

Динамика двух вихревых колец на сфере*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 10 апреля 2006 г.

В работе рассмотрено движение двух вихревых колец на сфере. Это движение обобщает известное центрально-симметричное решение уравнений динамики точечных вихрей на плоскости, найденное Д. Н. Горячевым и Х. Арефом. Показано, что уравнения движения в этом случае являются интегрируемыми по Лиувиллю, и указано явное сведение к гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Указаны два частных случая, при которых решения являются периодическими. Для этих решений приведены явные квадратуры. Описаны фазовые портреты и приведены бифуркационные диаграммы для центрально-симметричного движения четырех вихрей на сфере.

Ключевые слова: вихри, гамильтониан, движение на сфере, фазовый портрет

A. V. Borisov, I. S. Mamaev

Dynamics of two vortex rings on a sphere

The motion of two vortex rings on a sphere is considered. This motion generalizes the well-known centrally symmetrical solution of the equations of point vortex dynamics on a plane derived by D. N. Goryachev and H. Aref. The equations of motion in this case are shown to be Liouville integrable, and an explicit reduction to a Hamiltonian system with one degree of freedom is described. Two particular cases in which the solutions are periodical are presented. Explicit quadratures are given for these solutions. Phase portraits are described and bifurcation diagrams are shown for centrally symmetrical motion of four vortices on a sphere.

Keywords: vortex, Hamiltonian, motion on a sphere, phase portrait

Mathematical Subject Classifications: 76M23

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-1312.2006.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-05-64367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

1. Движение $2n$ вихрей на плоскости. Центральное-симметричное решение

Рассмотрим систему $2n$ точечных вихрей, состоящую из двух групп по n вихрей, каждая из которых (в начальный момент) расположена в вершинах концентрических правильных многоугольников (колец). Эти группы вихрей имеют соответственно интенсивности Γ_1 и Γ_2 . Обозначая координаты первой группы через z_1, \dots, z_n , а второй — через ζ_1, \dots, ζ_n , уравнения движения $2n$ вихрей можно записать в форме

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\beta \neq \alpha}^n \frac{\Gamma_1}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\Gamma_2}{z_\alpha - \zeta_\beta} \right), \\ \dot{\bar{\zeta}}_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{\Gamma_1}{\zeta_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta \neq \alpha}^n \frac{\Gamma_2}{\zeta_\alpha - \zeta_\beta} \right).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Учитывая начальное расположение вихрей, решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$z_\alpha(t) = z(t)e^{2\pi i(\alpha-1)t/n}, \quad \zeta_\alpha(t) = \zeta(t)e^{2\pi i(\alpha-1)t/n}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

Несложно получить систему двух уравнений для определения функций z и ζ :

$$\dot{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\Gamma_1(n-1)}{2z} + \frac{\Gamma_2 n z^{n-1}}{z^n - \zeta^n} \right), \quad \dot{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\Gamma_2(n-1)}{2\zeta} + \frac{\Gamma_1 n \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n} \right). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) могут быть представлены в гамильтоновой форме [2]:

$$\Gamma_1 \dot{\bar{z}} = \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \Gamma_2 \dot{\bar{\zeta}} = \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (1.4)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\pi} \log \left\{ \left[(z\bar{z})^{\Gamma_1} (\zeta\bar{\zeta})^{\Gamma_2} \right]^{(n-1)/2} \left[(z^n - \zeta^n)(\bar{z}^n - \bar{\zeta}^n) \right]^{\Gamma_1 \Gamma_2} \right\}. \quad (1.5)$$

Кроме гамильтониана (или величины $h = \exp(2\pi H)$) система (1.4), (1.5) обладает интегралом момента

