

О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой

Г. М. Розенблат

Московский автомобильно-дорожный институт
(Государственный технический университет)
125319, Москва, Ленинградский проспект, 64

Получено 16 ноября 2006 г.

Изучается задача о безотрывном движении (качении) плоской пластинки, ограниченной произвольным выпуклым контуром, по прямой при наличии сухого трения. К пластинке приложена произвольная плоская система сил, а связь в точке ее контакта с прямой предполагается односторонней. Дана полная классификация переходов движений со скольжением в движения чистого качения и наоборот при безотрывном движении пластинки. Получены достаточные условия безотрывного движения тела. Полученные результаты применяются для задачи о движении неоднородного круглого диска по горизонтальной шероховатой прямой в вертикальной плоскости в поле силы тяжести и движении тонкого стержня по шероховатой прямой в поле силы тяжести.

Ключевые слова: качение, сухое трение, односторонняя связь

G. M. Rozenblat

On the motion of a two-dimensional rigid body on a rough straight line

We study the motion (rolling motion) of a flat plate whose boundary is an arbitrary convex curve along a straight line. During the motion the plate is always in contact with the supporting line and subject to a dry friction. Plus, the plate is acted on by an arbitrary plane system of forces and at the point of contact only the unilateral constraint is assumed. All possible transitions from a rolling motion with slipping to a pure rolling without slipping and vice versa are classified. Necessary conditions for the plate to remain in contact with the line are obtained. The results obtained are used to study 1) the motion of a non-uniform circular disk, subject to gravity, on a rough horizontal straight line in the vertical plane and 2) the motion of a slender rod, subject to gravity, on a rough straight line.

Keywords: rolling motion, dry friction, unilateral constraint

Mathematical Subject Classifications: 37N15

I. Постановка задачи

Рассматривается задача о движении плоской пластинки по шероховатой прямой под действием произвольной плоской системы сил. Пластинка ограничена выпуклым контуром, который описывается достаточно гладкой функцией (см. рис. 1). Связь в точке контакта P пластинки с прямой предполагается односторонней (неудерживающей), а сила реакции в точке P подчиняется условиям закона сухого трения, т. е. закону Кулона:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -fN \cdot \mathbf{v}_P / |\mathbf{v}_P|, & \text{при } v_P \neq 0, \\ |\mathbf{F}| &\leq fN, & \text{при } v_P = 0, \\ N &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{v}_P — скорость точки контакта P вдоль оси O_*x , т. е. вдоль опорной прямой, \mathbf{N} — нормальная сила реакции, направленная параллельно оси O_*y , \mathbf{F} — касательная сила реакции (сила трения), направленная вдоль оси O_*x , f — коэффициент трения (покоя и скольжения, которые мы предполагаем одинаковыми) (рис. 1). Отметим, что при $v_P = 0$ направление и величина касательной силы \mathbf{F} являются, вообще говоря, неопределенными и только выполняется неравенство из (1.1).

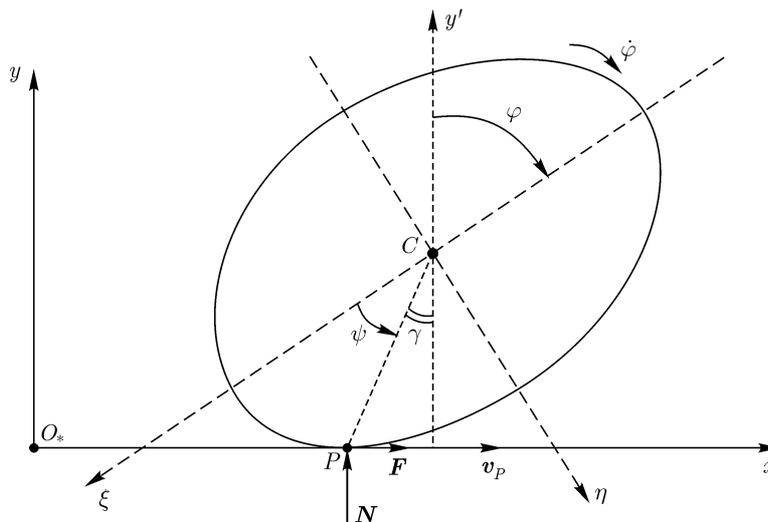


Рис. 1. Качение пластинки по шероховатой прямой. O_*xy — неподвижная система координат; C — центр масс; P — точка контакта; $C\xi\eta$ — система координат, жестко связанная с пластинкой; \mathbf{v}_P — скорость точки контакта P ; \mathbf{F} — касательная сила реакции; \mathbf{N} — нормальная сила реакции

