

Хаотическая адвекция в меандрирующем струйном потоке*

М. В. Будянский, С. В. Пранц, М. Ю. Улейский

Тихоокеанский океанологический институт имени В. И. Ильичева
690041, Россия, Владивосток, ул. Балтийская, 43
E-mail: prants@poi.dvo.ru

Получено 15 февраля 2006 г.

Исследуется транспорт, перемешивание и хаотическая адвекция пассивной примеси в меандрирующем струйном потоке с периодическим возмущением. Проведён анализ особых точек и их устойчивости. Установлены все топологически различные режимы потока и их бифуркации. Показано, что перемешивание пассивной примеси имеет фрактальный характер. Установлены некоторые геометрические закономерности в зависимостях числа оборотов частиц вокруг эллиптических точек и времени их вымывания из заданной области фазового пространства от начальных координат. Показано, как эти закономерности проявляются в эволюции материальной линии. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании лагранжева транспорта и перемешивания водных масс с различными характеристиками в меандрирующих западных пограничных течениях типа Курошио и Гольфстрима.

Ключевые слова: хаотическая адвекция, бифуркации, фрактал, меандр

M. V. Budyansky, S. V. Prants, M. Yu. Uleysky **Chaotic advection in a meandering jet flow**

The paper studies the transport, mixing and chaotic advection of passive scalars in a meandering jet flow with a periodic perturbation. The stability of the critical points has been performed. We have found all topologically different regimes of the flow along with their bifurcations. It is shown that the process of mixing of passive scalars exhibits fractal-like patterns. There are some geometric regularities in the relationship between 1) the initial coordinates of scalars and 2) the number of rotations of particles around elliptic points and their escape time from a particular domain in the phase-space. It is shown how these regularities manifest in the evolution of a material line. The results obtained may be used in modelling Lagrangian transport and mixing of water masses with different characteristics in meandering western boundary currents such as the Kuroshio and the Gulf Stream.

Keywords: Chaotic advection, bifurcation, fractal, meander
Mathematical Subject Classifications: 70K20, 70K50, 70K55

*Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-05-96032), Федеральной целевой программы «Мировой океан» (тема «Комплексные исследования процессов, характеристик и ресурсов дальневосточных морей России») и грантов Президиума Дальневосточного отделения РАН.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию транспорта, перемешивания и хаотической адвекции пассивной примеси в двумерном струйном потоке с периодическим возмущением. Форма стационарного потока и возмущения выбрана таким образом, чтобы моделировать меандрирующие струйные геофизические потоки типа западных пограничных течений в океане (яркие примеры которых — Гольфстрим в Атлантике и Куроисио в Тихом океане) и стратосферных струй в атмосфере. Однако, полученные результаты носят достаточно общий характер и могут быть использованы для интерпретации хаотической адвекции в широком классе двумерных сдвиговых потоков. Если адвектируемые частицы достаточно быстро принимают скорость потока (т. е. инерционные эффекты пренебрежимо малы) и не оказывают существенного влияния на свойства потока, то адвекция называется пассивной, а сами частицы — пассивными скалярами (примесями, трассерами или лагранжевыми частицами). Уравнение движения такой частицы очень простое

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — радиус-вектор частицы и её скорость в точке с координатами (x, y, z) . Эйлерово поле скоростей предполагается известным либо в результате решения уравнений динамики жидкости (динамический подход), либо благодаря каким-то кинематическим соображениям или в результате измерений. Динамика трассеров описывается, таким образом, системой нелинейных дифференциальных уравнений (1.1) с полностью детерминированной правой частью (эйлерово поле скоростей регулярно), фазовое пространство которой совпадает с физическим пространством адвектируемых частиц. Как хорошо известно из теории динамических систем, решения таких уравнений могут быть хаотическими в смысле экспоненциальной чувствительности к малым изменениям начальных условий и/или параметров. Динамический хаос не является экзотикой, он возникает даже в простых системах и наблюдается в многочисленных лабораторных экспериментах. В теории нелинейных динамических систем (по крайней мере, маломасштабных) хорошо изучены геометрические структуры, называемые инвариантными множествами, которые и определяют, главным образом, движение в фазовом пространстве. К таким относятся стационарные точки, различные аттракторы, в том числе, и странные, инвариантные торы, канторы, устойчивые и неустойчивые множества неустойчивых инвариантных множеств и проч. (см. обширную библиографию по теории хаоса в динамических системах, например, [9, 5, 4, 1]). В гидродинамике такие когерентные структуры естественно назвать лагранжевыми. Лагранжевы структуры определяют глобальное перемешивание в жидкости. В реальной жидкости вклад в общую картину перемешивания дают также молекулярная диффузия и разномасштабная турбулентность, однако в геофизических потоках хаотическая адвекция часто является наиболее эффективным механизмом перемешивания. Лагранжевы структуры состоят из жидких элементов, и поэтому не видны глазом на картах нестационарных течений, измеренных тем или иным способом. В лабораторных экспериментах их можно визуализировать с помощью красителя. В океане это можно, в принципе, сделать с помощью дрейфтеров и буев нейтральной плавучести, а в атмосфере — с помощью баллонов и зондов. Теория динамических систем может подсказать, где и когда следует запускать буи и баллоны, чтобы получить максимум существенной информации о лагранжевой структуре потока с минимальным их количеством.

Из теории динамических систем следует, что в случае стационарного течения двумерного потока любой степени сложности ур. (1.1) интегрируемы, траектории элементов жидкости совпадают с линиями тока Ψ , материальные линии растягиваются (если растягиваются) пропорционально t . Даже простые временные зависимости потока (периодичность или квазипериодич-

ность) могут привести к кардинальным переменам: возникновению перемешивания и хаоса, экспоненциальному растягиванию материальных линий со временем и проч. Трёхмерные стационарные потоки не могут быть, вообще говоря, записаны в гамильтоновой форме, что не мешает им быть хаотическими. Более того, именно для специального класса стационарных трёхмерных течений (так называемых АВС-потоков) В. Арнольд впервые предположил возможность хаоса линий тока, а стало быть и траекторий [14, 21]. На важные последствия перемешивания для геофизических потоков указывали ещё Эскарт [20] и Веландер [30] более 50 лет назад. В последней работе уже использовались идеи фрактальной геометрии (без употребления самого термина) для объяснения того, как длина перемешивающейся материальной линии может стремиться к бесконечности при конечной площади замыкания. Хаотическое перемешивание в жидкости принято называть хаотической адвекцией [12, 13] (иногда, употребляется термин лагранжева турбулентность).

Для плоских несжимаемых потоков компоненты скорости, как известно [8], находятся с помощью функции тока

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения адвекции (1.1) теперь принимают форму уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

с функцией тока $\Psi(x, y, t)$, играющей роль гамильтониана. Координаты частицы на плоскости x и y являются канонически сопряжёнными переменными, а фазовое пространство ур. (1.3) — конфигурационным пространством. Таким образом, двумерная адвекция в несжимаемой жидкости эквивалентна гамильтоновой динамике системы с полутора степенями свободы в нестационарном случае или с одной степенью свободы в стационарном. Поскольку гамильтонова природа адвекции следует из условия несжимаемости, то вышесказанное справедливо и для вязких двумерных потоков.

Как впервые заметил Пуанкаре [11], в типичной ситуации в гамильтоновых системах при сколь угодно малом возмущении происходит расщепление сепаратрис, препятствующее интегрируемости возмущённой системы. Более того, устойчивые и неустойчивые многообразия седловой точки (через которую проходит невозмущённая сепаратриса) трансверсально пересекаются и, как следствие, возникает стохастический слой в окрестности невозмущённой сепаратрисы. Возникновение стохастического слоя в неинтегрируемых гамильтоновых системах — универсальное явление. Именно он является зародышем хаоса. Что касается плоских течений однородной идеальной жидкости, то В. Козловым [6, 7] доказан факт расщепления и трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий для почти любого синусоидального возмущения при условии, что невозмущённая сепаратриса не лежит на прямой. Расщепление сепаратрисы приводит к важным последствиям для геофизических потоков, т. к. в результате разрушается непроницаемый барьер и появляется возможность транспорта пассивных примесей между прежде (в невозмущённом потоке) не пересекающимися областями потока. Количественные оценки мгновенных и средних потоков между этими областями и скоростей обмена можно получить с помощью так называемого интеграла Мельникова [10], который характеризует мгновенное расстояние между расщеплёнными сепаратрисами и ширину стохастического слоя.

