УДК 531.3

Устойчивость стационарных вращений в неголономной задаче Рауса*

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, aka@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 4 октября 2006 г.

В работе указан новый интеграл в задаче о движении динамически симметричного шара по поверхности параболоида в поле тяжести. С помощью этого интеграла получены условия устойчивости по Ляпунову стационарных вращений шара вокруг вертикали при условии, что точка контакта расположена в наивысшей, наинизшей или седловой точке параболоида.

Ключевые слова: неголономная связь, стационарные вращения, устойчивость.

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev
Stability of steady rotations in the non-holonomic Routh problem

We have discovered a new first integral in the problem of motion of a dynamically symmetric ball, subject to gravity, on the surface of a paraboloid. Using this integral, we have obtained conditions for stability (in the Lyapunov sense) of steady rotations of the ball in the upmost, downmost and saddle point.

Keywords: nonholonomic constraint, stationary rotations, stability.
Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E40, 37J35

*Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (НШ–1312.2006.1), при поддержке РФФИ (04–05–64367, 05–01–01058), CRDF (RU–M1–2583–M0–04) и INTAS (04–80–7297).

В своем фундаментальном трактате [6] Э. Дж. Раус рассмотрел общие уравнения движения качения без проскальзывания симметричного шара по произвольной поверхности и выделил ряд особых случаев, в которых эти уравнения могут быть разрешены в квадратурах. Он также разрешил ряд вопросов, связанных с устойчивостью некоторых стационарных движений.

В этой работе мы остановимся подробно на задаче о движении шара по поверхности несимметричного параболоида в поле тяжести. При этом будем предполагать, что скорость шара в точке контакта равна нулю, т. е. справедлива неголономная модель движения шара (или качения без проскальзывания). В такой системе отсутствует трение и сохраняется интеграл энергии. Всюду в дальнейшем будем считать, что по параболоиду движется центр масс шара. При этом точка контакта будет двигаться по эквидистантной поверхности. Также обсудим вкратце вопрос о движении шара по поверхности, являющейся возмущением параболоидальной.

Как показал Раус [6], задача о качении шара по поверхности вращения при наличии осесимметричных полей является интегрируемой. Как будет показано далее, задача о качении шара по произвольной аналитической поверхности уже обладает хаотическим поведением и для ее интегрируемости не хватает еще двух дополнительных интегралов. При этом один дополнительный интеграл может существовать при ограничениях на форму поверхности и потенциал силового поля. Как показано в работе [2], этот интеграл существует в случае качения шара по поверхностям второго порядка в отсутствии внешних сил. В работе [10] приведено обобщение результата [2] на случай качения шара по трехосному эллипсоиду во внешнем потенциальном поле специального вида.

Оказывается, что один дополнительный интеграл существует также в задаче о движении точки по несимметричному параболоиду в поле тяжести, направленном вдоль его главной оси. Этот результат (как и результаты [2, 10]) имеет аналогию с задачей о движении материальной точки по соответствующим поверхностям. Хорошо известно, что задача об инерциальном движении материальной точки по поверхностям второго порядка является интегрируемой (задача Якоби о геодезических). Задача о движении точки по параболоиду в поле тяжести рассматривалась П. Пенлеве и С. А. Чаплыгиным (так называемая задача о параболоидном маятнике). Пенлеве указал дополнительный первый интеграл и тем самым установил интегрируемость системы. Чаплыгин решил вопрос о разделении переменных и качественно исследовал движение системы. В некотором смысле рассматриваемую нами задачу о качении шара можно назвать задачей о неголономном параболоидном маятнике. Ниже будет показано, что для интегрируемости этой системы не хватает всего одного дополнительного интеграла (а не двух, как в общем случае).

1. Уравнения движения шара по поверхности

В отличие от традиционного в динамике твердого тела подхода, при котором используется жестко связанная с телом система координат, при изучении движения однородного шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения изменения импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^{\cdot} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{F}}, \tag{1.1}$$

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта равна нулю) —

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь m — масса шара, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ — скорость его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ — (шаровой) центральный тензор инерции, $\boldsymbol{a}$ — вектор из центра масс в точку контакта, R —

радиус шара, $\boldsymbol{N}$ — реакция в точке контакта (см. рис. 1), $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}_F$ — внешняя сила и момент внешних сил относительно точки контакта соответственно. В случае потенциальных сил момент $\boldsymbol{M}_F$ выражается через потенциал $U(\boldsymbol{x})$, зависящий от положения центра масс шара, по формуле $\boldsymbol{M}_F = \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{a}$.