В данной работе изучаются *безотрывные* движения пластинки, для которых соблюдается неравенство $N \geq 0$ из (1.1). Устанавливаются условия, при которых безотрывное движение пластинки является однозначно определенным без парадоксальных ситуаций, описанных Пэн-леве [1]. Даны достаточные условия, при которых движение пластинки является безотрывным в течение *всего* интервала времени этого движения. Отметим, что описанная задача рассматривалась ранее в работе Е. А. Болотова [2] с геометрической точки зрения, поэтому полученные в этой работе результаты являются не совсем конструктивными и неудобными для практического применения.

II. Уравнения движения

На рис. 1 изображен контур (пластинка), который катится вдоль неподвижной прямой O_*x . O_*xy — неподвижная прямоугольная система координат, C — центр масс пластинки, $C\xi\eta$ — прямоугольная система координат, жестко связанная с пластинкой, P — точка касания контура с прямой O_*x , φ — угол собственного поворота пластинки, т. е. это угол, образуемый осью $C\xi$ с осью O_*y и отсчитываемый по часовой стрелке (см. рис. 1). Введем в системе $C\xi\eta$ полярные координаты r, ψ , тогда уравнение контура будет представляться известной функцией $r = r(\psi)$ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$), относительно которой (помимо выпуклости) будем предполагать достаточную гладкость (например, это может быть эллипс, причем C не обязательно есть его центр). Пусть r, ψ — текущие полярные координаты точки P контура пластинки, которая в данный момент касается опорной прямой, x, y — координаты центра масс C пластинки в системе координат O_*xy . Тогда для скорости точки P имеем выражения:

$$v_{Px} = \dot{x} - r\dot{\varphi} \cos \gamma, \quad v_{Py} = \dot{y} + r\dot{\varphi} \sin \gamma, \quad \gamma = \varphi - \psi, \quad (2.1)$$

Если пластинка движется по O_*x с проскальзыванием, то

$$v_{Px} = v \neq 0, \quad v_{Py} = 0. \quad (2.2)$$

Если происходит чистое качение, то

$$v_{Px} = v = 0, \quad v_{Py} = 0. \quad (2.3)$$

Пусть $v \neq 0$. Из условия $v_{Py} = 0$ имеем связь:

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \gamma.$$

Тогда из (2.1) и (2.2) имеем

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \gamma + r'_\psi \frac{d\psi}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{d\psi}{d\varphi}\right) \sin \gamma + \dot{v}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \gamma - r'_\psi \frac{d\psi}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 \sin \gamma - r\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{d\psi}{d\varphi}\right) \cos \gamma. \quad (2.5)$$

Так как ось O_*x — касательная к контуру, то в системе $C\xi\eta$ имеем

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\operatorname{ctg} \varphi.$$

Используя полярные координаты r и ψ , отсюда получим

$$\frac{r'_\psi \sin \psi + r \cos \psi}{r'_\psi \cos \psi - r \sin \psi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Решая это уравнение относительно r'_ψ , получаем равенство

$$r'_\psi = -r \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad (2.6)$$

Отметим, что равенство (2.6) справедливо при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$, кроме того, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, так как контур является выпуклым, т. е. он весь лежит по одну сторону от касательной. Используя (2.6), мы получаем из (2.4) и (2.5)

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v}, \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + r\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{\cos \gamma} \frac{d\psi}{d\varphi} - \cos \gamma \right). \quad (2.8)$$