$$I = \Gamma_1 |z|^2 + \Gamma_2 |\zeta|^2 \quad (1.6)$$

и поэтому является интегрируемой по Лиувиллю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Общая система (1.1) (с добавлением центрального вихря, не изменяющего свойств интегрируемости) была рассмотрена Д. Н. Горячевым, который также подробно рассмотрел случай $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, а интенсивность центрального вихря \varkappa ненулевая $\varkappa \neq 0$. Д. Н. Горячев указал соотношения на \varkappa и $\lambda^2 = -\Gamma_1/\Gamma_2$, при которых решения описываются явными квадратурами, рассмотрев более подробно случай движения по логарифмической спирали. Случай $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, $\varkappa = 0$ изучался Т. Хавелоком в работе [6], в которой найдено решение, соответствующее равномерному вращению вихрей по окружностям с постоянными радиусами. Такое решение обобщает задачу о дорожке Кармана на случай конечного числа вихревых пар, расположенных по окружностям (двойко альтернированные кольца). Случай $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ рассматривался В. Грёбл [5] и А. Гринхиллом [4], которые указали решение, для которого $\zeta = \bar{z}$, т. е. обладающее n осями симметрии. Как уже указывалось, наиболее полной работой, посвященной системе Горячева-Арефа (1.1), является [7]. Детальное исследование системы (1.4), (1.5) (включающее рассмотрение топологии, редукции и устойчивости) в зависимости от отношения Γ_1/Γ_2 выполнено в [7].

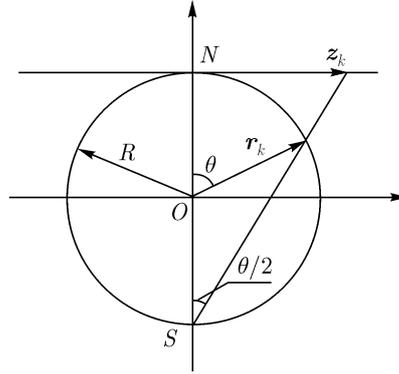


Рис. 1

2. Движение $2n$ вихрей на сфере. Аналог центрально-симметричного решения

Рассмотрим систему $2n$ точечных вихрей на сфере радиуса R . Выполним стереографическую проекцию сферы на плоскость и представим координаты вихрей в комплексной форме $z_k = x_k + iy_k, i = 1, \dots, N$ (рис. 1). Тогда уравнения движения (произвольной системы N точечных вихрей с интенсивностями Γ_l) можно представить в форме [9]:

$$\dot{z}_k = \frac{(1 + \lambda|z_k|^2)^2}{2\pi i} \left(\sum_{l \neq k}^N \frac{\Gamma_l}{z_k - z_l} - \left(\sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \right) \frac{\lambda \bar{z}_k}{1 + \lambda|z_k|^2} \right), \quad \lambda = (2R)^2. \quad (2.1)$$

Эти уравнения записываются в гамильтоновой форме:

$$\dot{\bar{z}}_k = \{\bar{z}_k, H\} = \frac{2(1 + \lambda|z_k|^2)^2}{i\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial z_k},$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \ln |z_k - z_l|^2 - \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\sum_{l \neq k} \Gamma_l \right) \ln(1 + \lambda|z_k|^2) \right).$$

Скобки Пуассона задаются соотношениями $\{\bar{z}_k, z_l\} = \frac{2\delta_{kl}}{i\Gamma_k}$.

Разобьем аналогично предыдущему пункту $2n$ вихрей на группы по n вихрей, имеющих соответственно интенсивности Γ_1 и Γ_2 , тогда система (2.1) допускает частное центрально-симметричное решение, при котором каждая из групп вихрей образует во все моменты времени правильные многоугольники (кольца) с одной и той же осью симметрии. Мы снова будем искать его в виде (1.2). Подставляя (1.2) в (2.1), приходим к уравнениям

$$\dot{z} = \frac{(1 + \lambda|z|^2)^2}{2\pi i} \left(\frac{(n-1)\Gamma_1}{2z} + \frac{n\Gamma_2 z^{n-1}}{z^n - \zeta^n} - (n(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \Gamma_1) \frac{\lambda \bar{z}}{1 + \lambda|z|^2} \right),$$

$$\dot{\zeta} = \frac{(1 + \lambda|\zeta|^2)^2}{2\pi i} \left(\frac{(n-1)\Gamma_2}{2\zeta} + \frac{n\Gamma_1 \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n} - (n(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \Gamma_2) \frac{\lambda \bar{\zeta}}{1 + \lambda|\zeta|^2} \right). \quad (2.2)$$

Система (2.2) является гамильтоновой (1.4) с гамильтонианом

$$H = \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln z\bar{z} + \Gamma_2^2 \ln \zeta\bar{\zeta} - (\Gamma - \Gamma_1)\Gamma_1 \ln(1 + \lambda z\bar{z}) - (\Gamma - \Gamma_2)\Gamma_2 \ln(1 + \lambda \zeta\bar{\zeta}) + \Gamma_1\Gamma_2 \ln(z^n - \zeta^n)(\bar{z}^n - \bar{\zeta}^n)), \quad \Gamma = n(\Gamma_1 + \Gamma_2). \quad (2.3)$$

Скобки Пуассона задаются соотношениями $\{\bar{z}, z\} = \frac{2}{i\Gamma_1}$, $\{\bar{\zeta}, \zeta\} = \frac{2}{i\Gamma_2}$.