Исключая из этих уравнений реакцию $\boldsymbol{N}$ и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и координат центра масс шара $\boldsymbol{x}$

$$(\mu + mR^2)\dot{\boldsymbol{\omega}} = mR^2(\boldsymbol{\omega}, \gamma)\dot{\gamma} + \boldsymbol{M}_F, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\omega} \times R\gamma. \tag{1.3}$$

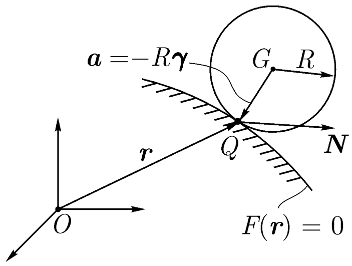

Рис. 1. Качение шара по поверхности (G — центр масс, Q — точка контакта с поверхностью)

Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ здесь определяет нормаль к поверхности в точке контакта и задается соотношением

$$\gamma = \frac{\nabla\Phi(\boldsymbol{x})}{|\nabla\Phi(\boldsymbol{x})|}, \tag{1.4}$$

где, следуя Раусу [6], уравнение $\Phi(\boldsymbol{x}) = 0$ задает поверхность, по которой движется *центр масс шара*. В работе [2] для исследования качения шара по поверхностям второго порядка используются вектор кинетического момента $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Однако используемые нами переменные $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{x}$ более удобны для обобщения полученного в [2] интеграла на рассматриваемый случай движения в поле тяжести.

2. Интегралы движения и мера

Уравнения (1.3) в случае потенциального поля с потенциалом $U(\boldsymbol{x})$ обладают интегралом энергии и очевидным геометрическим интегралом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{x}) = h = \mathrm{const}, \quad \Phi(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{2.1}$$

Помимо этих двух интегралов, в случае произвольной поверхности система обладает инвариантной мерой с плотностью (В. А. Ярощук [9])

$$\rho(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{x}) = |\nabla\Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)^2}. \tag{2.2}$$

В общем случае система (1.3) не обладает двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби), а ее поведение является хаотическим [2].

Рассмотрим подробнее динамику шара в поле тяжести при условии, что его центр масс движется по несимметричному параболоиду, задаваемому уравнением

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \mathbf{B}\boldsymbol{x}) - 2x_3 = 0, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(1/p, 1/q, 0)$, а p и q — главные радиусы кривизны параболоида.

Как показано в [2], в отсутствии внешних сил уравнения (1.3) с учетом (2.3) обладают дополнительным интегралом

$$F = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))|\nabla\Phi(\boldsymbol{x})|^2. \tag{2.4}$$

Оказывается, при добавлении силы тяжести ($U(\boldsymbol{x}) = mgx_3$), интеграл (2.4) допускает следующее обобщение

$$F = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},\, \mathbf{B}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))|\nabla\Phi(\boldsymbol{x})|^2 - \frac{4mg}{\mu + mR^2}(\boldsymbol{x}, \mathbf{B}^2\boldsymbol{x}). \tag{2.5}$$

3. Вертикальные вращения и их линейная устойчивость

Уравнения (1.3) допускают частное решение вида

$$\boldsymbol{x} = (0,\, 0,\, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = (0,\, 0,\, \Omega). \tag{3.1}$$

В зависимости от знаков p и q данное решение описывает вращение шара в наинизшей точке ($p > 0$ и $q > 0$), вращение шара на вершине параболоида ($p < 0$ и $q < 0$) и вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида ($pq < 0$).

Изложим сначала результаты Рауса [6] об устойчивости указанного решения в линейном приближении, сформулированные в трактате [6] как задача. Данное исследование более подробно приведено в работе на соискание премии Адамса[1] 1877 года [7]. Линеаризованные уравнения движения вблизи решения (3.1) имеют вид

$$\begin{gathered}
\delta\dot{\omega}_1 = \omega_2\frac{D\Omega R}{(\mu + D)p} + x_2\frac{R}{(\mu + D)q}(D\Omega^2/p - mg),\\
\delta\dot{\omega}_2 = -\omega_1\frac{D\Omega R}{(\mu + D)q} - x_2\frac{R}{(\mu + D)p}(D\Omega^2/q - mg),\\
\delta\dot{x}_1 = -R(x_2\Omega/q + \omega_2), \quad \delta\dot{x}_2 = R(x_1\Omega/p + \omega_2), \quad \delta\dot{x}_3 = 0, \quad \delta\dot{\omega}_3 = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Соответствующее характеристическое уравнение может быть записано в форме

$$\begin{gathered}
\lambda^2 P_4(\lambda) = 0,\\
P_4(\lambda) = \lambda^4 + \frac{R^2\left(mg\,(\mu + D)\,(q + p) + \mu^2\Omega^2\right)}{pq\,(\mu + D)^2}\lambda^2 + \frac{m^2g^2R^4}{pq\,(\mu + D)^2}.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Два нулевых собственных числа соответствуют интегралам движения. Для того чтобы в линейном приближении решение (3.1) было устойчивым, необходимо чтобы оставшиеся четыре собственных числа обладали неположительной действительной частью. Поскольку $P_4(\lambda)$ — в данном случае биквадратный полином, то это условие соответствует тому, что все его корни чисто мнимые.

1. $\boldsymbol{p} > 0$ *и* $\boldsymbol{q} > 0$ (вращение шара в наинизшей точке). В этом случае все корни полинома $P_4(\lambda)$ заведомо чисто мнимые, следовательно, вращение шара в точке минимума параболоида является устойчивым в линейном приближении при любых угловых скоростях.

[1] Премия «Критерий динамической устойчивости».