Далее, по определению кривизны k плоской кривой имеем $k = d\alpha/ds$, где α — угол, образуемый касательной O_*x с положительным направлением оси $C\xi$, s — длина дуги кривой. Тогда имеем для радиуса кривизны R контура в точке P :

$$R = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{d\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{d\psi}{d\varphi} \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Отсюда, используя (2.6), получим

$$R = \frac{r}{\cos \gamma} \frac{d\psi}{d\varphi}. \quad (2.9)$$

В формуле (2.9) знак модуля можно не использовать, так как $\cos \gamma > 0$ при $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, а ψ и φ мы предполагаем монотонно возрастающими функциями времени. Используя равенство (2.9), мы получим из (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v}, \\ \ddot{y} &= -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2 (R - r \cos \gamma). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть X, Y — главный вектор плоской системы сил, приложенных к пластинке, M — главный момент этих сил относительно центра масс C (кроме сил \mathbf{F} и \mathbf{N}). Тогда, предполагая массу пластинки $m = 1$, ρ — радиус ее инерции относительно точки C , мы получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v} &= F + X, \\ -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2 (R - r \cos \gamma) &= N + Y, \\ \rho^2 \ddot{\varphi} &= r(N \sin \gamma - F \cos \gamma) + M, \\ N &\geq 0, \quad F = -fN \cdot \operatorname{sgn} v. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отметим, что $v > 0$, если пластинка проскальзывает по оси O_*x , $v < 0$, если она проскальзывает против оси O_*x .

Разрешая уравнения (2.11) относительно величин $\ddot{\varphi}$, N , \dot{v} , мы получим:

$$\ddot{\varphi} = \frac{rh}{W}U + \frac{M}{\rho^2}, \quad (2.12)$$

$$N = \frac{\rho^2 U}{W}, \quad (2.13)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{W}(\dot{\varphi}^2 A + B), \quad (2.14)$$



где введены обозначения:

$$\begin{aligned} h &= \sin \gamma + f\varepsilon \cos \gamma, \quad W = \rho^2 + r^2 h \sin \gamma, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} v, \\ U &= \dot{\varphi}^2 (R - r \cos \gamma) - Y - \frac{r \sin \gamma}{\rho^2} M, \\ A &= -f\varepsilon \rho^2 (R - r \cos \gamma) - r^2 R h \cos \gamma + r \rho^2 \sin \gamma + r^3 h, \\ B &= Y (f\varepsilon \rho^2 + r^2 h \cos \gamma) + X \cdot W + Mr (f\varepsilon \sin \gamma - \cos \gamma). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Уравнения движения в случае чистого качения (без проскальзывания) получаются из (2.11) при $\dot{v} = 0$ и другого соотношения для силы F :

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma &= F + X, \\ -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2 (R - r \cos \gamma) &= N + Y, \\ \rho^2 \ddot{\varphi} &= r(N \sin \gamma - F \cos \gamma) + M, \\ N &\geq 0, \quad |F/N| \leq f. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Разрешая уравнения (2.16) относительно $\ddot{\varphi}$, F , N , мы получаем соотношения:

$$\ddot{\varphi} = d \cdot [\dot{\varphi}^2 r R \sin \gamma + r(X \cos \gamma - Y \sin \gamma) + M], \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} N &= d \cdot \{ \dot{\varphi}^2 [(r^2 + \rho^2)(R - r \cos \gamma) - Rr^2 \sin^2 \gamma] - \\ &\quad - Y(\rho^2 + r^2 \cos^2 \gamma) - Xr^2 \sin \gamma \cos \gamma - Mr \sin \gamma \}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} F &= d \cdot \{ \dot{\varphi}^2 \sin \gamma [r^2 R \cos \gamma - r(r^2 + \rho^2)] - \\ &\quad - Yr^2 \sin \gamma \cos \gamma - X(\rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma) + Mr \cos \gamma \}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{где } d = 1/(\rho^2 + r^2).$$

Таким образом, движение пластинки описывается системой уравнений (2.11) или (2.16), в зависимости от функции $v(t)$ — скорости точки касания P . Решения системы (2.11) при $v > 0$ будем называть движениями 1-го рода, а соответствующим величинам $\ddot{\varphi}$, N и \dot{v} из (2.12)–(2.14) приписывать индекс 1, решения системы (2.11) при $v < 0$ будем называть движениями 2-го рода и присваивать величинам $\ddot{\varphi}$, N , \dot{v} из (2.12)–(2.14) индекс 2, а решения системы (2.16) — это движения 3-го рода, причем будем присваивать соответствующим величинам $\ddot{\varphi}$, N , F из (2.17)–(2.19) индекс 3.

Так как мы рассматриваем лишь безотрывные движения пластинки, то в движениях 1, 2 и 3 родов мы полагаем выполненными неравенства $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$ или $N_3 \geq 0$. Кроме того, так как связь неударная, то необходимо корректно определить начальные условия. Пусть t — какой-либо момент безотрывного движения пластинки (в частности, это может быть и начальный).