В типичных гамильтоновых системах перемешивание частиц жидкости неоднородно [24, 4]. В случае хаотической адвекции на плоскости это означает, что существуют области пространства (так называемые «острова»), в которых движение жидкости регулярно. Как правило, имеется иерархия «островов»: большие «острова» окружены цепочками малых «островов», те, в свою очередь, ещё меньшими и так (в теории) до бесконечности. «Острова» погружены в «море» хаоса, где движение элементов жидкости (или пассивных частиц) неупорядоченное. Частицы не могут пересекать границы «островов» ни снаружи, ни изнутри, т. е. эти границы образуют барьеры, непроницаемые для транспорта частиц. Вблизи внешних границ «островов» имеются так называемые зоны «прилипания», в которых частицы могут надолго застревать, что существенно изменяет статистические свойства транспорта. Например, рост дисперсии координат частицы пропорционален не t (как в случае нормальной диффузии), а t^μ , где транспортная экспонента μ может быть как меньше 1 (субдиффузия), так и больше 1 (супердиффузия). Все эти динамические признаки хаотической адвекции обусловлены определёнными геометрическими структурами, а именно, инвариантными многообразиями.

2. Постановка задачи и вывод уравнений движения

В контексте геофизической гидродинамики транспорт и перемешивание пассивных примесей исследовались теоретически на примерах различных модельных потоков (см. работы [29, 19, 26, 23] и цитированную там литературу) и экспериментально (лабораторные прототипы геострофического струйного течения с волнами Россби [28]). В качестве примитивной кинематической модели струйного течения в океане рассмотрим симметричный сдвиговый двумерный поток с профилем скорости $u = u_0 \operatorname{sech}^2 y$, так называемую струю Бикли. Соответствующая функция тока содержит гиперболический тангенс, аргумент которого модулирован зональной бегущей волной в направлении с запада на восток [15, 27]. Исходная функция тока имеет в лабораторной системе отсчёта вид

$$\psi'(x', y', t) = -\psi_0 \operatorname{th} \left(\frac{y' - a \cos k(x' - ct)}{\lambda \sqrt{1 + k^2 a^2 \sin^2 k(x' - ct)}} \right), \quad (2.1)$$

где a , k и c — амплитуда, волновое число и фазовая скорость меандра, соответственно, λ — характерная ширина струи. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi'(x', t) &= k(x' - ct), & q'(x', y', t) &= y' - a \cos \varphi'(x', t), & p'(x', t) &= 1 + k^2 a^2 \sin^2 \varphi'(x', t), \\ \theta'(x', y', t) &= \frac{q'(x', y', t)}{\lambda \sqrt{p'(x', t)}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Краткая запись (2.1) с учётом (2.2) имеет вид

$$\psi' = -\psi_0 \operatorname{th} \theta'. \quad (2.3)$$

Уравнения движения (1.3) пассивной примеси в таком потоке выводятся после ряда дифференцирований

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\psi_0}{\operatorname{ch}^2 \theta'} \frac{1}{\lambda \sqrt{p'}} \frac{\partial q'}{\partial y'} = \frac{\psi_0}{\lambda \sqrt{p'} \operatorname{ch}^2 \theta'} \quad (2.4)$$

и

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{ak\psi_0 \sin \varphi' (1 + a^2 k^2 - ak^2 y' \cos \varphi')}{\lambda p'^{3/2} \operatorname{ch}^2 \theta'}. \quad (2.5)$$

Переходя в систему координат, движущуюся с фазовой скоростью меандра c , вводя нормировки

$$x = k(x' - ct), \quad x' = \frac{x}{k} + ct, \quad y = ky', \quad y' = \frac{y}{k}, \quad \tau = \psi_0 k^2 t, \quad t = \frac{\tau}{\psi_0 k^2} \quad (2.6)$$

и обозначения

$$A = ak, \quad L = \lambda k, \quad C = \frac{c}{\psi_0 k}, \quad (2.7)$$

получим уравнения адвекции в движущейся системе координат

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{L\sqrt{1 + A^2 \sin^2 x} \operatorname{ch}^2 \theta} - C, \\ \dot{y} &= -\frac{A \sin x (1 + A^2 - Ay \cos x)}{L(1 + A^2 \sin^2 x)^{3/2} \operatorname{ch}^2 \theta}, \end{aligned} \quad \theta = \frac{y - A \cos x}{L\sqrt{1 + A^2 \sin^2 x}}. \quad (2.8)$$

Соответствующая функция тока для системы (2.8)

$$\psi(x, y) = -\operatorname{th} \left(\frac{y - A \cos x}{L\sqrt{1 + A^2 \sin^2 x}} \right) + Cy \quad (2.9)$$

имеет три безразмерных управляющих параметра: L , A и C — ширина струи, амплитуда меандра и его фазовая скорость. Выбранная нормировка порождает трансляционную инвариантность фазового портрета вдоль оси x с периодом 2π .

3. Анализ бифуркаций

Как видно из первого уравнения системы (2.8), особые точки могут существовать только при условии

$$LC \leq 1. \quad (3.1)$$

Из второго уравнения системы (2.8) получаем два условия на стационарные точки:

$$\sin x = 0, \quad (3.2)$$

$$1 + A^2 - Ay \cos x = 0. \quad (3.3)$$

Из первого условия получаем значение $x = 0$ или $x = \pi$. Подставляя его в уравнение для \dot{y} и приравнявая правую часть нулю, находим четыре стационарные точки:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 0, \\ y_1 &= L \operatorname{Arcosh} \sqrt{\frac{1}{LC}} + A, & y_2 &= -L \operatorname{Arcosh} \sqrt{\frac{1}{LC}} + A, \\ x_3 &= \pi, & x_4 &= \pi, \\ y_3 &= L \operatorname{Arcosh} \sqrt{\frac{1}{LC}} - A, & y_4 &= -L \operatorname{Arcosh} \sqrt{\frac{1}{LC}} - A. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Анализ стабильности показывает, что вторая и третья точки устойчивы всегда, а первая и четвертая устойчивы при условии

$$AL \operatorname{Arcosh} \sqrt{\frac{1}{LC}} > 1. \quad (3.5)$$

Разберём подробнее условие (3.3). Выразив из него y , подставив его в уравнение для \dot{x} и сделав замену $z = \cos x$, получаем следующее уравнение для z

$$f(z) = C, \quad f(z) = \frac{1}{L\sqrt{1+A^2(1-z^2)}\operatorname{ch}^2\theta}, \quad \theta = \frac{\sqrt{1+A^2(1-z^2)}}{ALz}, \quad (3.6)$$

где $f(z)$ — чётная функция, определённая на интервале $z \in [-1 : 1]$, с особенностью в точке $z = 0$, причём $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$. Анализируя производную $f'(z)$ можно показать, что $f(z)$ строго возрастает на полуинтервале $z \in (0 : 1]$ и строго убывает на полуинтервале $z \in [-1 : 0)$. Отсюда следует, что при выполнении условия

$$C < f(\pm 1) = \frac{1}{L\operatorname{ch}^2(1/AL)} \quad (3.7)$$

существует два решения уравнения (3.6), симметричных относительно нуля. Нетрудно убедиться, что условие (3.7) совпадает с условием (3.5). Таким образом, при выполнении условия (3.7) в системе (2.8) возникают в дополнение к точкам (3.4) ещё четыре стационарных точки:

$$\begin{aligned} x_5 &= \arccos z_0, & x_6 &= 2\pi - \arccos z_0, \\ y_5 &= \frac{1+A^2}{Az_0}, & y_6 &= \frac{1+A^2}{Az_0}, \\ x_7 &= \pi - \arccos z_0, & x_8 &= \pi + \arccos z_0, \\ y_7 &= -\frac{1+A^2}{Az_0}, & y_8 &= -\frac{1+A^2}{Az_0}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где z_0 — положительное решение уравнения (3.6). Анализ стабильности показывает, что эти точки всегда неустойчивы.