2. $\boldsymbol{p} < 0$ *и* $\boldsymbol{q} < 0$ (вращение шара на вершине параболоида). В этом случае условие линейной устойчивости принимает вид [6]

$$\mu^2\Omega^2 > mg(\mu + D)(\sqrt{|p|} + \sqrt{|q|})^2. \tag{3.4}$$

Таким образом, при достаточно больших угловых скоростях, вращение шара на вершине параболоида является устойчивым в линейном приближении (этот эффект называется гироскопической стабилизацией).

3. $\boldsymbol{pq} < 0$ (вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида). Свободный член полинома $P_4(\lambda)$ отрицательный, следовательно, вращение шара в седловой точке гиперболического параболоида является неустойчивым в линейном приближении.

4. Устойчивость по Ляпунову вращений в наинизшей точке

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решений (3.1) по Ляпунову в полной нелинейной постановке при условии $p > 0$, $q > 0$. (Заметим, что линейная неустойчивость при $pq < 0$ влечет за собой строгую неустойчивость.) Докажем сначала устойчивость вращений (3.1) относительно переменных $\boldsymbol{\nu} = (\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$. Для этого в качестве функции Ляпунова выберем квадратичную часть интеграла (2.5) при разложении его в ряд вблизи решения (3.1)

$$F_2 = (\boldsymbol{\nu}, \mathbf{L}\boldsymbol{\nu}), \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{8}{q} & 0 & \frac{8\Omega}{pq} & 0 \\ 0 & \frac{8}{p} & 0 & \frac{8\Omega}{pq} \\ \frac{8\Omega}{pq} & 0 & \frac{8\Omega^2}{qp^2} + \frac{8mg}{p^2\,(\mu + D)} & 0 \\ 0 & \frac{8\Omega}{pq} & 0 & \frac{8\Omega^2}{pq^2} + \frac{8mg}{q^2\,(\mu + D)} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Для положительной определенности функции F_2 необходимо выполнение следующих неравенств

$$q > 0, \quad pq > 0, \quad p^3q > 0, \quad p^3q^3 > 0. \tag{4.2}$$

В рассматриваемом случае $p > 0$, $q > 0$ функция (4.1) является положительно определенной. Таким образом, по теореме Ляпунова вращения (3.1) устойчивы относительно переменных $(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$.

Из ограниченности движений вблизи решения (3.1) относительно переменных $(\omega_1, \omega_2, x_1, x_2)$ и сохранения первых интегралов движения H и Φ следует ограниченность движений по всем шести переменным $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$. Следовательно, при вращении шара в низшей точке параболоида решения (3.1) устойчивы по Ляпунову в полной нелинейной постановке.

5. Устойчивость по Ляпунову вращений на вершине

Для случая вращения на вершине предыдущие построения, использующие функцию Ляпунова, уже не применимы. Однако результаты по устойчивости можно получить, используя элементы КАМ-теории (теорему Мозера об инвариантных кривых для отображений кольца).

Основные теоретические положения этого анализа изложены в приложении. Применим теорему 1 из приложения для доказательства устойчивости по Ляпунову перманентных вращений шара на вершине параболоида в случае $p, q < 0$ при условии (3.4) (т. е. в случае отсутствия неустойчивости в линейном приближении).

С помощью интеграла энергии и геометрического (2.1) исключим из уравнений ω_3 и x_3 на уровне энергии $E = \frac{1}{2}\mu\Omega^2$ систему вида (6.2) с $\xi = (x_1, x_2, w_1, w_2)$ и матрицей линейной части, определяемой соотношениями (3.2). Согласно теореме 1, необходимо вычислить коэффициенты нормальной формы системы α_μ, $\beta_{\mu v}$.

Параметризуем постоянные системы следующим образом:

$$\begin{gathered} p = -k_1^2, \quad q = -k_2^2, \quad \frac{\mu}{\mu + D} = \alpha, \\ \frac{mg}{\mu + D} = \frac{uv}{k_1 k_2}, \quad \frac{\mu^2\Omega^2}{(\mu + D)^2} = u^2 + v^2 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 k_2} uv, \end{gathered} \tag{5.1}$$

при этом $u, v > 0$ и заведомо выполнено условие (3.4). Подставляя в (3.3), находим собственные числа матрицы A, откуда

$$\alpha_1 = \frac{u}{k_1 k_2}, \quad \alpha_2 = \frac{v}{k_1 k_2}.$$

Перейдем к переменным ζ_μ, приводящим линейную часть к диагональной форме (т. е. к виду (6.3)); получим

$$\zeta_\mu = (\xi, v_\mu), \quad \mu = 1, 2, \tag{5.2}$$

где v_μ — собственные векторы A^T (т. е. $A^T v_\mu = i\alpha_\mu v_\mu$), для которых находим

