Взаимные расстояния в небесной механике[1]

А. Албуи
UMR8028 / Centre national de la recherche scientifique
IMCCE, 77, av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
E-mail: albouy@imcce.fr

1. Лагранжева редуцированная задача трех тел

Если попытаться описать эволюцию трех частиц под влиянием гравитационного взаимодействия (например, Земли, Солнца и Венеры), то мы можем ввести «относительное» движение и отличать его от обычного или «абсолютного» движения. Относительное движение задано, когда заданы три взаимных расстояния как функции времени. Абсолютное движение менее доступно непосредственному восприятию. Для того чтобы задать «абсолютные координаты» (x, y, z) каждой частицы, мы должны выбрать галилееву систему координат. К счастью, существует хороший способ для выбора начала координат упомянутой системы — это центр масс трех частиц. Но нам также предстоит выбрать «фиксированные направления» (O, x), (O, y), (O, z). Необходимо решить, что такое действительно не вращающийся репер, и это не просто. И нет уверенности, что в конечном счете мы будем заинтересованы в этих «абсолютных координатах». Будет ли их знание важным для прогнозирования каких-либо астрономических событий, таких как, например, прохождение Венеры 2004/6/8?

Идея, заключающаяся в том, чтобы взять взаимные расстояния r_{ij} между частицами в качестве переменных и сконцентрироваться на прогнозе будущих значений величин r_{ij}, далеко не нова. В 1772 году Лагранж получил весьма изящную систему дифференциальных уравнений в этих переменных, которая оказалась первой полной «редукцией» задачи трех тел. Некоторые авторы по-прежнему ошибочно приписывают Якоби первую полную редукцию, который назвал «исключением узла» последний шаг эквивалентного, но менее изящного процесса редукции, опубликованного в 1842 году. Даже сегодня достаточно сложно найти в литературе полное выражение лагранжевой системы, короткое описание есть у Серре, оно следует из статьи Лагранжа в его «Œuvres»[2], том 6. Напишем эту систему в явном виде после некоторых пояснений.

Чтобы вкратце представить работу Лагранжа, вероятно, будет полезно сначала объяснить, в чем заключается процесс редукции. Наиболее современные представления объясняют его в терминах лагранжиана или гамильтониана, что является огромной педагогической ошибкой. Студентам, которые не знакомы ни с понятием лагранжевой системы, ни с группами Ли,

[1] A. Albouy. *Mutual Distances in Celestial Mechanics*. Lectures at Nankai University, Tianjin, China, 2004. Пер. с англ. В. Зайцев.

[2] Труды (фр.).

следует объяснить, что такое приведенная система, полученная из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с симметрией. Как только это понятие усвоено, можно применять его к гамильтоновым системам, и можно отметить его замечательную совместимость с симплектической структурой. Но его также можно применять и для систем из неголономной динамики с непрерывной симметрией, а такие системы не являются гамильтоновыми.

Редукция и разделение переменных были средствами теоретической механики со времен Ньютона, Эйлера и Лагранжа. Они использовались для интегрирования дифференциальных систем из механики. На современном языке геометрии они связаны соответственно с расслоением и со структурой произведения на фазовом пространстве. Эти структуры соответствуют диаграммам

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{M}\\
\downarrow\\
B
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M} & \\
\swarrow & & \searrow\\
A & & B
\end{array}
$$

где $\mathcal{M}$ — фазовое пространство, т. е. пространство состояний системы, или пространство возможных начальных условий. Состояние или начальное условие задано положениями и скоростями частиц.