Таким образом, с точки зрения существования и стабильности особых точек имеется три режима:

1. $C > C_{\text{cr1}} = 1/L$. Особых точек нет.
2. $C_{\text{cr1}} > C > C_{\text{cr2}} = \frac{1}{L\operatorname{ch}^2(1/AL)}$. Существует четыре особых точки (3.4): два центра (вторая и третья точки) и два седла (первая и четвёртая точки). Существует две сепаратрисы, проходящие через первую и четвёртую точки, соответственно.
3. $C_{\text{cr2}} > C$. Существует восемь особых точек: четыре центра (3.4) и четыре седла (3.8). Существует две сепаратрисы. Первая проходит через пятую и шестую точки, вторая — через седьмую и восьмую.

Бифуркация между первым и вторым режимами заключается в возникновении двух пар седло-центр. Бифуркация между вторым и третьим режимами заключается в возникновении на месте неустойчивого седла пары седел и центра между ними (бифуркация типа вилки). Зависимость второй критической фазовой скорости C_{cr2} от безразмерной амплитуды меандра A и характерной ширины струи L приведена на рис. 1а. Однако, возможна ещё одна бифуркация, приводящая к изменению топологии фазового портрета, но не затрагивающая особых точек. Нетрудно убедиться, что значения функции тока (2.9) на сепаратрисах равны по модулю, но противоположны по знаку. Можно показать, что функция тока для сепаратрисы, проходящей через точки с $y > 0$

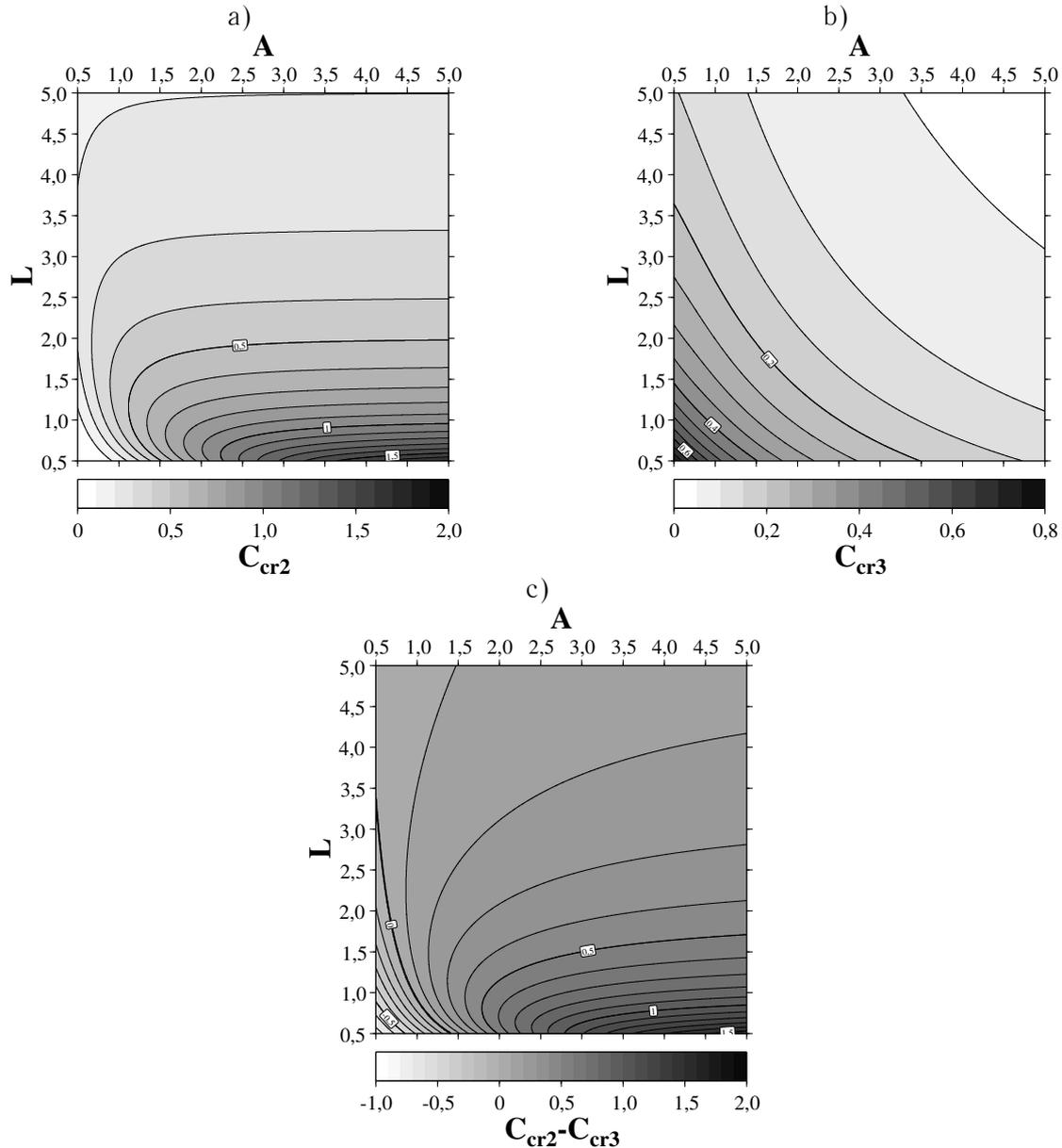


Рис. 1. а) Зависимость второй критической фазовой скорости C_{cr2} от безразмерной амплитуды меандра A и характерной ширины струи L ; б) то же для третьей критической фазовой скорости $C_{cr3}(A, L)$; в) то же для разности скоростей $C_{cr2}(A, L) - C_{cr3}(A, L)$.

меняется непрерывно от отрицательного значения (-1) при $C \rightarrow 0$, до положительного (AC) при $C = C_{cr1}$. Функция тока для второй сепаратрисы меняется, соответственно, от 1 до $-AC$. Существует некоторое критическое значение $C = C_{cr3}$ при котором функция тока на обеих сепаратрисах равна нулю и сепаратрисы совпадают. При $C > C = C_{cr3}$ на фазовом портрете свободное течение между сепаратрисами направлено с востока на запад, а при $C < C = C_{cr3}$ — с запада на восток. $C = C_{cr3}$ сложно найти аналитически, однако можно показать, что $C_{cr3} > C_{cr2}$, если выполняется условие

$$2(1 + A^2)[AL \operatorname{sh}(2/AL)]^{-1} < 1. \quad (3.9)$$

В противном случае $C_{cr3} < C_{cr2}$. Зависимость третьей критической фазовой скорости C_{cr3} от параметров A и L приведена на рис. 1б. На рис. 1с приведена зависимость разности C_{cr2} и C_{cr3} .