Помимо гамильтониана (2.3) уравнения допускают интеграл момента, соответствующий вращательной симметрии относительно общей оси колец. Он имеет вид

$$I = \frac{\Gamma_1}{1 + \lambda|z|^2} + \frac{\Gamma_2}{1 + \lambda|\zeta|^2} = \text{const}. \quad (2.4)$$

3. Приведение к системе с одной степенью свободы

Используя инвариантность уравнений (2.2) относительно группы вращений $SO(2)$, явно выполним редукцию к системе с одной степенью свободы. Выполним замену переменных

$$\varphi = \arg z - \arg \zeta, \quad \psi = \arg z + \arg \zeta, \quad X = \frac{\Gamma_1}{1 + \lambda|z|^2} - \frac{\Gamma_2}{1 + \lambda|\zeta|^2}, \quad Y = I, \quad (3.1)$$

где I — интеграл (2.4). Скобки Пуассона для новых переменных имеют вид

$$\{X, \varphi\} = \{Y, \psi\} = 4\lambda, \quad \{X, Y\} = \{\varphi, \psi\} = 0. \quad (3.2)$$

Выразим гамильтониан через новые переменные

$$4\pi H = \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln u(1-u) + \Gamma_2^2 \ln v(1-v)) + \Gamma_1\Gamma_2 \ln \left(v^n(1-u)^n + u^n(1-v)^n - 2(uv(1-u)(1-v))^{n/2} \cos n\varphi \right), \quad (3.3)$$

$$u = \frac{I+X}{2\Gamma_1} = \frac{1}{1 + \lambda|z|^2}, \quad v = \frac{I-X}{2\Gamma_2} = \frac{1}{1 + \lambda|\zeta|^2}.$$

Таким образом, ψ — циклическая переменная, и на поверхности уровня $I = \text{const}$ получаем искомого систему с одной степенью свободы для переменных:

$$\dot{X} = 4\lambda \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = -4\lambda \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (3.4)$$

4. Твисторы и танцующие вихри

Имеется два частных случая, когда все (неособые) решения системы (2.2) являются периодическими, а именно

$$1) \Gamma_1 = \Gamma_2, \quad I = \Gamma_1, \quad 2) \Gamma_1 = -\Gamma_2, \quad I = 0. \quad (4.1)$$

Как несложно показать, в обоих случаях имеется дополнительный интеграл

$$\psi = \arg z + \arg \zeta = \text{const}.$$



В первом случае вихревые кольца равноотстоят от экватора и движутся в противоположных направлениях. При этом возможны два режима движения: в первом все вихри одного и того же кольца движутся по одной и той же кривой («вблизи полюса»), во втором — каждый вихрь движется по своей траектории («вблизи вершин косой призмы», см. рис. 10). Это — простейшие твисторы [10].

Во втором случае оба кольца находятся на одной и той же широте, и вихри описывают одинаковые овалы с центрами на экваторе (это одна из разновидностей танцующих вихрей, см. рис. 11). Более подробно эти случаи рассмотрены ниже для простейших колец, состоящих из двух вихрей.

Интересной особенностью этих случаев является также то, что решение можно выписать в виде явных квадратур. Так для случая $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ (n — произвольное) получаем:

$$\dot{X} = -\frac{2\lambda n}{\pi} \frac{(1 - X^2)^n \sin n\varphi}{(1 - X)^{2n} + (1 + X)^{2n} - 2(1 - X^2)^n \cos n\varphi}.$$