Первая диаграмма $\mathcal{M} \to B$ (сосредотачиваться на обсуждении второй мы не будем) отображает фазовое пространство на «базовое пространство» B меньшей размерности (это «приведение» размерности объясняет название процесса). Два состояния проектируются в одну и ту же точку пространства B тогда и только тогда, когда существует преобразование в группе симметрий механической системы, которое переводит одно состояние в другое. Базовое пространство B — это «фактор-пространство». Каждой его точке соответствует целый класс состояний. Например, если мы представим конфигурацию из n частиц с n закрепленными векторами скоростей как «объект», который мы можем вращать, то все объекты, полученные из исходного объекта с помощью вращения или сдвига, будут проектироваться в одну точку пространства B. *Достаточно знать проекцию на B некоторого начального условия, чтобы предсказывать будущую эволюцию проекции на B.*

Существует другой тип «редукции», более естественный: редукция, соответствующая первому интегралу. Геометрически это соответствует расслоению пространства $\mathcal{M}$ на гиперповерхности уровня этого первого интеграла. Здесь снова размерность фазового пространства «редуцируется», новым фазовым пространством будет одна из этих инвариантных гиперповерхностей пространства $\mathcal{M}$.

Современную теорию фактор-пространств и старую теорию редукции впервые явно связал С. Смейл в 1970 году в своей работе «Топология и механика». Это привело к серьезному обновлению старого аппарата классической механики,[3] отмеченному вначале работами К. Р. Майера в 1973 году и Марсдена и Вейнстейна в 1974 году. Эти работы были посвящены «замечательной совместимости» с симплектической структурой, упомянутой выше.

Вернемся к работе Лагранжа о задаче трех тел. Наш «объект» — это треугольник из трех частиц, с тремя стрелками, приложенными к вершинам, представляющими мгновенные скорости. Как описать этот объект, с точностью до переноса и поворота? Любопытно, что для наших целей и проще, и лучше будет заменить слово «поворот» на слово «изометрия», которое включает в себя отражения. Второе возражение: если мы добавим один и тот же вектор, который

[3]Существенные усилия в описании множества B (обозначенного M_7) в случае трех тел были сделаны Биркгофом в то время, когда слово «фактор-пространство» еще не было в употреблении: «Редуцированное многообразие M_7 состояний движения соответствует ∞^7 множеству состояний движения, заданному набором координат $u_1, \ldots, u_7$, которые различны, за исключением ориентации вокруг оси кинетического момента». (См. [6], с. 285.)

называется «усилением» («boos»), к каждому вектору скорости, будущая эволюция трех взаимных расстояний будет той же самой. Наше выражение «перенос и изометрия» не совсем точно описывает полную галилееву симметрию.

Итак, мы столкнулись с некоторыми трудностями, которые были преодолены более 200 лет назад. Способ Якоби, «грязный способ», заключался в том, чтобы описывать все из центра масс системы, который имеет равномерное прямолинейное движение, а затем заметить, что два вектора положений частиц определяют третий. В конце концов, Якоби и указал, как могут быть выбраны два вектора, чтобы они представляли три вектора.

Однако, попытаемся поступить изящно, как это сделал Лагранж. Сначала хотелось бы возразить: минуточку, что должны делать массы с нашей проблемой параметризации изометрических классов объектов? Забудем пока про массы и продолжим. Назовем q_1, q_2, q_3 положения частиц, $q_{23} = q_3 - q_2$, q_{31}, q_{12} — три *вектора* расстояний, от второй частицы до третьей, и т. д. Поскольку $q_{23} + q_{31} + q_{12} = 0$, эти три вектора в действительности дают такую информацию, какую могли бы дать и два вектора. Замечание о симметрии усиления наводит на мысль, что ситуация аналогична ситуации со скоростями. Итак, берем три дополнительных вектора $\dot{q}_{23}$, $\dot{q}_{31}$, $\dot{q}_{12}$. Этого достаточно. Симметрии переноса и усиления учтены. Назовем полученные величины *шестивекторным объектом*. Это фигура, образованная шестью векторами. Не стоит забывать, что $q_{23} + q_{31} + q_{12} = \dot{q}_{23} + \dot{q}_{31} + \dot{q}_{12} = 0$, таким образом четыре вектора определяют весь объект, который может иметь размерность 1, 2, 3 или 4. Уравнения Ньютона таковы, что эта размерность не изменяется в течение движения.