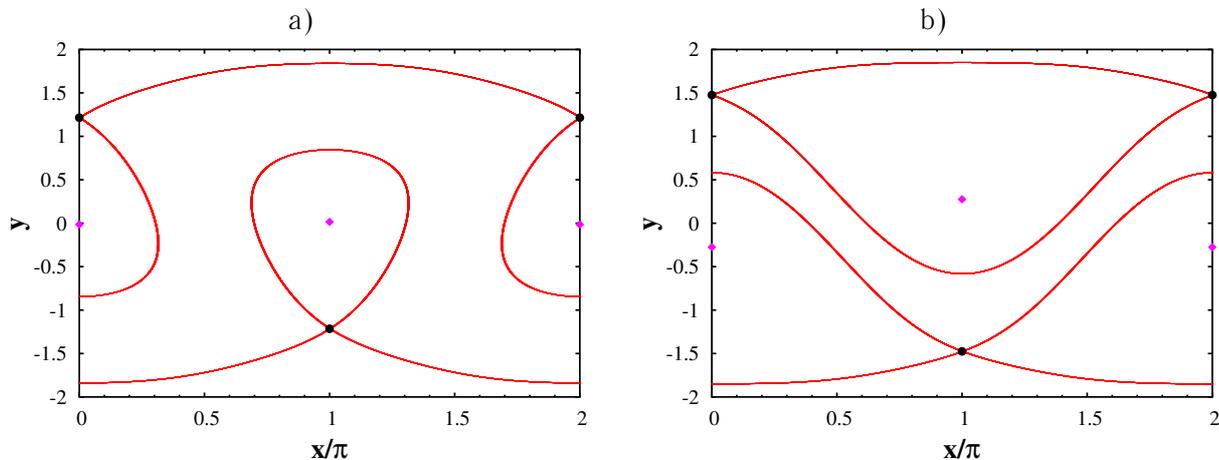


Рис. 2. Фазовые портреты с четырьмя особыми точками: а) гомоклиническое соединение со струёй восток-запад $A = 0,6, L = 1,0, C = 0,7$; б) гетероклиническое соединение со струёй запад-восток $A = 0,6, L = 0,7, C = 0,4$.

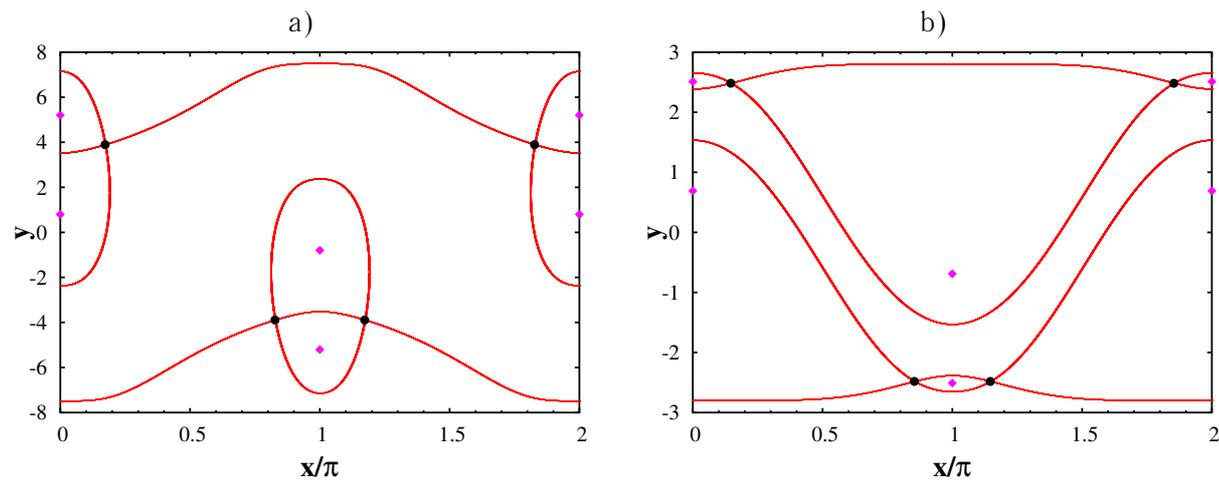


Рис. 3. Фазовые портреты с восемью особыми точками: а) струя восток-запад $A = 3,0, L = 2,5, C = 0,3$; б) струя запад-восток $A = 1,6, L = 0,5, C = 0,2$.

Итоговый список топологически различных режимов динамики системы выглядит следующим образом:

1. $C > C_{cr1}$. Особых точек нет.
- 2а. $C_{cr1} > C > C_{cr2}$ и $C > C_{cr3}$. Существует четыре особых точки (3.4): два центра (вторая и третья точки) и два седла (первая и четвёртая точки). Существует две сепаратрисы, проходящие через первую и четвёртую точки, соответственно. Свободный поток между сепаратрисами направлен с востока на запад (см. рис. 2а).
- 2б. $C_{cr1} > C > C_{cr2}$ и $C < C_{cr3}$. Особые точки те же, что и в предыдущем случае, но свободный поток между сепаратрисами направлен с запада на восток (см. рис. 2б).

- 3а. $C_{cr2} > C > C_{cr3}$. Существует восемь особых точек: четыре центра (3.4) и четыре седла (3.8). Существует две сепаратрисы. Первая проходит через пятую и шестую точки, вторая — через седьмую и восьмую. Свободный поток между сепаратрисами направлен с востока на запад (см. рис. 3а).
- 3б. $C_{cr2} > C$ и $C < C_{cr3}$. Особые точки те же, что и в предыдущем случае, но свободный поток между сепаратрисами направлен с запада на восток (см. рис. 3б).

Возможные бифуркации: 1 – 2а ($C = C_{cr1}$), 2а – 2б ($C = C_{cr3} > C_{cr2}$), 2а – 3а ($C = C_{cr2} > C_{cr3}$), 2б – 3б ($C = C_{cr2} < C_{cr3}$), 3а – 3б ($C = C_{cr3} < C_{cr2}$), и, наконец, 2а – 2б – 3а – 3б ($C = C_{cr2} = C_{cr3}$). Фазовые портреты, соответствующие этим бифуркациям, приведены на рис. 4. На всех рисунках эллиптические точки помечены ромбиками, а гиперболические — кружками.

Полученные нами фазовые портреты и их бифуркации типичны для гамильтоновых систем с бегущими волнами в симметричных сдвиговых потоках [19]. В зависимости от соотношений параметров мы видим гомоклиническое соединение (рис. 2а), гетероклиническое соединение (рис. 2б) и восоединение сепаратрис [22] (рис. 4с).

4. Фрактальная геометрия перемешивания

Из возможных топологических портретов двумерного потока с функцией тока в движущейся системе координат (2.9) выберем изображённый на рис. 2б, который описывает в общих чертах меандрирующее западное пограничное струйное течение типа Гольфстрима и Куро시오. На рис. 5а показаны некоторые траектории частиц в лабораторной системе координат для этой топологии. Так как Ψ в неподвижной системе зависит от времени, то частицы могут пересекать линии тока. В движущейся системе $\Psi = \text{const}$, и траектории частиц жидкости совпадают с линиями тока, изображёнными на рис. 5б. Налицо три различных области потока: центральная струя в восточном направлении (область J), замкнутые циркуляции к северу и югу от неё (области C) и периферийные западные течения (области P). Центры циркуляций расположены на двух критических линиях потока, определяемых условием $u(y_c) = c$ и $v(y_c) = 0$. Эти области отделены друг от друга сепаратрисами, соединяющими седловые точки равновесия, и, следовательно, никакой обмен между ними невозможен. Эти структуры, разумеется, исчезают в лабораторной системе отсчёта. Траектории адвектируемых частиц в лабораторной системе существенно различны. Частицы, запущенные вначале в области центральной струи, двигаются на восток вместе с ней. Частицы, запущенные в области перекрытия центральной струи с одной из зон циркуляции, движутся вниз по течению значительно медленнее.