Выразим из этого соотношения $\cos n\varphi$ и подставим в уравнение для гамильтониана (3.3), из полученного уравнения находим, что $X(t)$ может быть получено обращением следующего интеграла

$$\int^X \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \pm \frac{\lambda n}{\pi h} (t - t_0),$$

$$P(x) = -\left(h - (1 - x^2)^{n-1} ((1 + x)^n + (1 - x)^n)^2\right) \times$$

$$\times \left(h - (1 - x^2)^{n-1} ((1 + x)^n - (1 - x)^n)^2\right), \tag{4.2}$$

где постоянная h связана со значением гамильтониана (3.3) соотношением

$$4\pi H + 2(2n - 1) \ln 2 = \ln h.$$

В случае $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ гамильтониан (3.3) и уравнения (3.4) еще более упрощаются, действительно, несложно получить

$$4\pi H = \ln 2 - \ln X(2 - X) - \ln(1 - \cos n\varphi),$$

$$\dot{X} = -\frac{\lambda}{\pi} n \operatorname{ctg} \frac{n\varphi}{2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2(1 - X)}{X(2 - X)}.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и для траектории получаем следующие выражения

$$X = 1 \pm \left(1 - \frac{h}{1 - \cos n\varphi}\right)^{1/2}.$$

Закон движения по траектории определяется выражениями

$$X(t) = 1 + \sqrt{\frac{2-h}{2}} \sin \tau, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\lambda n}{\pi} (t - t_0), \tag{4.3}$$

где $\ln h = \ln 2 - 4\pi H$.

Это решение описывает простейший случай движений, названных в [10] «танцующими вихрями». Замечательной особенностью этих движений является то, что решение может быть выражено через элементарные функции. Этот результат дополняет результаты работ [8], где существование подобных решений доказывается с помощью теории, основанной на анализе дискретных групп симметрии. Помимо указанных выше, известно большое количество других частных решений в движении вихрей на сфере, для случая при котором все интенсивности по модулю равны [10]. Интересно было бы выяснить, для каких еще решений можно выполнить явное интегрирование в квадратурах.

В случае плоскости при $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ аналогичное решение также может быть получено в квадратурах; замечательное по своей простоте, оно было указано Д. Н. Горячевым [1].

В общем случае (произвольные Γ_i), траектории приведенной системы на плоскости X, φ совпадают с линиями уровня гамильтониана (3.3). Таким образом, фазовый портрет приведенной системы (3.4) полностью определяется видом двумерной поверхности $z = H(X, \varphi)$, который, как известно, задается критическими точками и сингулярностями функции (3.3). Рассмотрим подробнее критические точки (3.3), которым в исходной системе (2.1) соответствуют относительные равновесия вихрей, т. е. «твердотельные» конфигурации, равномерно вращающиеся вокруг неподвижного центра.

5. Относительные равновесия

Несложно показать, что угол φ , соответствующий критическим точкам (3.3) (и, следовательно, относительным равновесиям), определяется уравнением

$$\sin n\varphi = 0,$$

т. е. $\varphi = 0 \bmod \frac{2\pi}{n}$, либо $\varphi = \frac{\pi}{n} \bmod \frac{2\pi}{n}$. Используя терминологию, предложенную в [2], конфигурации первого типа ($\varphi = 0$) будем называть симметричными (symmetrical), а второго типа ($\varphi = \frac{\pi}{n}$) — альтернированными (alternate). Подставляя эти значения φ в (3.3), находим, что относительные равновесия системы (2.1) определяются критическими точками функций

$$4\pi H_{\pm} = \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln u(1-u) + \Gamma_2^2 \ln v(1-v)) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left(v^{n/2}(1-u)^{n/2} \mp u^{n/2}(1-v)^{n/2} \right)^2, \quad (5.1)$$

где верхний знак соответствует симметричным, а нижний — альтернированным конфигурациям. (Как мы видим, в отличие от случая плоскости [7], уравнение, определяющее относительные равновесия на сфере при нечетном n , не является полиномиальным.)

Рассмотрим подробно два важных случая, соответствующих частным решениям в задаче четырех вихрей на сфере. Выполним качественный анализ динамики в этих случаях. Используя приводимый ниже алгоритм, можно выполнить качественный анализ системы (2.2) при любых фиксированных значениях Γ_1, Γ_2, n .

$n = 2, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1 (I \neq 1)$. В этом случае система (2.2) описывает центрально симметричное решение в задаче четырех одинаковых вихрей на сфере, первоначально указанное и исследованное в [3]. Предложенные в [3] переменные хотя и позволяют выполнить редукцию к системе с одной степенью свободы, но достаточно неудобны для качественного анализа системы.