$$v_1 = \left(-i\frac{\big(k_1 u + (1-\alpha)k_2 v\big)\sqrt{k_2(k_1 v + k_2 u)}}{\alpha k_1^4 k_2^3}, -\frac{\big((1-\alpha)k_1 v + k_2 u\big)\sqrt{k_1(k_1 u + k_2 v)}}{\alpha k_1^3 k_2^4}, i\frac{\sqrt{k_1(k_1 u + k_2 v)}}{k_1^2 k_2^2}, \frac{\sqrt{k_2(k_1 v + k_2 u)}}{k_1^2 k_2^2}\right),$$

$$v_2 = \left(-i\frac{\big(k_1 v + (1-\alpha)k_2 u\big)\sqrt{k_2(k_1 u + k_2 v)}}{\alpha k_1^4 k_2^3}, -\frac{\big((1-\alpha)k_1 u + k_2 v\big)\sqrt{k_1(k_1 v + k_2 u)}}{\alpha k_1^3 k_2^4}, i\frac{\sqrt{k_1(k_1 v + k_2 u)}}{k_1^2 k_2^2}, \frac{\sqrt{k_2(k_1 u + k_2 v)}}{k_1^2 k_2^2}\right).$$

Окончательно получим коэффициенты $\beta_{\mu v}$ в виде:

$$\beta_{11} = -\frac{1}{4}\frac{v^2\big((1-\alpha)(k_1^2 - k_2^2)^2 vu + \alpha k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)(u^2 - v^2)\big)}{(u^2 - v^2)^3},$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{4}\frac{v\left(-uk_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)(u^2 - v^2)(2-\alpha) + 4k_2^2 k_1^2 v^3 + 2\big(-k_2^4 - k_1^4 + \alpha(k_1^2 - k_2^2)^2\big) vu^2\right)}{(u^2 - v^2)^3},$$

$$\beta_{21} = -\frac{1}{4}\frac{u\left((2-\alpha)k_2 k_1 v (k_1^2 + k_2^2)(u^2 - v^2) + 4k_2^2 k_1^2 u^3 - 2\big(k_1^4 + k_2^4 - \alpha(k_1^2 - k_2^2)^2\big) uv^2\right)}{(u^2 - v^2)^3},$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{4}\frac{u^2\big((1-\alpha)(k_1^2 - k_2^2)^2 vu - \alpha k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)(u^2 - v^2)\big)}{(u^2 - v^2)^3}.$$

Для интеграла (2.5) имеем разложение

$$F = -\frac{k_1^6 k_2^6 u}{u^2 - v^2}\zeta_1\overline{\zeta}_1 + \frac{k_1^6 k_2^6 v}{u^2 - v^2}\zeta_2\overline{\zeta}_2 + \ldots$$

Замечание. Векторы v_μ определены с точностью до нормировки, соответственно $\beta_{\mu v}$ и интеграл также определены с точностью до домножения на некоторые постоянные.

Окончательно для величины закручивания получаем

$$D_1 = \frac{1}{2}\frac{uvk_2^5k_1^5\left(3u^2v^2\left(-k_2^4 - k_1^4 + \alpha(k_1^2 - k_2^2)^2\right) + 2k_2^2k_1^2\left((u^2+v^2)^2 - v^2u^2\right)\right)}{(u^2-v^2)^4}.$$

Опираясь на теорему 1, мы можем показать устойчивость по Ляпунову вращения шара на вершине параболоида при условии (3.4) за исключением случаев, когда параметры удовлетворяют одному из равенств $D_1 = 0$, $m_1u + m_2v = 0$ и $|m_1| + |m_2| < 4$.

6. Численные результаты

Приведем здесь ряд результатов численного моделирования при помощи построения отображения Пуанкаре. На рис. 2 показано трехмерное отображение Пуанкаре при значениях интеграла энергии $E = 50$, дополнительного интеграла $F = 20$ и при параметрах задачи $p = 1$, $q = 10$, $m = 1$, $g = 1$, $D = 1$, $R = 0.1$. В качестве плоскости сечения выбрана плоскость $\omega_1 = 0$, а сечение строится в пространстве (x_1, x_2, ω_2). Результаты моделирования показывают, что еще одного дополнительного интеграла не существует и задача является неинтегрируемой. Однако наличие интеграла F приводит к тому, что хаотические слои и инвариантные торы в пространстве (x_1, x_2, ω_2) лежат на двумерных поверхностях, фиксируемых значениями этого интеграла.

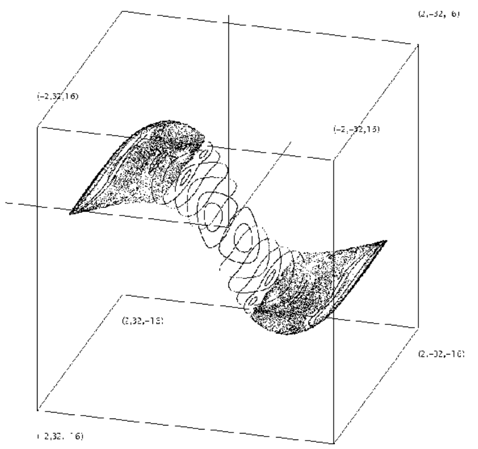

Рис. 2. Сечение Пуанкаре невозмущенной задачи на уровнях интеграла энергии $E = 50$ и дополнительного интеграла $F = 20$