Определение. Состояние $\{\varphi(t), \dot{\varphi}(t), v(t)\}$ безотрывного движения пластинки называется *корректным*, если оно является результатом решения системы (2.11) или системы (2.16) (при $v(t) = 0$) на интервале $(t - \delta, t)$, где $\delta > 0$ — достаточно мал.

Таким образом, начальное условие $\{\varphi(0), \dot{\varphi}(0), v(0)\}$ или любое текущее состояние $\{\varphi(t), \dot{\varphi}(t), v(t)\}$ для *безотрывного* движения пластинки мы называем корректным, если имеется *предыстория* этого состояния (начального условия) в виде *безотрывного* движения пластинки (со скольжением или без). В противном случае, вообще говоря, реализуется «заход» на связь и движение пластинки должно описываться с привлечением дополнительных уравнений движения (без связи) и элементов теории удара с трением. Такие задачи рассматриваются в работах А. П. Иванова [3, 4].

III. Формулировка результатов

Пусть в некоторый момент времени $t = t_*$ реализовалось корректное (в смысле определения п. II) состояние безотрывного движения пластинки. Сформулируем утверждения, касающиеся движения пластинки при $t > t_*$. Везде далее используем обозначения:

$$U = \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) - Y - \frac{1}{\rho^2}Mr \sin \gamma,$$

$$W_0 = \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma - r^2 f|\mu|, \quad \mu = \sin \gamma \cos \gamma,$$

где все переменные величины рассматриваются при $t = t_*$.

Теорема 1. Пусть $U \neq 0$. Тогда справедливы утверждения, приведенные в таблице 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из таблицы 1, при соблюдении условия $U > 0$ в течение всего времени движения пластинки это движение является *однозначным* и *безотрывным*. При $U < 0$ однозначность сохраняется, однако возможны отрывы пластинки от опорной прямой (см. строчки (6) и (7)). Таблица 1 дает полную и однозначную классификацию переходов движений 1, 2 и 3 рода друг в друга при $U \neq 0$. Причем в некоторых случаях (строчки (1), (6), (7)) переход в тот или иной род движения зависит от поведения функции $\dot{v}(t)$ в *окрестности* нуля. Этот факт был также указан Е. А. Болотовым [2]. Подробнее об этих случаях будет сказано при доказательстве теоремы 1.

Следующее утверждение касается классификации переходов движений 1, 2, 3 родов друг в друга в особом случае, когда $U(t_*) = 0$. Здесь все определяется поведением функции $U(t)$ в окрестности точки $t = t_*$, точнее первой ее ненулевой производной (см. рис. 2). Отметим, что производные функции $U(t)$ вычисляются в силу движений при $t \leq t_*$, т. е. уравнений (2.11) или (2.16), которые определяют предысторию рассматриваемого состояния.

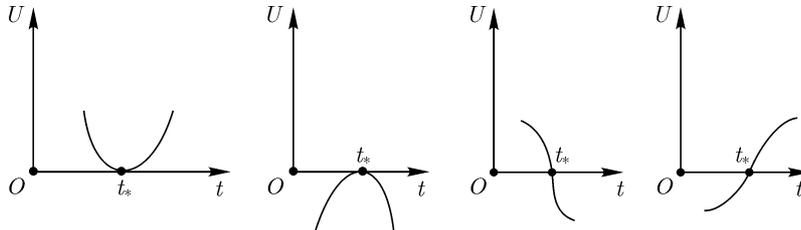


Рис. 2. Различные случаи поведения функции $U(t)$ в окрестности точки $t = t_*$, для которой $U(t_*) = 0$

Теорема 2. Пусть $U = 0$. Тогда справедливы утверждения, приведенные в таблице 2.

Доказательства теорем 1, 2 приведены в п. V.

IV. Некоторые частные случаи

В данном пункте рассматриваются приложения полученных результатов для движения неоднородного круглого диска и тонкого стержня.

а) Неоднородный диск в поле силы тяжести

Схема представлена на рис. 3. В данном случае имеем: $X = 0, Y = -g, M = 0, r \sin \gamma = a \sin \varphi, r \cos \gamma = R + a \cos \varphi$, где $a = OC, R$ — радиус диска, который является его радиусом



Таблица 1. К формулировке теоремы 1.