Согласно (3.3), функция H — π -периодическая, поэтому можно ограничиться рассмотрением φ в интервале $[0, \pi)$, в то же время $u < 0$ при $X < -I$, а $v < 0$ при $X > I$, поэтому физические значения X заключены в интервале $(-I, I)$. При этом возможные значения константы интеграла (2.4) определены неравенствами $0 \leq I \leq 2$.

С помощью (5.1) находим, что относительные равновесия определяются корнями некоторых полиномов. Для симметричных решений это:

$$X(2X^4 - 3(2 - d)X^2 + d^2) = 0,$$

для альтернированных:

$$X(X^2 + d)(3X^4 - 2(5 - 3d)X^2 - d(2 - 3d)) = 0,$$

где $d = I(2 - I) \in [0, 1]$. Исключая нефизические решения этих уравнений, находим неподвижные точки системы (3.4).

Симметричные:

$$\varphi = 0 \bmod \pi, \quad X_s = \frac{1}{2} \left(3(2 - d) - \sqrt{d^2 + 36(1 - d)} \right)^{1/2},$$

это решение соответствует конфигурации вихрей, при которой они располагаются на одном меридиане, вращающемся с постоянной угловой скоростью.

Альтернированные:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \bmod \pi, \quad X_a^{(1)} = 0, \quad X_a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(5 - 3d - \sqrt{25 - 24d} \right)^{1/2},$$

причем $X_a^{(2)}$ определено лишь при $I \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$. Заметим, что $X_a^{(1)}$ соответствует расположению вихрей в вершинах квадрата, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, $X_a^{(2)}$ соответствует расположению вихрей в вершинах неправильного тетраэдра, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр двух противоположных ребер.

Подставляя эти решения в гамильтониан (3.3), построим бифуркационную диаграмму (диаграмму энергии—момента). В данном случае ее удобно изобразить на плоскости значений интегралов I и $h = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi H}{64}$ (см. рис. 2). Возможные значения интегралов I, h на рис. 1 отмечены серым цветом, при пересечении кривых A_1, A_2, S происходит перестройка траекторий приведенной системы (3.4) и соответственно перестройка инвариантных многообразий (двумерных торов) исходной системы (2.2). Кривые A_1, S определены при всех значениях $I \in [0, 2]$, кривая A_2 определена на отрезке $I \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ и в граничных точках отрезка касается кривой A_1 .

Таким образом, в зависимости от значения интеграла I имеется два качественно различных типа фазовых портретов системы (3.4), соответствующих областям $I \in \left(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 \right) = D_1$ и $I \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \setminus \{0\} = D_2$. Они приведены на рис. 3, 4. При этом симметричное решение всегда неустойчиво, A_2 — устойчиво, A_1 — неустойчиво при $I \in D_2$ и устойчиво при $I \in D_1$ (в данном случае устойчивость рассматривается лишь по отношению к центрально-симметричным возмущениям положений вихрей). Заметим также, что при всех значениях I гамильтониан (3.3) имеет две сингулярности в точках $\varphi = 0 \bmod \pi, X = 0$, которые также определяют вид фазового портрета (рис. 3, 4).

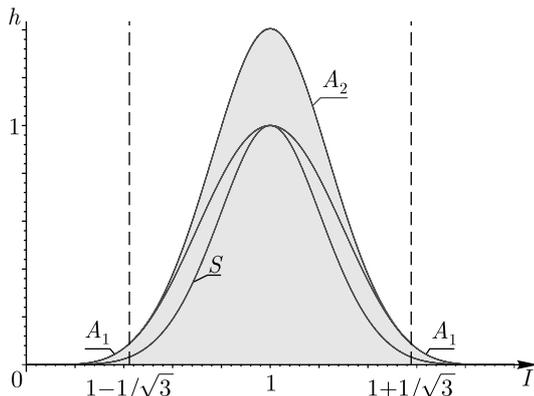


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы для $n = 2, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$. Серым цветом отмечена область возможных (физических) значений интегралов I, h . Кривые A_1, A_2 соответствуют альтернированным относительным равновесиям, а S — симметричному равновесию.