От шестивекторного объекта к 10 лагранжевым переменным. Чтобы «редуцировать» симметрию изометрии, заменим шесть векторов, которых на самом деле четыре, их взаимными скалярными произведениями. Четыре вектора дают 10 возможных скалярных произведений (четыре из которых являются скалярными произведениями векторов на себя). Таким образом, нам необходимы 10 скалярных произведений, но выбирать их следует изящно. Следующий набор является вполне подходящим: $\|q_{23}\|^2$, $\|q_{31}\|^2$, $\|q_{12}\|^2$, $\|\dot{q}_{23}\|^2$, $\|\dot{q}_{31}\|^2$, $\|\dot{q}_{12}\|^2$, $\langle q_{23}, \dot{q}_{23}\rangle$, $\langle q_{31}, \dot{q}_{31}\rangle$, $\langle q_{12}, \dot{q}_{12}\rangle$. Здесь одна переменная отсутствует. Лагранж выбрал, и он был абсолютно прав, как увидим далее,

$$\rho = \langle q_{23}, \dot{q}_{31}\rangle - \langle q_{31}, \dot{q}_{23}\rangle = \langle q_{23}, \dot{q}_1\rangle + \langle q_{31}, \dot{q}_2\rangle + \langle q_{12}, \dot{q}_3\rangle.$$

Дифференциальная система задачи трех тел редуцируется к дифференциальной системе в этих десяти переменных. Полученная «приведенная система» будет описывать *относительное* движение частиц. Мы ничего не говорили о размерности пространства, которое, естественно, равно трем. Поразительным свойством лагранжевой приведенной системы является то, что она описывает движение так же, как если бы движение было одномерным (три частицы остаются на заданной прямой, откуда следует, что они сталкиваются в прошлом или/и в будущем), или плоским, или пространственным, или даже четырехмерным! В коллинеарном и плоском случаях мы имеем слишком много переменных. Ф. Д. Мернаган разрабатывал меньший набор допустимых переменных.

В пространственном (3D) случае нам необходимо только 9 переменных, поскольку четыре вектора имеют 12 координат и группа вращений имеет размерность 3. Легко видеть, что здесь происходит. Так называемая *матрица Грама* для четырех векторов является симметрической 4×4-матрицей, элементами которой являются 16 скалярных произведений, которых, на самом деле, в силу симметрии только 10. А условием того, что четыре вектора порождают в 3D пространство размерности не больше 3, является равенство нулю определителя матрицы Грама. Это — сложное соотношение между 10 лагранжевыми переменными. Лагранж выписал в явном виде это длинное разложение (запись для определителя еще не была изобретена). Конечно, если вычислить 10 скалярных произведений из начального условия в пространственной задаче трех тел, соотношение будет выполнено. Нам не всегда нужно знать длинную формулу.

Чему необходимо научиться для того, чтобы суметь вывести приведенную систему? Нужно ли нам овладевать теорией алгебры Ли, картой моментов, кососопряженными действиями? Нет, необходимо только вычислить первые производные по времени наших десяти переменных. Поэтому сначала запишем уравнения Ньютона и выведем $\ddot{q}_{23}$ и т. д.

Уравнения Ньютона. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — положения в момент времени t n частиц с соответствующими массами $m_1, \ldots, m_n$. У нас имеется обозначение для векторных расстояний $q_{ik} = q_k - q_i$, положим $S_{ik} = S_{ki} = \|q_{ik}\|^{-3/2}$. Так называемые уравнения Ньютона примут вид

$$\ddot{q}_i = \sum_{k \neq i} m_k S_{ik} q_{ik}. \tag{1.1}$$

Существует хороший способ, чтобы записать $\ddot{q}_{ij}$. Положим

$$\Sigma_{ij} = (m_i + m_j) S_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} + S_{jk}). \tag{1.2}$$