Сколько угодно малое нестационарное возмущение потока (типа $A = A_0 + \varepsilon \sin(\omega t + \varphi)$) приводит (как правило) к расщеплению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек. В окрестности каждой из них возникает стохастический слой, с хаотическим перемешиванием и транспортом водных масс с величинами потоков, зависящими от многих факторов (ширины стохастического слоя, количества перекрывающихся и неперекрывающихся основных резонансов и т. д.). На рис. 5с изображено сечение Пуанкаре меандрирующего течения с периодически модулированной амплитудой меандра ($A = 0,785$, $C = 0,1168$, $L = 0,628$, $\varepsilon = 0,0785$, $\omega = 0,117$ и $\varphi = \pi/2$). Поскольку амплитуда возмущения сравнительно мала (10 процентов амплитуды меандра), то разрушены только самые внешние КАМ-торы областей циркуляции, где и возможно слабое хаотическое перемешивание. Множество островов внутри областей циркуляции отвечает множеству резонансов периодического возмущения с движением частиц в этих областях. С увеличением ε все большее число инвариантных торов разрушается, площадь хаотического «моря» увеличивается, в нем возникают «острова» регулярного движения с зонами

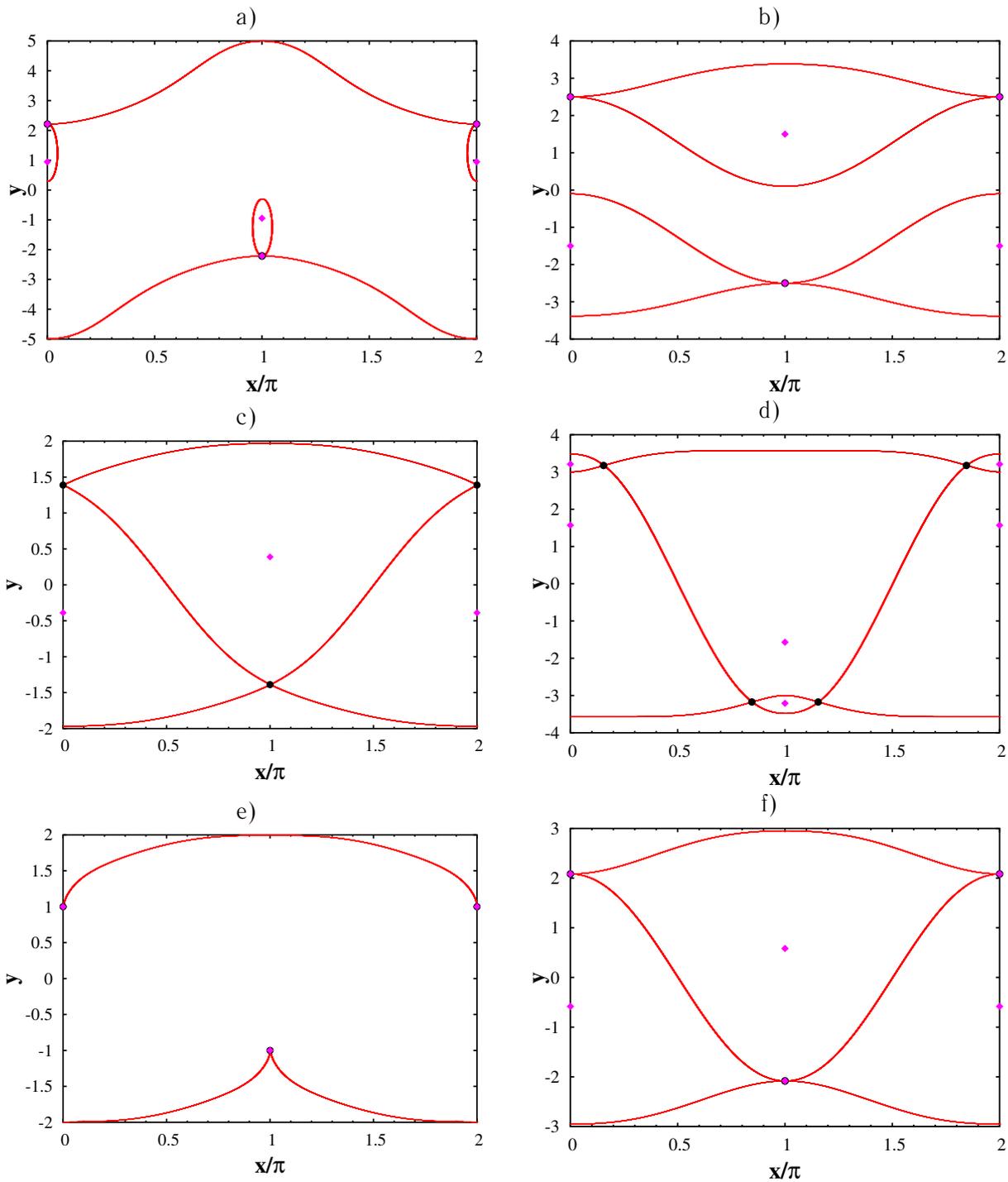


Рис. 4. Бифуркации: а) $2a - 3a$ ($A = 1,58, L = 3,47, C = 0,278805808052728$); б) $2b - 3b$ ($A = 0,5, L = 1,85, C = 0,2001078840192$); в) $2a - 2b$ ($A = 0,5, L = 1,04, C = 0,499332517637516$); г) $3a - 3b$ ($A = 2,39, L = 0,5, C = 0,279980401812784$); д) $1 - 2a$ ($A = 1,0, L = 1,0, C = 1,0$); е) $2a - 2b - 3a - 3b$ ($A = 0,75, L = 1,560992, C = 0,332753$).

«прилипания» на своих границах. Применяя методику, предложенную нами в работах по хаотической адвекции в кинематической модели с точечным топографическим вихрем на фоне течения

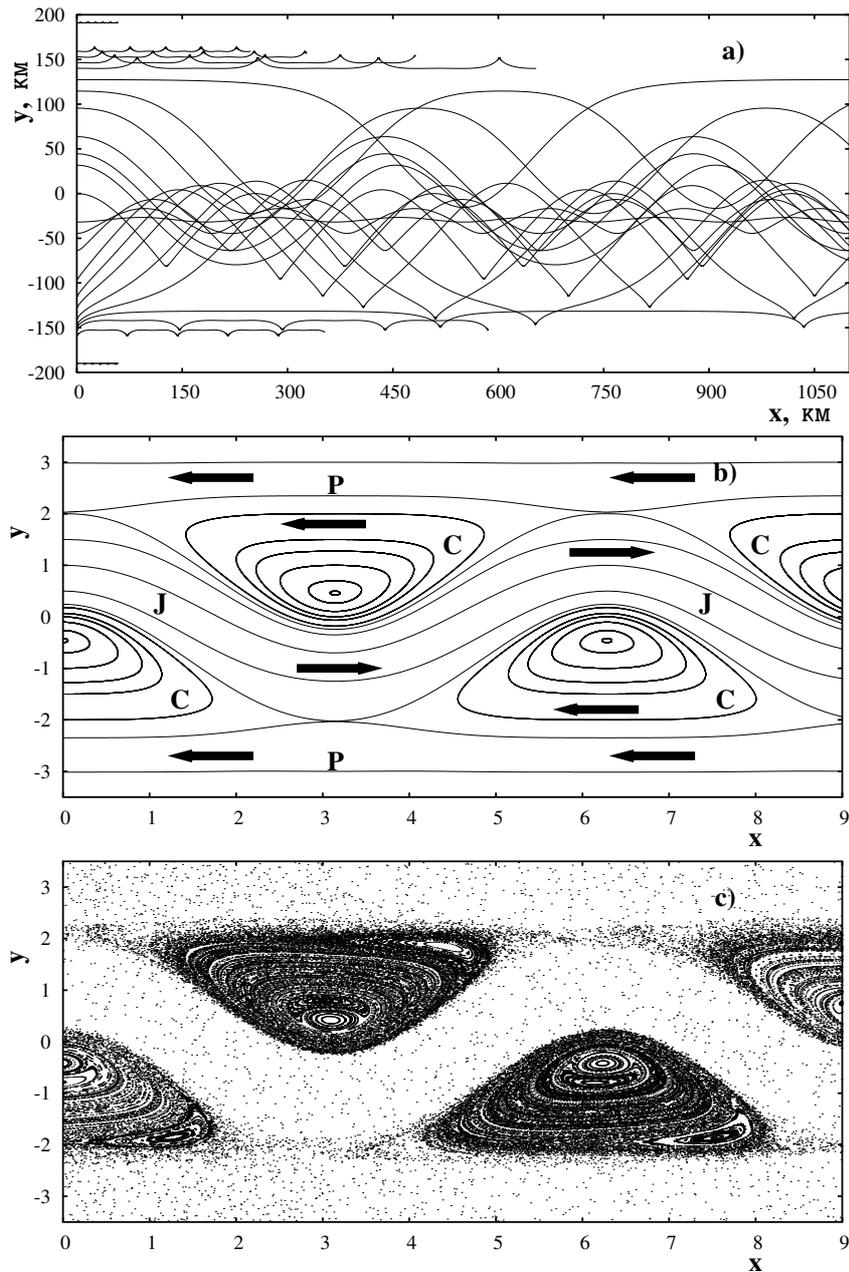


Рис. 5. (а) Траектории частиц в меандрирующем течении в лабораторной системе координат; (б) линии тока в системе координат, движущейся с фазовой скоростью меандра; (с) сечение Пуанкаре с периодически модулированной амплитудой меандра.