Рассмотрим возмущенную ситуацию, при которой поверхность, по которой катится шар, отличается от параболоида (случай параболоида будем называть невозмущенным). Зададим возмущение поверхности в виде $x_3 = \frac{1}{2}(x, Bx) + \frac{1}{3}(\Lambda_{111}x_1^3 + \Lambda_{112}x_1^2x_2 + \Lambda_{122}x_1x_2^2 + \Lambda_{222}x_2^3)$, где Λ_{ijk}, $i, j, k = 1, 2$, — коэффициенты, задающие отклонение поверхности от параболоидальной. Все сечения, приведенные далее, построены при параметрах $p = 1$, $q = 10$, $m = 1$, $g = 1$, $D = 1$, $R = 0.1$. При условии $\gamma_{\mu\nu} = 0$ (при котором $\dot{R}_\mu = O(\varepsilon^3)$, см. приложение), накладывающего некоторые ограничения на Λ_{ijk}, инвариантные торы невозмущенной задачи с увеличением энергии разрушаются очень медленно. При малых значениях энергии (рис. 3) сечение почти не отличается от невозмущенной задачи. При этом двумерные торы очень медленно «диссипируют», образуя трехмерные торы, вложенные друг в друга. При увеличении энергии (рис. 4) часть торов разрушается, образуя трехмерный хаотический слой. При этом также наблюдаются большие области регулярности.

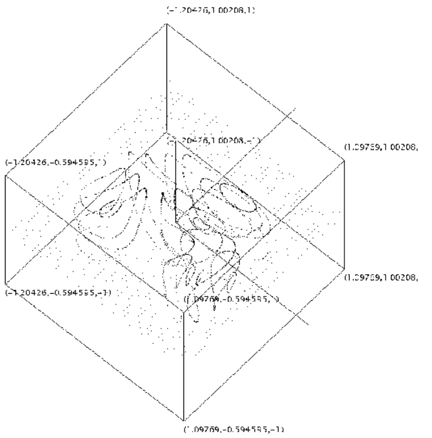

Рис. 3. Сечение Пуанкаре возмущенной задачи на уровне интеграла энергии $E = 0.5$ и параметрах возмущения $\Lambda_{111} = 0.1$, $\Lambda_{112} = 0.05$, $\Lambda_{122} = 0$, $\Lambda_{222} = 0$

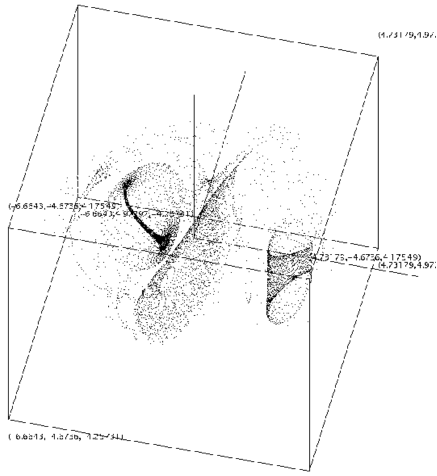

Рис. 4. Сечение Пуанкаре возмущенной задачи на уровне интеграла энергии $E = 12$ и параметрах возмущения $\Lambda_{111} = 0.1$, $\Lambda_{112} = 0.05$, $\Lambda_{122} = 0$, $\Lambda_{222} = 0$

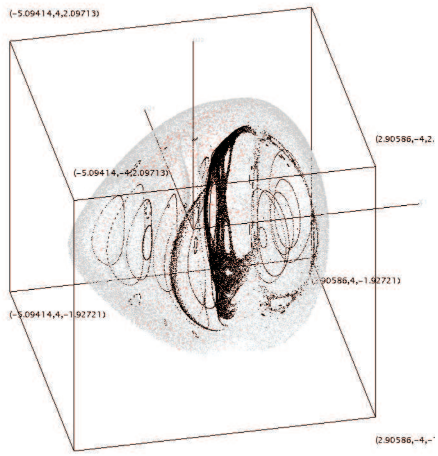

Рис. 5. Сечение Пуанкаре возмущенной задачи на уровне интеграла энергии $E = 4$ и параметрах возмущения $\Lambda_{111} = 0.2$, $\Lambda_{112} = 0$, $\Lambda_{122} = 0.1$, $\Lambda_{222} = 0$

Как доказано в работах [4, 11], посвященных обобщению КАМ-теории на обратимые системы с первыми интегралами, при симметричном возмущении поверхности (при котором система является обратимой) существуют инвариантные многообразия, препятствующие «диссипации»

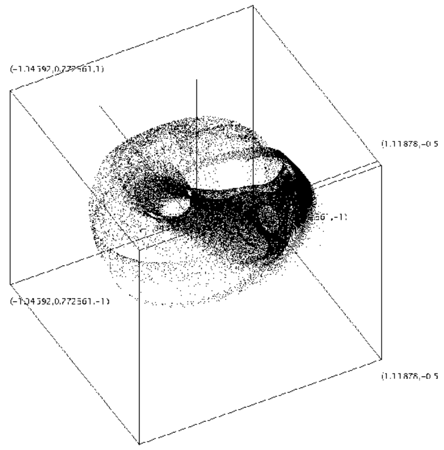

Рис. 6. Сечение Пуанкаре возмущенной задачи на уровне интеграла энергии $E = 0.5$ и параметрах возмущения $\Lambda_{111} = 0.1$, $\Lambda_{112} = 0.05$, $\Lambda_{122} = 0$, $\Lambda_{222} = 0.2$

