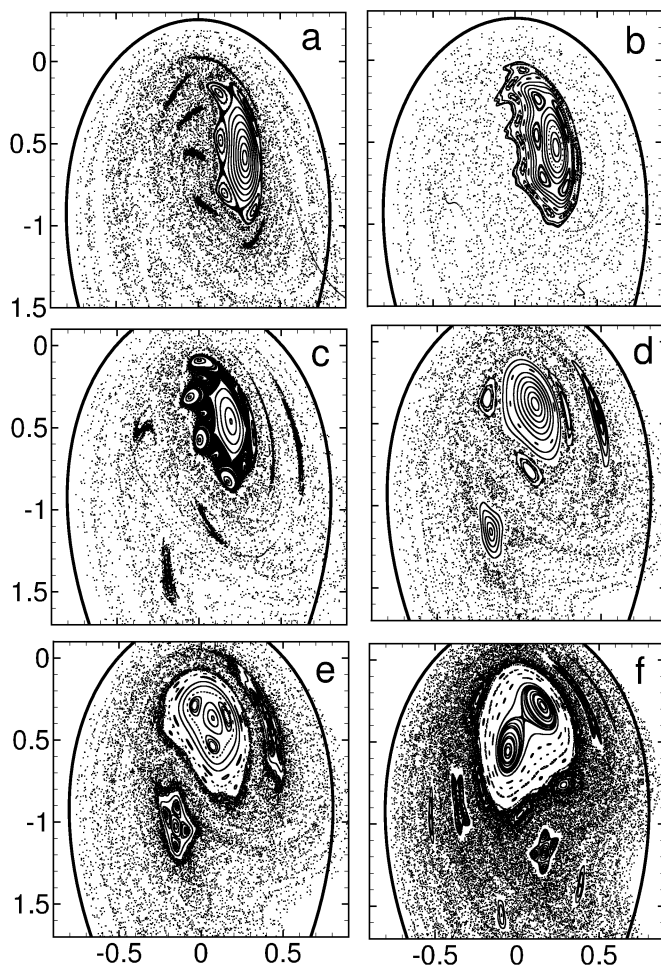


Рис. 8. Сечения Пуанкаре при частотах возмущения: а — 0.51; б — 0.54; с — 0.59; д — 0.72; е — 0.80; ф — 1.1.

ственное влияние на транспорт могут оказывать резонансы с $n = 1$ и, в меньшей степени, — с $n = 2$, что и наблюдается на зависимости $N_\infty(\omega)$ при $\omega > 0.59$. Несмотря на то, что процессы перекрытия и исчезновения резонансов приводят к локальным экстремумам, например, при $\omega = 0.6; 0.65; 0.72; 0.75$ зависимость $N_\infty(\omega)$ в целом начинает убывать, что подтверждается не только численным моделированием, но и оценками, полученными в работах [10, 23].

Существенно, что в данной модели только нелинейные резонансы $\frac{2}{1}$ и $\frac{1}{1}$ оказываются достаточно сильными, чтобы разрушить ЦОРП. Напомним, что и вторичный резонанс из трех островов практически полностью разрушал первичный резонанс $\frac{1}{1}$, в то время как резонанс из четырех островов уже не мог его разрушить. Таким образом, и это подтверждает зависимость рис. 5, можно говорить о плато между частотами возмущения $\omega = 0.26$, соответствующей приближению к ЦОРП резонанса $\frac{2}{1}$, и $\omega = 0.59$, соответствующей исчезновению резонанса $\frac{1}{1}$. В указанном интервале частот мы имеем максимальный хаотический транспорт. Вне этого интервала, транспорт определяется ближайшими к ЦОРП нелинейными резонансами либо с большим m ($\omega < 0.25$, $m > 2$, $n \geq 1$), либо с большим n ($\omega > 0.60$, $m = 1$, $n > 1$). Соответственно, степень выноса резко падает как с увеличением частоты возмущения, так и с ее уменьшением вне указанного

интервала, поскольку и с ростом частоты, и с ее уменьшением ширина существующих в системе нелинейных резонансов начинает резко уменьшаться рис. 8.