с периодической (приливной) составляющей [2, 18, 3], далее численно исследуется зарождение гамильтонова хаоса в потоке меандрирующего струйного течения, его динамические и топологические свойства, а также фрактальная динамика транспорта пассивной примеси.

Сечения Пуанкаре дают представление о структуре фазового пространства системы, но не о кинематике и геометрии перемешивания. Поскольку фазовый портрет (рис. 5б) имеет очевидную трансляционную симметрию, то достаточно рассмотреть перемешивание в одной из циркуляционных ячеек (северной) с координатами по долготе $0 \leq x \leq 2\pi$. Назовём её первым восточным

фреймом. В невозмущённой системе неустойчивым многообразием седловой точки $x = 0$ является устойчивое многообразие седловой точки $x = 2\pi$, а неустойчивое многообразие этой точки в свою очередь является устойчивым для точки $x = 0$. При наложении возмущения устойчивые и неустойчивые многообразия, как правило, расщепляются и трансверсально пересекаются. Гетероклинические точки их пересечения порождают бесконечное множество гетероклинических орбит, формирующих, наряду с бесконечным множеством неустойчивых орбит всевозможных периодов, гетероклиническую структуру. Эта структура определяет геометрию хаотического перемешивания, наглядное представление о котором можно получить интегрируя уравнения движения для большого числа точек, первоначально расположенных на некоторой материальной линии. Выберем эту линию в виде прямого отрезка с $x = 0$, пересекающего стохастический слой вблизи соответствующей седловой точки. Исходя из общих соображений, мы ожидаем, что судьба точек этой материальной линии будет весьма различной. Вдоль неустойчивого многообразия седловой точки $x = 0$ некоторые из них движутся на запад, другие на восток. Чем больше время интегрирования, тем дальше вдоль обоих направлений оси x растягивается материальная линия и простирается влияние на неё устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек $x = \pm 2\pi m$. Более того, зародившиеся при разрушении внешних КАМ-торов неустойчивые периодические орбиты всевозможных периодов также имеют устойчивые и неустойчивые многообразия, траектории вблизи которых приближаются и удаляются от этих орбит, соответственно. Таким образом, мы ожидаем, что одни частицы (множества меры нуль) навечно застрянут в первом восточном фрейме ($0 \leq x \leq 2\pi$), совершая от 0 до ∞ оборотов вокруг эллиптической точки с $x = \pi$ по гетероклиническим орбитам. Другие частицы выйдут из этого фрейма, пересекая одну из линий с $x = 0$ или с $x = 2\pi$. Некоторые частицы, попавшие в соседние фреймы, застрянут в них навечно, а другие попадут к своим соседям (в том числе и в первый восточный фрейм). И так далее до бесконечности.

Напомним, что мы работаем в движущейся системе координат. В лабораторной системе все частицы, разумеется, двигаются на восток. Однако, описанная в общих чертах гетероклиническая структура, приведёт к тому, что реальные траектории, скажем, буёв в меандрирующем Гольфстриме окажутся экспоненциально чувствительны к малым вариациям координат их запуска. Оценки с использованием параметров реальных океанских течений показывают, что разница начальных координат буёв порядка сотни метров (запущенных в стохастическом слое) может привести на трассе длиной ~ 1000 км к внушительной разнице времени дрейфа порядка полугода.

В натуральных геофизических экспериментах с буями нейтральной плавучести в океане [17] регистрируется траектория буя (с определённой дискретностью порядка полусуток), время движения и число изменений знака зональной скорости (x -компоненты). Исходя из этого, проведём следующий численный эксперимент. При фиксированных значениях управляющих параметров ($A = 0,785$, $L = 0,628$, $C = 0,1128$, $\varepsilon = 0,0785$, $\omega = 0,2536$, $\varphi = \pi/2$) запустим большое число частиц на указанной выше материальной прямой с $x = 0$, сосчитаем для каждой из частиц число пересечений n (или число оборотов $n/2$ вокруг эллиптической точки) её траекторией линии с $x = \pi$ (или $x = -\pi$ для первого западного фрейма) и время T , за которое она достигает линий $x = 0$ или $x = 2\pi$ (для первого западного фрейма $x = 0$ или $x = -2\pi$). На верхней панели рис. 6 представлен график $n(y_0)$ и функция $T(y_0)$. В верхней (от линий $n = 0$ и $T = 0$) части каждого рисунка представлены результаты для частиц, имеющих при $\tau = 0$ положительную зональную скорость (в силу их расположения на материальной линии при $\tau = 0$), в нижней — отрицательную зональную скорость. Частицы в первом восточном фрейме могут много раз менять направление своей зональной скорости прежде, чем пересекут линии $x = 0$ или $x = 2\pi$. Это время T и фиксируется для каждой частицы отрезка ($x_0 = 0, 1,9 \leq y_0 \lesssim 2,045$). То же самое делается

для частиц с $y_0 \gtrsim 2,045$, направляющихся вначале в первый западный фрейм $-2\pi \leq x \leq 0$. Подчеркнём, что время T фиксируется при первом пересечении частицами линий $x = 0$ или $x = \pm 2\pi$. Фактически, верхняя часть функции $T(y_0)$ — время, за которое частицы покинут первый восточный фрейм, а её нижняя часть — время выхода из первого западного фрейма. Обе функции имеют гладкие и плохо разрешимые участки. Каждый гладкий участок имеет U -образную форму, а его пограничные точки отделяют частицы, попавшие на устойчивое и неустойчивое многообразие. Эти начальные условия составляют множество (меры нуль) частиц, остающихся во фрейме навсегда. С увеличением T длины отрезков становятся всё меньше и меньше, число сингулярностей растёт и для всякой наперёд заданной неточности начальных значений y -координаты найдётся такое число n , начиная с которого становится практически невозможно (по крайней мере, для некоторых начальных участков материальной линии) предсказать время выхода частиц этих участков. Фракталоподобная структура хаотического рассеяния частиц в обоих фреймах представлена на верхнем фрагменте рис. 6 слева, а её увеличение для нескольких первых уровней — на среднем фрагменте, слева для восточного фрейма $n_e(y_0)$ и справа для западного $n_w(y_0)$. Чётные значения n соответствуют частицам покинувшим фрейм через границу с $x = 0$, нечётные — через границы с $x = 2\pi$ (для восточного фрейма) и $x = -2\pi$ (для западного фрейма).