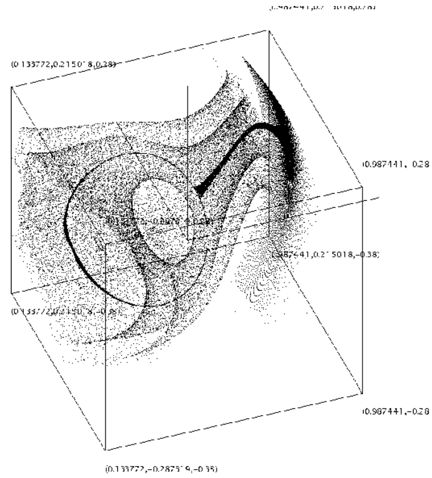

Рис. 7. Увеличенный фрагмент части сечения Пуанкаре на рис. 6

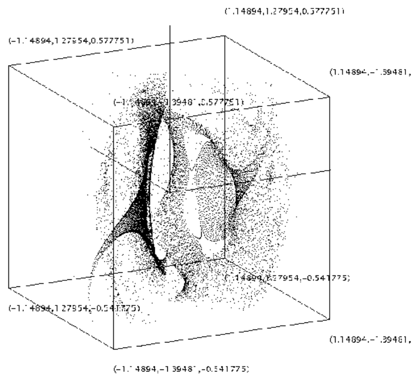

Рис. 8. Сечение Пуанкаре возмущенной задачи на уровне интеграла энергии $E = 3$ и параметрах возмущения $\Lambda_{111} = 0.1$, $\Lambda_{112} = 0.05$, $\Lambda_{122} = 0$, $\Lambda_{222} = 0.2$

двумерных торов вблизи периодического решения, соответствующего вращению шара в нижней точке поверхности. Как показывают компьютерные эксперименты, такое поведение в рассматриваемом случае наблюдается и вдали от указанного периодического решения. На рис. 5 хорошо видны области регулярного движения, заполненные двумерными торами. Наблюдаемые на сечении Пуанкаре хаотические слои также могут быть связаны с наличием инвариантных многообразий.

При несимметричном возмущении $\gamma_{\mu\nu} \neq 0$, $\dot{R}_\mu = O(\varepsilon^2)$ (нарушающем условие обратимости), диссипация двумерных торов происходит гораздо быстрее, чем в случае $\gamma_{\mu\nu} = 0$. При малых энергиях также возникают трехмерные торы, однако, они имеют гораздо более сложную структуру (рис. 6, 7). При увеличении энергии динамика системы принимает ярко выраженный диссипативный характер (рис. 8).

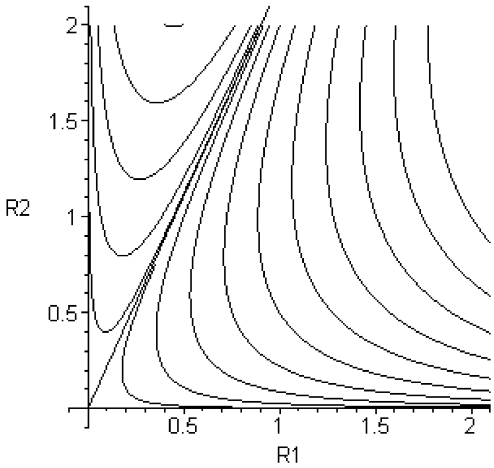

Рис. 9. Фазовый портрет системы (6.1)

Наконец, приведем фазовый портрет нормальной формы при параметрах, на которых были построены рис. 6, 7. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (-0.0007232806807R_1 + 0.00006530012756R_2)R_1 + O(R^3), \\ \dot{R}_2 &= (0.001446561361R_1 - 0.0003265006378R_2)R_2 + O(R^3). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Соответствующий двумерный фазовый портрет нормальной формы приведен на рис. 9.

В заключении отметим, что применение методов [4, 11] к задаче о движении тяжелого однородного эллипсоида по абсолютно шероховатой плоскости содержится в работе [3]. В этой работе в частности численно построены области устойчивости перманентных вращений эллипсоида.

Приложение

Пусть задана система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^4$ вида

$$\dot{\xi} = v(\xi) = A\xi + w(\xi), \tag{6.2}$$

где A — вещественная постоянная матрица, а $w(\xi)$ начинается с членов 2-го порядка, т. е. $\xi = 0$ — неподвижная точка и A — матрица линейной части.

Предположим, что

1. Система (6.2) имеет меру (т. е. $\operatorname{div}\rho(\xi)v(\xi) = 0$) с аналитической в окрестности $\xi = 0$ плотностью $\rho(\xi)$.