Механизм исчезновения нелинейного резонанса из двух островов иллюстрируется на сечениях Пуанкаре, соответствующих либо частоте $\omega = 0.72$, на которой к ЦОРП начинает приближаться резонанс $\frac{2}{3}$, либо частоте $\omega = 0.80$, на которой он поглощен ЦОРП, и видно, что процесс исчезновения происходит путем слияния гиперболических и эллиптических точек резонанса с эллиптической точкой ЦОРП и $\omega = 1.1$ рис. 8. Приближающийся к ЦОРП на частоте $\omega = 0.80$ резонанс $\frac{1}{2}$, в свою очередь, поглотил вторичный резонанс из четырех островов и сам поглотился ЦОРП на частоте, большей 1.1. Мы видим, что и в этом случае гиперболические точки нелинейного резонанса слились с эллиптической точкой ЦОРП, а в дальнейшем две эллиптические точки нелинейного резонанса, сближаясь, сольются с гиперболической точкой, образовав эллиптическую точку ЦОРП, в момент достижения частотой резонанса критического значения, которое не сильно отличается от удвоенного значения $\Omega(0)$.

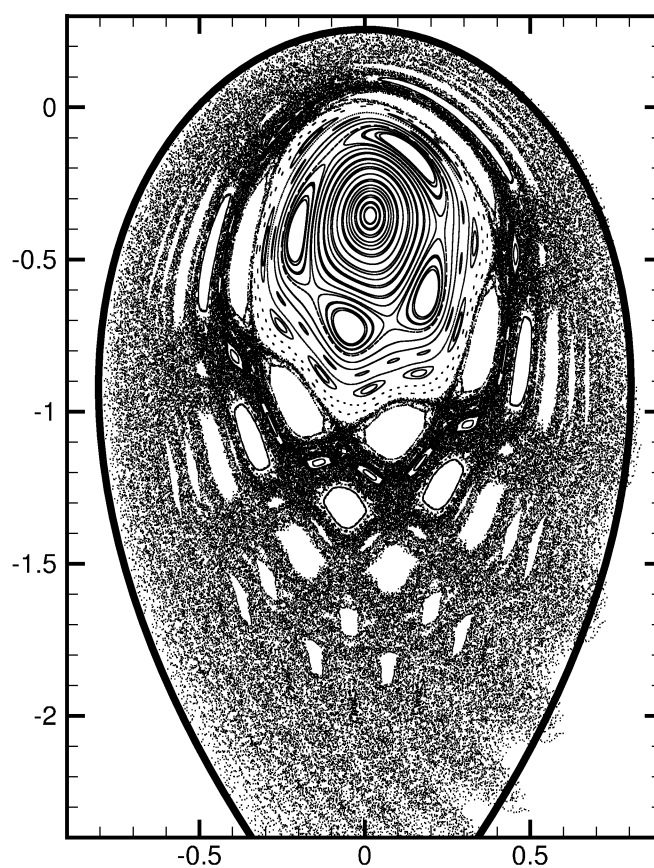


Рис. 9. Сечения Пуанкаре при частоте 2.0

И наконец, ситуация при частотах, значительно превосходящих оптимальную, проиллюстрирована на рис. 9. Как уже было показано выше, при столь высоких частотах в системе выживают нелинейные резонансы достаточно высоких кратностей и, соответственно, малой ширины. Степень перекрытия таких резонансов невелика, поскольку их ширина уменьшается с ростом n , а расстояние между ними $\Omega(\rho_1) - \Omega(\rho_2) = (\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2})\omega$ увеличивается с ростом ω . Соответствен-

но, расстояние от эллиптической точки на котором нелинейные резонансы перестают перекрываться, растет с частотой, что и видно на рис. 9. Таким образом, диаметр последнего неразрушенного КАМ-тора, окружающего эллиптическую точку, увеличивается и, кроме этого, возрастает число неразрушенных нелинейных резонансов вне этого КАМ-тора, что и приводит к уменьшению доли вымытых маркеров. При этом внутри области, из которой маркеры уже не вымываются, хаотическое перемешивание может быть заметным, в отличие от того, что наблюдается в случае малых частот.