Рассмотрим особенности движения частиц в первом восточном фрейме (см. рис. 6), с учётом того, что полученные результаты будут справедливы и для любого другого фрейма. График зависимости $n_e(y_0)$ представляет собой сложную иерархию последовательностей отрезков материальной линии. Вслед за авторами [25] будем называть эпистрофой последовательность отрезков $(n+1)$ -го уровня, сходящуюся к концам отрезка последовательности n -го уровня, с длинами отрезков, убывающими по определённому закону. Для $n_e = 1$ имеется эпистрофа, длины сегментов которой (см. A, B, C, D на рис. 6) убывают в геометрической прогрессии $l_m = l_0 q^m$, с показателем $q \approx 0,46$. На рис. 6 буквами a и b обозначены первые сегменты эпистроф уровня $n_e = 2$, буквами d и c — первые сегменты эпистроф уровня $n_e = 3$. Закон убывания длин сегментов этих эпистроф отличается от экспоненциального.

На рис. 7 показаны фрагменты эволюции материальной линии в первом восточном фрейме в моменты времени $\tau = 15\pi, 19\pi, 23\pi, 27\pi, 31\pi$ и 35π . Вначале южный конец материальной линии растягивается и изгибается, опоясывая циркуляцию и пересекая прямую $x = \pi$, северный — удерживается вблизи седловой точки $x = 0$. К моменту времени 15π на растягивающемся южном конце материальной линии образуется две складки: одна из которых соответствует сегменту A первой эпистрофы уровня $n_e = 1$, другая — первому пустому сегменту уровня $n_e = 1$. Сегмент A в форме вытянутой складки пересекает границу первого восточного фрейма ($x = 2\pi$) и переносится во второй восточный фрейм $2\pi \leq x \leq 4\pi$ (см. фрагмент 19π на рис. 7). Дальнейшую судьбу этой складки мы не рассматриваем. Через каждый период возмущения ($T_0 = 2\pi/\omega \approx 8\pi$) от северного конца отматывается очередная порция материальной линии, соответствующая сегменту эпистрофы и пустому сегменту уровня $n_e = 1$. Так образуется бесконечная последовательность отрезков эпистрофы первого уровня на рис. 6. Схожий сценарий образования эпистроф был описан в нашей работе, посвящённой адвекции в системе точечный вихрь-нестационарный поток [3].

Сегменты эпистроф нечётных уровней (для $n = 2k - 1 > 1$) покидают фрейм поочерёдно парами в форме складок через период возмущения (см. c, d на рис. 7). Складки сегментов $(2k - 1)$ -го уровня являются «внешними» для складок сегментов $(2k + 1)$ -го уровня. На рис. 7 (фрагмент 31π) первые сегменты c и d эпистроф третьего уровня покидают фрейм в форме пары складок, «вложенных» в складку сегмента C (на рисунке этот сегмент не обозначен), являющегося третьим сегментом эпистрофы первого уровня. Мы установили следующую эмпирическую закономерность между временами достижения границы $x = 2\pi$ первых сегментов эпистроф нечётных уровней: $T_{2k+1} - T_{2k-1} \approx 2T_0$, где T_{2k-1} — время достижения указанной границы первым отрез-

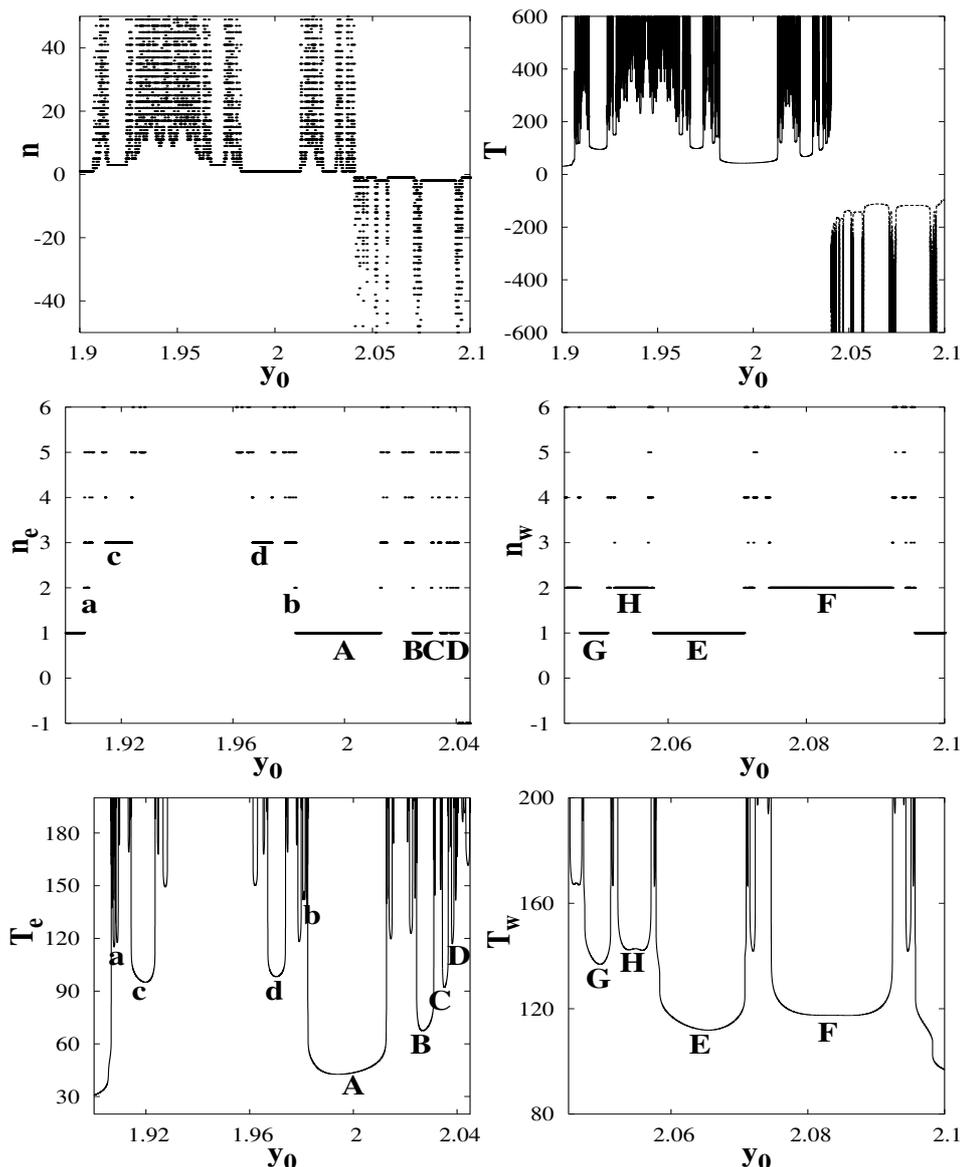


Рис. 6. Фрактальное множество начальных y -координат частиц, достигающих линий $x = 0, \pm 2\pi$ после совершения $n/2$ оборотов вокруг эллиптических точек. T — соответствующее время выноса.

ком эпистрофы уровня $(2k - 1)$ (A для $n = 1$), а T_{2k+1} — соответствующее время для первых сегментов эпистроф уровня $(2k + 1)$ (c и d для $n = 3$).

Сегменты эпистроф чётных уровней ($n = 2k$) также покидают фрейм поочерёдно через период возмущения. На рис. 7 (фрагменты 31π и 35π) виден процесс образования вблизи седла с координатой $x = 0$ двух складок, относящихся к первым сегментам эпистроф второго уровня. С течением времени «внешняя» складка покидает первый восточный фрейм и переносится в первый западный фрейм через линию $x = 0$. Этой складке на рис. 6 соответствует сегмент a крайней левой эпистрофы уровня $n = 2$. Вторая складка (внутренняя) не пересекает левой границы фрейма ($x = 0$), а вытягиваясь продолжает движение внутри первого восточного фрейма. Первый сегмент эпистрофы уровня $n = 2$, сходящейся к левому концу сегмента A уровня $n = 1$, а именно, сегмент b — вымывается со вторым сегментом крайней левой эпистрофы уровня $n = 2$.



В общих чертах эволюция материальной линии протекает следующим образом: происходит растяжение линии с образованием складок вблизи седловых точек, затем часть складок покидает фрейм в обоих направлениях.