$U > 0$	$v = 0$			при $t > t_*$ движение 1, 2 или 3 рода, причем только одно	(1)	
	$v \neq 0$	$W_0 > 0$		при $t > t_*$ движение 1 или 2 рода, причем только одно	(2)	
		$W_0 \leq 0$	$\mu > 0$		1) $v > 0$, тогда при $t > t_*$ движение 1 рода; 2) $v < 0$ — <i>некорректное</i> состояние	(3)
	$\mu < 0$				1) $v > 0$ — <i>некорректное</i> состояние; 2) $v < 0$, тогда при $t > t_*$ движение 2 рода	(4)
$U < 0$	$v = 0$	$W_0 \geq 0$		<i>некорректное</i> состояние	(5)	
		$W_0 < 0$	$\mu > 0$		1) из движения 2 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_2(t_*) > 0$ при $t > t_*$ будет <i>отрыв</i> ; 2) из движения 2 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_2(t_*) = 0$ при $t > t_*$ будет движение 1 или 3 рода и только одно; 3) из движения 3 рода при $t \leq t_*$ будет при $t > t_*$ движение 2 или 3 рода и только одно	(6)
	$\mu < 0$			1) из движения 1 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_1(t_*) < 0$ при $t > t_*$ будет <i>отрыв</i> ; 2) из движения 1 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_1 = 0$ при $t > t_*$ будет движение 2 или 3 рода и только одно; 3) из движения 3 рода при $t \leq t_*$ будет при $t > t_*$ движение 1 или 3 рода и только одно	(7)	
	$v \neq 0$	$W_0 \geq 0$		<i>некорректное</i> состояние	(8)	
		$W_0 < 0$	$\mu > 0$		1) $v > 0$ — <i>некорректное</i> состояние; 2) $v < 0$ — при $t \geq t_*$ будет движение 2 рода	(9)
			$\mu < 0$			1) $v > 0$ — при $t \geq t_*$ будет движение 1 рода; 2) $v < 0$ — <i>некорректное</i> состояние

Таблица 2. К формулировке теоремы 2

$U = 0$	$v = 0$	<p>а) $U^{(2k)}(t_*) > 0$, аналогично строке (1) таблицы 1;</p> <p>б) $U^{(2k)}(t_*) < 0$, аналогично строкам (5), (6), (7) таблицы 1;</p> <p>в) $U^{(2k-1)}(t_*) < 0$: если $W_0 > 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>если $W_0 > 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет движение 2 рода;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет движение 1 рода;</p> <p>г) $U^{(2k-1)}(t_*) > 0$: если $W_0 > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 2 рода будет движение 1 рода;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 1 рода будет движение 2 рода;</p>
$U = 0$	$v \neq 0$	<p>а) $U^{(2k)}(t_*) > 0$, аналогично строкам (2), (3), (4) таблицы 1;</p> <p>б) $U^{(2k)}(t_*) < 0$, аналогично строкам (8), (9), (10) таблицы 1;</p> <p>в) $U^{(2k-1)}(t_*) < 0$: если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i> при $v > 0$, если $v < 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i> при $v < 0$, если $v > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 > 0$, то из движения 1 или 2 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>г) $U^{(2k-1)}(t_*) > 0$: если $W_0 > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i> при $v < 0$, если $v > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i> при $v > 0$, если $v < 0$, то состояние <i>некорректно</i>.</p>

$X = 0, M = 0, Y = -g$. Подставляя эти величины в выражение для U из (2.15), получим:

$$U = g - \dot{\varphi}^2 l \cos \varphi.$$

Достаточное условие безотрывного движения стержня $U > 0$.

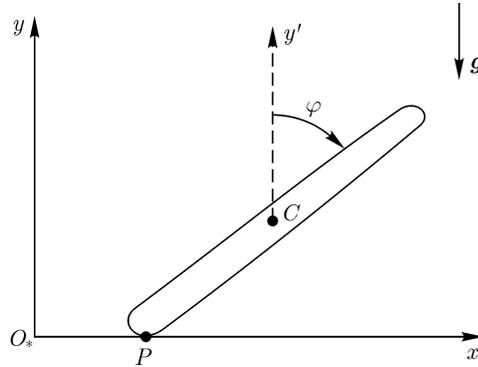


Рис. 4. Падение стержня в поле силы тяжести. $PC = l, R \approx 0, r \approx l, \psi \approx 0, \gamma \approx \varphi$

Справедливо утверждение.