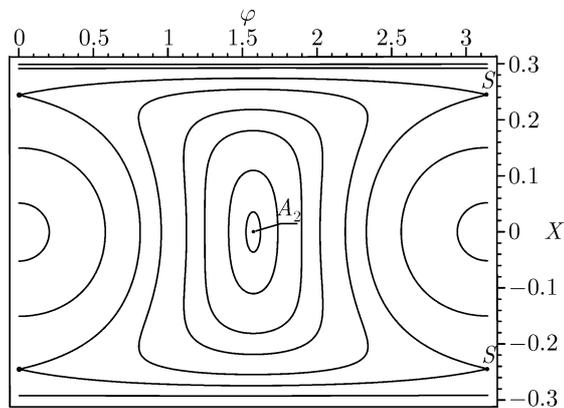


Рис. 3. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при $n = 2, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ и $I \in D_1$ ($I = 0.3$).

$n = 2, \Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1 (I \neq 0)$. Эту ситуацию рассмотрим по аналогии с предыдущим случаем. В этом случае система (2.2) описывает центрально-симметричное взаимодействие двух вихревых пар на сфере.

Как и выше, гамильтониан (3.3) — π -периодическая функция, следовательно, ограничимся интервалом $\varphi \in [0, \pi)$, а из условия положительной определенности функций $u, v, 1 - u, 1 - v$ находим $|I| \leq X \leq 2 - |I|$. При этом возможные значения интеграла $I \in [-1, 1]$.

Относительные равновесия в данном случае определяются корнями следующих уравнений. Для симметричных:

$$I^2 \tilde{X} (\tilde{X}^2 - I^2 - 1) = 0,$$

для альтернированных:

$$\tilde{X} (\tilde{X}^2 - 1 - I^2) (\tilde{X}^4 - 2(1 + I^2) \tilde{X}^2 + 1 - 6I^2 + I^4) = 0,$$

где $\tilde{X} = X - 1 \in (|I| - 1, 1 - |I|)$. После исключения нефизических решений для относительных равновесий получаем следующие решения.

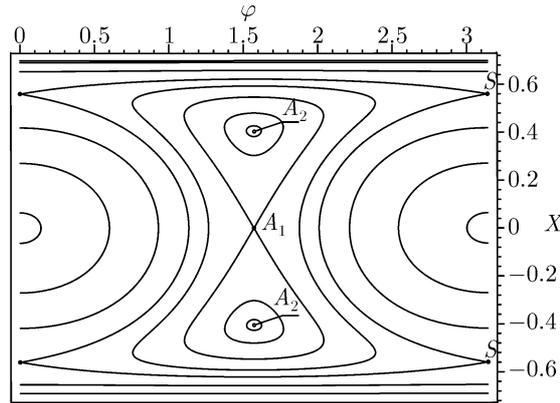


Рис. 4. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при $n = 2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2$ и $I \in D_2$ ($I = 0.7$).

Симметричные:

$$\varphi = 0 \pmod{\pi}, \quad X_s = 1,$$

это решение соответствует расположению вихрей в вершинах прямоугольника, который вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей через середины противоположных сторон (соединяющих вихри с одинаковыми по знаку интенсивностями). Подобное решение отсутствует в плоском случае.

Альтернированные:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad X_a^{(1)} = 1, \quad X_a^{(2)} = 1 + \sqrt{1 + I^2 - 2\sqrt{2}|I|},$$

последнее решение определено при $I \in [-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1]$; $X_a^{(1)}$ соответствует расположению пар вихрей, одинаковых по знаку на одной и той же широте по разные стороны от экватора, эта конфигурация вращается вокруг оси перпендикулярной экватору (подобное решение также отсутствует в плоском случае), $X_a^{(2)}$ — это аналог плоского решения, при котором вихри одинаковой циркуляции вращаются на одинаковых параллелях, при увеличении $|I|$ до значения $\sqrt{2} - 1$ это решение сливается с решением $X_a^{(1)}$.

Как и выше, подставляя найденные координаты относительных равновесий в (5.1), построим бифуркационную диаграмму для этого случая, которую удобно изобразить на плоскости интегралов $I, h = e^{8\pi H}$ (см. рис. 5). Кривые S, A_1 также определены при произвольном $I \in [-1, 1]$, $I \neq 0$, в то время как A_2 определено на множестве $[-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1] \setminus \{0\}$. При $I \neq 0$ также возможны два типа фазовых портретов редуцированной системы (3.4), приведенных на рис. 6, 7.