4. Заключение

Таким образом, мы показали, что степень хаотического перемешивания в значительной степени определяется ближайшим к центру вихря выжившим нелинейным резонансом, что в свою очередь позволяет качественно определить частотную зависимость указанной характеристики, анализируя положение и ширину нелинейных резонансов в рамках теории возмущений, даже в окрестности оптимальной для хаотического перемешивания частоты и конечных возмущений. Плато указанной зависимости, соответствующее области частот возмущения, обеспечивающих максимальное хаотическое перемешивание, определяется достаточно надежно как окрестность максимальной частоты оборота (2.9) с шириной, примерно равной этой частоте, т.е. область оптимальных для хаоса частот можно оценить как интервал от $0.5\Omega(0)$ до $1.5\Omega(0)$. Существенно также, что первое равенство в (2.9) не зависит от конкретного вида азимутальной скорости, т.е. эта оценка применима и для других моделей с радиально симметричной азимутальной скоростью, которая определяется в случае топографических вихрей рельефом дна. Более того, в заметке [5] приведен анализ оптимальных частот для трех разных моделей, и во всех случаях получено приблизительное равенство оптимальной частоты и предельной частоты, т.е., учитывая физическую ясность механизма, объясняющего эту связь, можно считать ее в значительной степени универсальной.

Основной эффект бароклинности для хаотической адвекции заключается в наличии локальных экстремумов, которые хотя и были при тщательном анализе обнаружены в баротропных моделях [5], но выражены очень слабо и проявляются достаточно далеко от оптимальной частоты. Таким образом, установлено, что учет стратификации плотности приводит к увеличению расстояния между нелинейными резонансами и более селективному проявлению их вклада.

Полученные результаты представляются интересными для геофизических приложений. Действительно, при характерных размерных значениях радиуса вихря $R = 133$ км и средней скорости набегающего потока $U = 30$ см/с, оптимальная частота $\omega = 0.59$ соответствует колебаниям с месячным периодом со средней скоростью распространения приливной волны в 3 см/с. Это говорит о том, что долгопериодная составляющая прилива оказывает большое влияние на транспорт пассивной примеси, и, не смотря на меньшую амплитуду, должна учитываться при анализе в виду близости ее частоты к оптимальной. Отметим экспериментальные результаты [15]. В этой работе приведены снимки тропического циклона, на которых явно виден процесс разрушения ЦОРП нелинейным резонансом из пяти островов устойчивости.

Авторы признательны Израильскому Ю. Г. за полезные дискуссии. Авторы также признательны профессору [Вадиму Федоровичу Козлову], инициировавшему исследование хаотической адвекции в ТОИ ДВО РАН; предложенные им идеи явились мотивацией данной работы.