Теорема 4. Пусть начальные условия для стержня выбраны корректно (см. определение II) и удовлетворяют условию:

$$2T_0 l \cos \varphi_0 < g[\rho^2 + l^2 \sin^2 \varphi_0], \quad (4.2)$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2} [(v_0 + l\dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0)^2 + (l\dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0)^2].$$

Тогда $U > 0$ для всех t , а движение стержня является безотрывным в течение всего времени, пока оно происходит.

Доказательство теоремы 4 приведено в п. V.

Пусть движение стержня начинается из состояния верхнего (неустойчивого) положения равновесия $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, v(0) = v_0 = 0$. Тогда $T_0 = 0$ и условие (4.2) выполнено, т. е. движение стержня является безотрывным вплоть до момента его падения на опорную прямую.

V. Обоснование результатов

Доказательство теорем 1 и 2 основывается на следующих утверждениях.

Лемма 1. Для функции \dot{v} , определяемой формулами (2.14), (2.15), имеет место тождество:

$$\dot{v} = -\frac{\rho^2 + r^2}{W} (F_3 + f\varepsilon N_3), \quad (5.1)$$

где W, F_3, N_3 даются формулами из (2.15), (2.18), (2.19), $\varepsilon = \operatorname{sgn} v$.



В индексных обозначениях соотношение (5.1) эквивалентно равенствам

$$\dot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1}(F_3 + fN_3), \quad v > 0, \quad (5.2)$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_2}(F_3 - fN_3), \quad v < 0, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma + r^2 f \sin \gamma \cos \gamma, \\ W_2 &= \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma - r^2 f \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Лемма 2. *Имеет место тождество:*

$$F_3 - f_0 N_3 = -h_0 U, \quad (5.5)$$

где U дается формулой из (2.15),

$$f_0 = \frac{\rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma}{r^2 \mu}, \quad h_0 = \frac{\rho^2}{r^2 \mu}, \quad \mu = \sin \gamma \cos \gamma. \quad (5.6)$$

Лемма 3. *а) Если $\dot{v}_1 = 0$, то $N_1 = N_3$, $F_3 = -fN_3$, $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_3$. б) Если $\dot{v}_2 = 0$, то $N_2 = N_3$, $F_3 = fN_3$, $\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3$.*

Справедливость сформулированных лемм устанавливается непосредственной проверкой с использованием формул (2.15), (2.18), (2.19).

Доказательство теорем 1 и 2 осуществляется при помощи перебора всех возможных вариантов предыдущих (при $t \leq t_*$) движений пластинки и последующих (при $t > t_*$), в результате чего устанавливается однозначность последующего *безотрывного* движения либо возможность отрыва пластинки от опоры (или некорректность рассматриваемой ситуации).

Рассмотрим подробно строчку (1) таблицы 1. Пусть при $t \leq t_*$ было движение 1 рода ($v > 0$). Тогда в соответствии с (5.2) имеем $\dot{v}_1 \leq 0$ и если $W_1 > 0$, то $F_3 + fN_3 \geq 0$. Если выполнено строгое неравенство $\dot{v}_1 < 0$, то

$$F_3 + fN_3 > 0. \quad (5.7)$$

Пусть $\mu > 0$, тогда h_0, f_0 из (5.6) будут положительны и из (5.5) (так как $U > 0$) имеем неравенство

$$F_3 - f_0 N_3 < 0. \quad (5.8)$$

Из (5.7) и (5.8) имеем:

$$-fN_3 < F_3 < f_0 N_3,$$

т. е. $N_3 > 0$ (так как $f > 0, f_0 > 0$). Если $|F_3/N_3| > f$, то движение 3 рода невозможно (несмотря на то, что $N_3 > 0$!). Тогда $F_3^2 - f^2 N_3^2 > 0$. Если $W_2 > 0$, то, перемножая равенства (5.2) и (5.3), получим:

$$\dot{v}_1 \dot{v}_2 = \frac{(\rho^2 + r^2)^2}{W_1 W_2} (F_3^2 - fN_3^2) > 0.$$

Отсюда, так как $\dot{v}_1 < 0$, получим $\dot{v}_2 < 0$, т. е. реализуется движение 2 рода. Если $W_2 < 0$, то из (5.4) получаем $f > f_0$. Тогда из (5.8), так как $N_3 > 0$, получаем $0 > F_3 - f_0 N_3 > F_3 - fN_3$. Отсюда и из неравенства (5.7) получаем:

$$-f < \frac{F_3}{N_3} < f,$$

т. е. реализуется движение 3 рода, а движение 2 рода не может быть реализовано, так как для него $N_2 = \rho^2 U / W_2 < 0$ ($U > 0$, $W_2 < 0$). Аналогично рассматривается случай $\mu < 0$. Далее, если $\dot{v}_1 = 0$, то в соответствии с леммой 3 имеем $N_3 = N_1 > 0$, $F_3 = -fN_3$, т. е. движение 3 рода может начаться. Кроме того, из (5.2) получим $F_3 = -fN_3$, а из (5.3) имеем:

$$\dot{v}_2 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_2}(-2fN_3) = \frac{2f(\rho^2 + r^2)}{W_2}N_3.$$

Если $W_2 > 0$, то, так как $N_3 > 0$, будет $\dot{v}_2 > 0$, т. е. движение 2 рода не может быть реализовано. А ежели $W_2 < 0$, то $N_2 = \rho^2 U / W_2 < 0$, т. е. опять движение 2 рода не реально. Таким образом, осталось сделать выбор между движениями 1 рода и 3 рода. Мы имеем:

$$\dot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1}(F_3 + fN_3) = 0.$$

Продифференцируем это равенство до тех пор, пока не получится первая ненулевая производная функции \dot{v} . Пусть, например, достаточно продифференцировать один раз:

$$\ddot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1}(\dot{F}_3 + f\dot{N}_3) \neq 0$$

(отметим, что все производные берутся в точке $t = t_*$). Если $\ddot{v}_1 > 0$, то реализуется движение 1 рода. При этом

$$\dot{F}_3 + f\dot{N}_3 < 0 \rightarrow (F_3/N_3)' < 0,$$

а так как $F_3/N_3 = -f$, то ясно, что движение 3 рода не может состояться в последующем движении. А если $\ddot{v}_1 < 0$, то ситуация становится противоположной: движение 1 рода не может быть реализовано (из точки $v = 0$!), а в силу неравенства

$$\dot{F}_3 + f\dot{N}_3 > 0 \rightarrow (F_3/N_3)' > 0$$

и так как $F_3/N_3 = -f$, то выполнены условия для движения 3 рода. Совершенно аналогично рассматриваются другие ситуации. Мы видим, что при $\dot{v} = 0$ (и $v = 0$) возможно либо предыдущее движение, либо движение 3 рода. А вот при $\dot{v} \neq 0$ (и $v = 0$) возможен переход либо в противоположное движение, либо в движение 3 рода.

Далее, строчки (2), (3), (4) рассматриваются без труда, так как при $v \neq 0$ выбор нужно делать только между движениями 1 и 2 родов, что получается с использованием формул (5.2), (5.3) и (5.5). Рассмотрим вторую часть таблицы 1, т. е. $U < 0$. Строчка (5) доказывается просто, так как при $W_0 \geq 0$ имеем $W_1 > 0$, $W_2 > 0$, тогда при $U < 0$ получим $N_1 < 0$, $N_2 < 0$, т. е. предыдущее движение ни 1, ни 2 рода. Из (5.5) при $U < 0$ и $\mu > 0$ имеем $F_3 - f_0 N_3 > 0$. Если предыдущее состояние было 3 рода, то $N_3 > 0$ и мы получили бы $F_3 > f_0 N_3 \rightarrow F_3/N_3 > f_0 > f$ (так как при $W_0 > 0$ имеет место неравенство $f_0 > f$). Последнее неравенство говорит о нереализуемости качения, т. е. движения 3 рода. Таким образом, состояние некорректно. Аналогично доказывается некорректность при $\mu < 0$.