В отличие от предыдущего случая, симметричное решение в данном случае устойчиво при всех $I \neq 0$, решение A_1 всегда неустойчиво, а A_2 устойчиво при $I \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1)$ и неустойчиво в противном случае. (Как и выше имеется в виду устойчивость по отношению к центрально-симметричным возмущениям.) В отличие от предыдущего случая, гамильтониан (3.3) не имеет особенностей в области определения X, φ .

Приведем также фазовые портреты и вид траекторий вихрей при $n = 2$ для исключительных случаев, указанных выше (4.1) (рис. 8). Как было уже отмечено, неподвижные точки приведенной системы (3.4) в этом случае определяют статические конфигурации вихрей. При $\Gamma_1 = \Gamma_2$ имеется

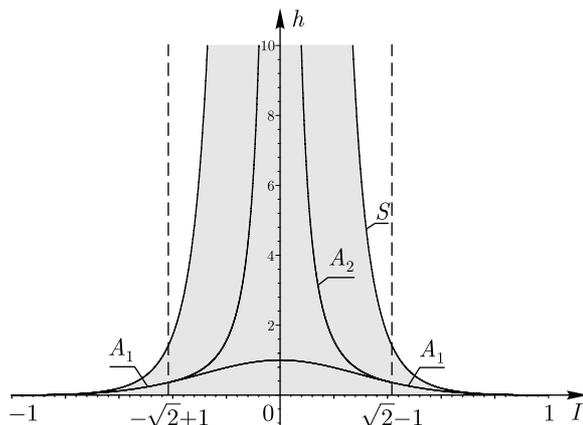


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма системы при $n = 2, \Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$. Серым цветом отмечена область возможных значений интегралов I, h . Кривые A_1, A_2 соответствуют альтернированным относительным равновесиям, а S — симметричному равновесию.

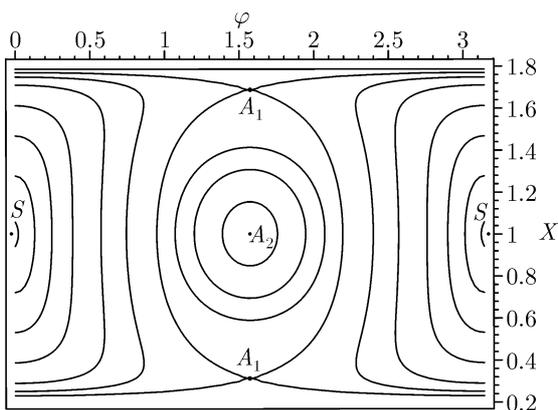


Рис. 6. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при $n = 2, \Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ и $I \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1) \setminus \{0\}$ ($I = 0.2$).

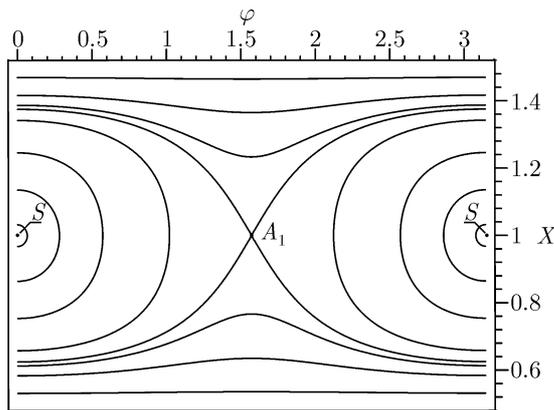


Рис. 7. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при $n = 2, \Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ и $I \in (-1, -\sqrt{2} + 1) \cup (\sqrt{2} - 1, 1)$ ($I = 0.5$).

две статических конфигурации: для одной вихри располагаются в вершинах правильного тетраэдра, а для другой вихри образуют квадрат на большом круге сферы. Траектории вблизи решений A_2 соответствуют движению вихрей по замкнутым кривым вблизи вершин тетраэдра, а траекториям вблизи сингулярностей (точки $\varphi = 0 \pmod{\pi}, X = 0$ на рис. 8) соответствуют движения пар вихрей в противоположных направлениях по замкнутым траекториям вблизи полюсов (рис. 10). При $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ имеется лишь одна статическая конфигурация — это квадрат на экваторе сферы. Все вихри двигаются по одинаковым кривым вокруг его вершин, причем во время движения они остаются на одной и той же параллели (рис. 11). Соответствующие квадратуры указаны выше (4.2), (4.3).