Список литературы

- [1] Будянский М. В., Улейский М. Ю., Пранц С. В. *Хаотическое рассеяние, транспорт и фракталы в простом гидродинамическом потоке* // ЖЭТФ, 2004, Т. 126, Вып. 5(11), с. 1167–1179.
- [2] Гледзер А. Е. *Захват и высвобождение массы в вихревых структурах океана* // Изв. РАН. ФАО, 1999, Т. 35, No 6, с. 838–845.
- [3] Заславский Г. М. *Стохастичность динамических систем*. Москва: Наука, 1984.
- [4] Зырянов В. Н. *Топографические вихри в динамике морских течений*. М.: ИВП РАН, 1995, 239 с.
- [5] Израильский Ю. Г., Кошель К. В., Степанов Д. В. // Принято к печати в Доклады РАН, 2006.
- [6] Козлов В. Ф. *Модели топографических вихрей в океане*. М.: Наука, 1983, 200 с.
- [7] Козлов В. Ф. *Фоновые течения в геофизической гидродинамике* // Изв. РАН. ФАО, 1995, Т. 31, No 2, с. 245–250.
- [8] Козлов В. Ф., Гурулев А. Ю. *О перемещении вихрей вдоль глубоководных желобов* // Метеорология и гидрология, 1994, No 6, с. 70–78.
- [9] Козлов В. Ф., Кошель К. В. *Баротропная модель хаотической адвекции в фоновых течениях* // Изв. РАН. ФАО, 1999, Т. 35, No 1, с. 137–144.
- [10] Козлов В. Ф., Кошель К. В. *Некоторые особенности хаотизации пульсирующего баротропного потока над осесимметричной подводной возвышенностью* // Изв. РАН. ФАО, 2001, Т. 37, No 3, с. 1–12.
- [11] Козлов В. Ф., Кошель К. В. *Об одной модели хаотического переноса в баротропном фоновом течении* // Известия АН. ФАО, 2000, Т. 36, No 1, с. 119–128.
- [12] Козлов В. Ф., Кошель К. В. *Хаотическая адвекция в моделях фоновых течений геофизической гидродинамик*. В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* (ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский). Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 469–502.
- [13] Козлов В. Ф., Кошель К. В., Степанов Д. В. *Влияние границы на хаотическую адвекцию в простейшей модели топографического вихря* // Изв. РАН. ФАО, 2005, Т. 41, No 2, с. 242–252.
- [14] Козлов В. Ф., Макаров В. Г. *Фоновые течения в Японском море (двухслойная квазигеострофическая модель)* // Океанология, 1996, Т. 36, No 4, с. 493–497.
- [15] Похил А. Э., Марголин А. Д. *О пятнах в глазе урагана* // Доклады РАН, 2006, Т. 406, No 3, с. 388–389.
- [16] Хол Дж., Уатт Дж. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Мир, 1979, 312 с.
- [17] Aref H. *Chaotic advection of fluid particles* // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1990, Vol. 333, No 1631, p. 73–288.
- [18] Chirikov B. V. *A universal instability of many-dimensional oscillator system* // Phys. Rep., 1979, Vol. 52, p. 263–379.
- [19] Izraily Yu. G., Kozlov V. F., Koshel K. V. *Some features of chaotization of a pulsating barotropic flow over a seamount with elliptic cross-section* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2003, Vol. 18, No 3, p. 243–260.
- [20] Izraily Yu. G., Kozlov V. F., Koshel K. V. *Some specific features of chaotization of the pulsating barotropic flow over elliptic and axisymmetric seamounts* // Phys. Fluids, 2004, Vol. 16, No 8, p. 3173–3190.

- [21] Koshel K. V., Stepanov D. V. *Some specific features of chaotization and transport in pulsating barotropic flow over a topographic vortex near boundary* // Regular and Chaotic Dynamics, 2004, Vol. 9, No 4, p. 439–450.
- [22] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. *Regular and stochastic motion* // Applied Math. Sciences, 38. Springer-Verlag. New York, 1983.
- [23] Neishtadt A. *The separation of motion in systems with rapidly rotating phase* // P.M.M. USSR, 1984, Vol. 48, p. 133.
- [24] Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*, 2-nd edition. NY.: Springer, 1987, 710 p.
- [25] Rom-Kedar V., Poje A.C. *Universal properties of chaotic transport in the presence of diffusion* // Phys. of Fluids, 1999, Vol. 11, No 8, p. 2044–2057.
- [26] Wiggins S. *The dynamical systems approach to Lagrangian transport in ocean flows* // Ann. Rev. Fluid Mech., 2005, Vol. 37, p. 295–328.