Рассмотрим строчку (6). Ясно, что при $W_2 < 0$ и $U < 0$ возможно только движение 2 или 3 рода. Если предыдущее движение 2 рода, то $\dot{v}_2 \geq 0$. Пусть $\dot{v}_2 > 0$ (строго). Тогда из (5.3) при $W_2 < 0$ получим $F_3 - fN_3 > 0$. Если $N_3 > 0$, то $F_3/N_3 > f$, т. е. 3 рода нет. А 1 рода нет, так как $N_1 = \rho^2 U / W_1 < 0$ при $U < 0$ и $W_1 > 0$. Покажем, что в этом случае пластинка перестает контактировать с опорной прямой (отходит от нее вверх по оси O_*y). Пусть P_* —

место контакта на прямой O_*x в рассматриваемый момент времени t_* . Рассматривая движение точки P_* как сложное относительно системы $C\xi\eta$, мы получим:

$$a_{P_*y} = \ddot{y} + r\dot{\varphi}^2 \cos \gamma + r\ddot{\varphi} \sin \gamma - 2\dot{\varphi}v_r + \frac{v_r^2}{R},$$

где v_r — относительная скорость точки P_* в системе $C\xi\eta$, ясно, что $v_r = R\dot{\varphi}$, где R — радиус кривизны контура. Тогда имеем:

$$a_{P_*y} = \ddot{y} + r\dot{\varphi}^2 \cos \gamma - R\dot{\varphi}^2 + r\ddot{\varphi} \sin \gamma.$$

Так как $N_1 < 0$, т. е. прямая не действует на пластинку, то мы полагаем $N_1 = 0$ и $F_1 = -fN_1 = 0$. Тогда $\ddot{y} = Y$, $\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho^2}M$, т. е. имеем:

$$a_{P_*y} = Y - \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) + \frac{1}{\rho^2}Mr \sin \gamma = -U > 0,$$

т. е. действительно пластинка будет отходить от опорной прямой. Отметим, что когда имеется контакт, то положительная нормальная реакция устанавливается именно такой, чтобы $a_{P_*y} = 0$, а это обеспечивает контакт.

Остальные пункты строчки (6) рассматриваются аналогично предыдущему. Строчка (7) полностью симметрична строчке (6), а строчки (8), (9) и (10) устанавливаются без труда, так как выбор нужно делать лишь между движениями 1 и 2 родов.

Доказательство теоремы 2 почти аналогично доказательству теоремы 1, нужно только выполнять необходимое число дифференцирований соотношений (5.2), (5.3) и (5.5). Подробно доказательство здесь не приводится.

Доказательство теорем 3 и 4

Справедливость утверждений теорем 3 и 4 следует из теоремы об изменении кинетической энергии, записанной в форме

$$T - T_0 = A_{\text{тр}} + A_g,$$

где T_0 — начальная кинетическая энергия, T — текущее ее значение, $A_{\text{тр}}$ — работа силы трения, которая всегда неположительна, A_g — работа силы тяжести. Тогда получим оценку:

$$T < T_0 + A_g. \quad (5.9)$$

Далее

$$T = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2) > \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}v_{C_y}^2. \quad (5.10)$$

Для стержня $v_{C_y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi$, для неоднородного диска $v_{C_y} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi$. Из (5.9) и (5.10) получаем оценку сверху для $\dot{\varphi}^2$, которую затем используем для оценки снизу величины $U = g - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$ для диска и величины $U = g - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$ для стержня. Требование, чтобы эта оценка была больше нуля и приводит к результатам, сформулированным в теоремах 3 и 4.

Список литературы

- [1] Пэнлеве П. *Лекции о трении*. М.: Гостехиздат, 1954, 316 с.
- [2] Болотов Е. А. *О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением*. М.: Университетская типография, Страстной бульвар, 1906, 147 с.
- [3] Иванов А. П. *О безударных прыжках неоднородного колеса*. 1. *Случай гладкой опоры* // Изв. РАН, МТТ, 1992, № 1, с. 25–31.
- [4] Иванов А. П. *О безударных прыжках неоднородного колеса*. 2. *Шероховатая опора* // Изв. РАН, МТТ, 1993, № 1, с. 61–64.
- [5] Розенблат Г. М. *Об одной задаче динамики твердого тела при наличии сил сухого трения*. Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 26 / Под ред. акад. МАН ВШ Ю. Г. Мартыненко. М.: Изд-во Московского университета, 2006, с. 113–120.
- [6] Литлвуд Дж. *Математическая смесь*. М.: Наука, 1965, 150 с.