2. Имеется первый интеграл, невырожденный в окрестности $\xi = 0$ (его разложение имеет вид $P(\xi) = F_0 + \sum f_{\mu v}\xi_m\xi_v + \ \dots$).

3. Собственные числа A чисто мнимые и не совпадают ($\lambda_1 = -\lambda_2 = i\alpha_1$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$).

Для формулировки критериев устойчивости положения равновесия запишем систему в базисе собственных векторов матрицы линейной части A. Известно, что в этом случае координаты представляют собой комплексно сопряженные числа $\zeta = (\zeta_1, \overline{\zeta}_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_2)$. Выделим также из кубичной части получившейся системы члены специального вида. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= i(\alpha_1 + \beta_{11}\zeta_1\overline{\zeta}_1 + \beta_{12}\zeta_2\overline{\zeta}_2)\zeta_1 + \ldots, \\ \dot{\zeta}_2 &= i(\alpha_2 + \beta_{21}\zeta_1\overline{\zeta}_1 + \beta_{22}\zeta_2\overline{\zeta}_2)\zeta_2 + \ldots, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где многоточием обозначены члены, содержащие квадратичные слагаемые и слагаемые более высоких степеней (из которых исключены явно указанные в (6.3) члены).

Соответственно, первый интеграл в новых переменных имеет вид

$$F = F_0 + \frac{1}{2}(a_1\zeta_1\overline{\zeta}_1 + a_2\zeta_2\overline{\zeta}_2).$$

Справедлива следущая

Теорема 1. *Положение равновесия $\xi = 0$ системы (6.2) устойчиво по Ляпунову, если либо $a_1 \cdot a_2 > 0$,
либо $a_1 \cdot a_2 < 0$, $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 \neq 0$ при $|m_1| + |m_2| < 4$ и $D = a_1(\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{12}) - a_2(\alpha_1\beta_{21} - \alpha_2\beta_{11}) \neq 0$.*

Доказательство.

Первый случай очевиден, в этом случае интеграл является функцией Ляпунова системы: действительно, он знакоопределен в окрестности $\xi = 0$ и $F = 0$. Предварим рассмотрение второго случая доказательством следующей полезной леммы, налагающей ограничения на коэффициенты в нормальной форме (6.3) при условии существования инвариантной меры и первого интеграла.

Лемма. *Пусть система (6.2) допускает интеграл и инвариантную меру, аналитические в окрестности $\xi = 0$, и выполнены условия нерезонансности вида $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$, $|\alpha_1| \neq 3|\alpha_2|$, $3|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$, тогда в нормальной форме все коэффициенты $\beta_{\mu v}$ вещественные.*

Доказательство.

Обозначим $\gamma_{\mu v} = \operatorname{Im}\beta_{\mu v}$, $\eta_1 = X_1 + iY_1$, $\eta_2 = X_2 + iY_2$, где X_μ, Y_v — вещественные, и разложим интеграл по степеням X_μ, Y_v:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(X, Y),$$

где F_k — однородный полином степени k. Используя метод неопределенных коэффициентов, находим, что для системы (6.3) первый интеграл допускает форму следующего вида

$$\begin{gathered} F = F_0 + F_2 + F_4 + O(\eta^5), \\ F_2 = \frac{1}{2}\big(a_1(X_1^2 + Y_1^2) + a_2(X_2^2 + Y_2^2)\big), \\ F_4 = \frac{1}{4}\big(b_{11}(X_1^2 + Y_1^2)^2 + b_{12}(X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2) + b_{22}(X_2^2 + Y_2^2)^2\big), \end{gathered} \tag{6.4}$$

и при этом должны быть выполнены условия

$$\begin{gathered} \gamma_{11} = \gamma_{22} = 0, \\ a_1\gamma_{12} + a_2\gamma_{21} = 0. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Разлагая аналогично плотность инвариантной меры в окрестности нуля с учетом (6.5), находим

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{2}\big(c_1(X_1^2 + Y_1^2) + c_2(X_2^2 + Y_2^2)\big) + O(\eta^3)$$

при дополнительных условиях

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0.$$

■

Для доказательства второго случая воспользуемся теоремой Мозера об инвариантных кривых для отображений кольца [5]. Чтобы построить отображение, необходимое для применения [5], приведем систему (6.3) к нормальной форме с точностью до членов третьего порядка. Согласно рассуждениям, использованным при доказательстве теоремы Пуанкаре–Дюлака [1], полиномиальной заменой переменных $\zeta_\mu = \eta_\mu + P_\mu(\eta)$, $\mu = 1, 2$ можно привести систему (6.3) к виду

$$\dot\eta_\mu = i(\alpha_\mu + \beta_{\mu 1}\eta_1\overline{\eta}_1 + \beta_{\mu 2}\eta_2\overline{\eta}_2)\eta_\mu + O(\eta^5), \tag{6.6}$$

причем полином $P_\mu(\eta)$ начинается с членов второго порядка и все его коэффициенты вещественные.