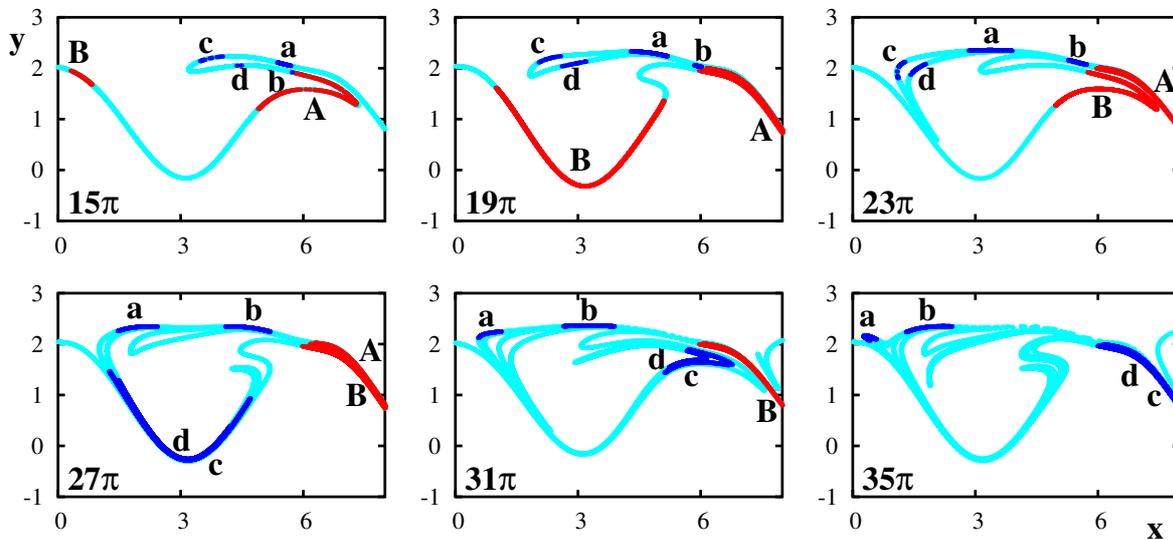


Рис. 7. Фрагменты эволюции материальной линии с обозначенными сегментами фрактала с $n_e = 1, 2, 3$.

5. Заключение

Западные пограничные течения, такие как Куро시오 и Гольфстрим, являются ярко выраженными струями, разделяющими водные массы с различными физическими и биогеохимическими характеристиками. Исследованная в настоящей работе кинематическая модель описывает в общих чертах транспорт и перемешивание водных масс с различными характеристиками в таких течениях. Наблюдения за лагранжевыми траекториями буёв нейтральной плавучести и в Куро시오 и в Гольфстриме [16, 17] выявили иррегулярность их траекторий. Вопрос о том, являются ли траектории буёв хаотическими (в смысле экспоненциальной чувствительности к малым изменениям начальных условий) — один из центральных в проблеме латерального перемешивания в океане.

Как нам представляется, возможны три основных механизма перемешивания и транспорта в океане. В первом, в результате бифуркации возникают седловые точки с соответствующими устойчивыми и неустойчивыми многообразиями (см. разд. 3 статьи), которые существенно изменяют направление транспорта в своих окрестностях. Второй механизм обусловлен периодическими или квазипериодическими возмущениями (собственно хаотическая адвекция, рассматриваемая в разд. 4), а третий — случайными возмущениями.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. М.: ВИНТИ, 1985.
- [2] Будянский М. В., Улейский М. Ю., Пранц С. В. *Фракталы и динамические ловушки в простейшей модели хаотической адвекции с топографическим вихрем* // Доклады АН, 2002, т. 386, с. 686–689.
- [3] Будянский М. В., Улейский М. Ю., Пранц С. В. *Хаотическое рассеяние, транспорт и фракталы в гидродинамическом потоке* // ЖЭТФ, 2004, т. 126, с. 1167–1179.

- [4] Заславский Г. М. *Физика хаоса в гамильтоновых системах*. Ижевск: РХД, 2004. (Engl. original: Zaslavsky G.M. *Physics of Chaos in Hamiltonian systems*. Oxford: Academic Press, 1998.)
- [5] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. *Введение в нелинейную физику*. М.: Наука, 1988.
- [6] Козлов В. В. *О стохастизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости* // Вестник Моск. ун-та, сер. матем., мех., 1991, Н. 1, с. 72–75.
- [7] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: УдГУ, 1995.
- [8] Ламб Г. *Гидродинамика*. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
- [9] Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*. М.: Мир, 1984.
- [10] Мельников В. К. *Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях* // Труды Моск. Мат. Об-ва, 1963, т. 12, с. 3–52.
- [11] Пуанкаре А. *Избранные труды*. М.: Наука, 1971, Т. 1, 2.
- [12] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // J. Fluid Mech, 1984, Vol. 143, p. 1–21.
- [13] Aref H. *The development of chaotic advection* // Phys. Fluids, 2002, Vol. 14, p. 1315–1325.
- [14] Arnold V.I. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits* // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci., 1965, Vol. 261, p. 17–20.
- [15] Bower A. S. *A simple kinematic mechanism for mixing fluid parcels across a meandering jet* // J. Phys. Oceanogr., 1989, Vol. 21, p. 173–180.
- [16] Bower A. S., Lozier M. S. *A closer look at particle exchange across the Gulf Stream* // J. Phys. Oceanogr., 1994, Vol. 24, p. 1399–1418.
- [17] Bower A. S., Rossby H. T. *Evidence of cross-frontal exchange processes in the Gulf Stream based on RAFOS float data* // J. Phys. Oceanogr., 1989, Vol. 19, p. 1177–1190.
- [18] Budyansky M., Uleysky M., Prants S. *Hamiltonian fractals and chaotic scattering by a topographical vortex and an alternating current* // Physica D, 2004, Vol. 195, p. 369–378.
- [19] Del-Castillo-Negrete D., Morrison P.J. *Chaotic transport by Rossby waves in shear flow* // Phys. Fluids A, 1993, Vol. 5, p. 948–965.
- [20] Eckart C. J. *An analysis of the stirring and mixing processes in incompressible fluids* // J. Mar. Res., 1948, Vol. 7, p. 265–275.
- [21] Henon M. *Sur la topologie des lignes courant dans un cas particulier* // C. R. Hebd. Seances Acad. Sci., 1966, Vol. 262, p. 312–314.
- [22] Howard J. E., Hohn S. M. *Stochasticity and reconnection in Hamiltonian systems* // Phys. Rev. A, 1984, Vol. 29, p. 418–421.
- [23] Kovalyov S. *Phase space structure and anomalous diffusion in rotational fluid experiment* // Chaos, 2000, Vol. 10, p. 153–165.
- [24] MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. *Transport in Hamiltonian system* // Physica D, 1984, Vol. 13, p. 55–81.
- [25] Mitchell K. A., Handley J. P., Tighe B., Delos J. B., Knudson S. K. *Geometry and topology of escape. I: Epistrophes* // Chaos, 2003, Vol. 13, p. 880–891.
- [26] Ngan K., Shepherd T. *Chaotic mixing and transport in Rossby-wave critical layers* // J. Fluid Mech., 1997, Vol. 334, p. 315–351.
- [27] Samelson R. M. *Fluid exchange across a meandering jet* // J. Phys. Oceanogr., 1992, Vol. 22, p. 431–440.
- [28] Sommeria J., Meyers S. D., Swinney H. L. *Laboratory model of a planetary eastward jet* // Nature, 1989, Vol. 337, p. 58–62.
- [29] Weiss J. B., Knobloch E. *Mass transport by modulated travelling waves* // Phys. Rev. A., 1989, Vol. 40, p. 2579–2589.
- [30] Welander P. *Studies of the general development of motion in a two-dimensional, ideal fluid* // Tellus, 1955, Vol. 7, p. 141–156.