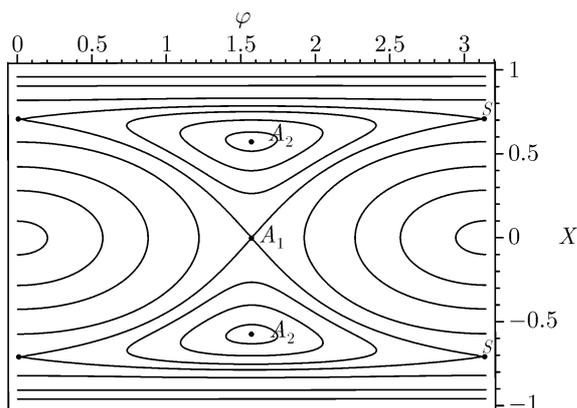


Рис. 8. Фазовый портрет приведенной системы при $n = 2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ и исключительном значении $I = 1$.

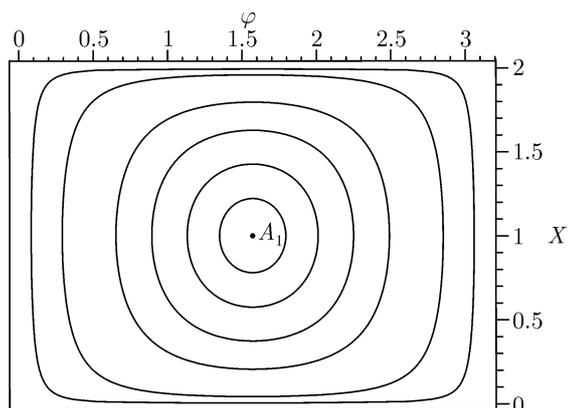


Рис. 9. Фазовый портрет приведенной системы при $n = 2$, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ и исключительном значении $I = 0$.

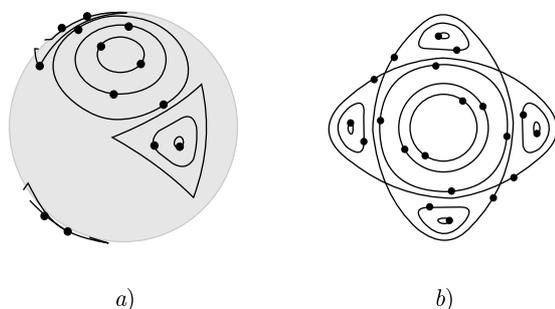


Рис. 10. Характерный вид траекторий вихрей в случае $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $I = \Gamma_1$. а) — общий вид, б) — вид сверху. (Кривые одного и того же размера соответствуют одному и тому же решению приведенной системы (3.4).)

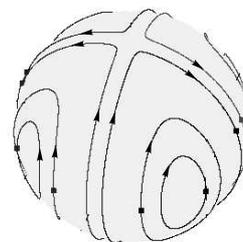


Рис. 11. Характерный вид траекторий вихрей при $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, $I = 0$.

Список литературы

- [1] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей*. Университ. типография, 1898.
- [2] Aref H. *Point vortex motions with a center of symmetry* // Phys. Fluids, 1982, Vol. 25, № 12, p. 2183–2187.
- [3] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics. IV. Classification of algebra of n vortices on a plane. Solvable problems of vortices dynamics. Algebraization and reduction in a three-body problem* // Reg. & Ch. Dynamics, 1999, Vol. 4. № 1. p. 23–50.
- [4] Greenhill A. G. *Plane vortex motion* // Quart. J. Pure Appl. Math., 1877/78, Vol. 15, № 58, p. 10–27.
- [5] Gröbli W. *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* // Viertel. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich., 1877, B. 22, S. 37–81, 129–165.
- [6] Havelock T. H. *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation* // Phil. Mag., Ser. 7, 1931, Vol. 11, № 70, p. 617–633.

- [7] Koiller J., Pinto de Carvalho S., Rodrigues da Silva R., Goncalves de Oliveira C. *On Aref's vortex motion with a symmetry center* // *Physica D*, 1985, Vol. 16, p. 27–61.
- [8] Laurent-Polz F. *Relative periodic orbits in point vortex systems* // *Nonlinearity*, 2004, Vol. 17, p. 1989–2013.
- [9] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.
- [10] Soulière A., Tokieda T. *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry* // *J. Fluid Mech.*, 2002, Vol. 460, p. 83–92.