Следуя [5], выполним замену переменных

$$\eta_\mu = \varepsilon\sqrt{R_\mu}e^{i\theta_\mu}, \quad \mu = 1, 2,$$

где $R_\mu > 0$, ε — малый параметр. При этом система и первый интеграл (6.6) представятся в виде

$$\dot R_\mu = O(\varepsilon^3), \quad \dot\theta = \alpha_\mu + \varepsilon^2(\beta_{\mu 1}R_1 + \beta_{\mu 2}R_2) + O(\varepsilon^3), \tag{6.7}$$

$$\widetilde{F} = \frac{F}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}(a_1R_1 + a_2R_2) + O(\varepsilon^2). \tag{6.8}$$

На поверхности уровня интеграла $\widetilde{F} = c$ исключим R_2 по формуле

$$R_2 = -\frac{a_1}{a_2}\Big(R_1 - \frac{2c}{a_1}\Big) + O(\varepsilon^2)$$

и перейдем к новой независимой переменной θ_2. Получим 2π-периодическую неавтономную систему вида

$$\frac{dR_1}{d\theta_2} = O(\varepsilon^3), \quad \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_{11}R_1 - \dfrac{\beta_{12}a_1}{a_2}\Big(R_1 - \dfrac{2c}{a_1}\Big)}{\alpha_2 + \beta_{21}R_2 - \dfrac{\beta_{21}a_1}{a_2}\Big(R_1 - \dfrac{2c}{a_1}\Big)} + O(\varepsilon^3). \tag{6.9}$$

Если ограничиться значениями интеграла $|c| < \dfrac{|a_1|}{2}$, то при достаточно малых ε значение R_1 заключено в пределах

$$1 \leqslant R_1 \leqslant 2. \tag{6.10}$$

При этом $R_2 > 0$, а в исходных переменных $\varepsilon^2 < \eta_1\overline{\eta}_1 < 2\varepsilon^2$.

Рассмотрим теперь сечение Пуанкаре системы (6.9) плоскостью $\theta_2 = 0(\mod 2\pi)$, с точностью до ε^3 оно дается соотношениями

$$\begin{gathered} R(2\pi) = R(0) + O(\varepsilon^3), \quad \theta(2\pi) = \theta(0) + D_0 + \varepsilon^2 D_1R_1 + O(\varepsilon^3), \\ D_0 = 2\pi\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1 + \frac{c(\beta_{12}\alpha_2 - \beta_{22}\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2a_2}\right), \\ D_1 = \frac{2\pi}{a_2\alpha_2^2}\big((\alpha_1\beta_{22} - \alpha_2\beta_{12})a_1 - (\alpha_1\beta_{21} - \alpha_2\beta_{11})a_2\big). \end{gathered} \tag{6.11}$$

Вследствие того, что исходная система сохраняет инвариантную меру, отображение (6.11) также обладает этим свойством, и поэтому всякая замкнутая кривая, охватывающая начало координат на плоскости $\eta_1\eta_2$, пересекается со своим образом при отображении (6.11). Таким образом, к отображению (6.11) применима теорема о сохранении инвариантных кривых [5] и если $D_1 \neq 0$, то в кольце (6.10) существует инвариантная кривая. Из этого следует, что всякое решение, лежащее на данном уровне энергии c и начинающееся внутри этой кривой, никогда не выйдет за ее пределы. Подбирая соответствующим образом малый параметр ε, область, охватываемую инвариантной кривой, можно сделать сколь угодно малой, что обеспечивает устойчивость положения равновесия. ■

Список литературы

[1] Арнольд В. И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск: РХД, 2002.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. *Новый интеграл в задаче о качении шара по произвольному эллипсоиду* // Доклады РАН, 2002, т. 385, вып. 3, с. 338–341.

[3] Глухих Ю. Д., Тхай В. Н., Шевалье Д. П. *Об устойчивости перманентных вращений тяжелого однородного эллипсоида на абсолютно шероховатой плоскости. Задачи устойчивости и стабилизации движения.* Ч. 1. М.: ВЦ РАН, 2000, с. 87–104.

[4] Матвеев М. В. *Устойчивость по Ляпунову положений равновесия обратимых систем* // Мат. заметки, 1995, т. 57, вып. 1, с. 90–104.

[5] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах.* М.: Мир, 1973.

[6] Раус Э. *Динамика системы твердых тел*, т. II. М., 1983, 544 с. Пер. с англ.: Routh E. *Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Dover Publications, New York.

[7] Раус Э. *Об устойчивости заданного состояния движения, в частности, установившегося движения.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 200 с. Пер. с англ.: Routh E. J. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion.* London, MacMillan & Co., 1877.

[8] Чаплыгин С. А. *О параболоидном маятнике.* Собр. соч., т. I, 1948, с. 102–109.

[9] Ярощук В. А. *Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности* // Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1992, Н. 6, с. 26–30.

[10] Mamaev I. S. *New cases when the invariant measure and first integrals exist in the problem of a body rolling on a surface* // Reg. & Chaot. Dyn., 2003, V. 8, No. 3, p. 331–335.

[11] Matveyev M. V. *Reversible systems with first integrals* // Physica D, 1998, V. 112, p. 148–157.