Тогда

$$\ddot{q}_{ij} = -\Sigma_{ij} q_{ij} - \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} - S_{jk}) \big(q_k - \frac{1}{2}(q_i + q_j) \big). \tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) образуют «замкнутую» систему, включающую только векторные расстояния q_{ij} и их производные. Из уравнений (1.3) можно вывести, например, что

$$\langle q_{ij}, \ddot{q}_{ij} \rangle = -\Sigma_{ij} \|q_{ij}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} - S_{jk}) \langle q_{ik} + q_{jk}, q_{ij} \rangle. \tag{1.4}$$

Но $q_{ij} = q_{ik} + q_{kj}$, поэтому $\langle q_{ik} + q_{jk}, q_{ij} \rangle = \|q_{ik}\|^2 - \|q_{kj}\|^2$, и можно подставить это выражение в указанную выше формулу. Производя такие преобразования в случае трех тел, мы придем к лагранжевой системе. Пусть

$$\begin{gathered} a = \|q_{23}\|^2, \quad b = \|q_{31}\|^2, \quad c = \|q_{12}\|^2, \\ a' = \langle q_{23}, \dot{q}_{23} \rangle, \quad b' = \langle q_{31}, \dot{q}_{31} \rangle, \quad c' = \langle q_{12}, \dot{q}_{12} \rangle, \\ a'' = \|\dot{q}_{23}\|^2, \quad b'' = \|\dot{q}_{31}\|^2, \quad c'' = \|\dot{q}_{12}\|^2, \quad \rho = \langle q_{23}, \dot{q}_{31} \rangle - \langle q_{31}, \dot{q}_{23} \rangle \end{gathered}$$

будут десять переменных. Необходимы промежуточные выражения, которые мы оставим, как и выше, с индексами:

$$\Sigma_{23} = (m_2 + m_3) a^{-3/2} + \frac{1}{2} m_1 (b^{-3/2} + c^{-3/2}), \quad \Sigma_{31} = \ldots, \quad \Sigma_{12} = \ldots,$$

здесь в последних двух выражениях стоят циклические перестановки индексов первого выражения. Лагранжева система имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{a} = 2a', \quad \dot{b} = 2b', \quad \dot{c} = 2c', \\ \dot{a}' = a'' - a\Sigma_{23} - m_1 (c^{-3/2} - b^{-3/2})(c - b)/2, \quad \dot{b}' = \ldots, \quad \dot{c}' = \ldots, \\ \dot{a}'' = -2a'\Sigma_{23} - m_1 (c^{-3/2} - b^{-3/2})(c' - b' - \rho), \quad \dot{b}'' = \ldots, \quad \dot{c}'' = \ldots, \\ \dot{\rho} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1(a - b - c) & m_2(b - c - a) & m_3(c - a - b) \\ a^{-3/2} & b^{-3/2} & c^{-3/2} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Фундаментальное наблюдение состоит в том, что эта система является «замкнутой», т. е. правая часть выражена через десять переменных. Разумно предположить, что существует «теория редукции», способная вывести это наблюдение без проведенных выше вычислений. Это только половина истины. Можно предсказать, что на открытом множестве в $\mathcal{M}$, соответствующем состояниям размерности 4, правая часть может единственным образом выражаться как функция скалярных произведений.

Но это значительно меньше того, что мы получили. Нами получены простые алгебраические выражения, справедливые для любой размерности. Лагранж указывал, что действительно можно прийти к хорошей системе. Достаточно взять $r_{ij} = \|q_{ij}\|$ и $\dot{r}_{ij}$ в качестве новых переменных, вместо $\|q_{ij}\|^2$ и $\langle q_{ij}, \dot{q}_{ij}\rangle$, а остальные четыре переменные оставить прежними.

Это различие между теоретическими предсказаниями и практическими выкладками — известная трудность, обычно встречающаяся, когда имеешь дело с инвариантами. Мы работаем со скалярными произведениями, которые являются основными инвариантами относительно действия на группе изометрий. Некоторые теоретические аргументы могут предвещать, что правые части лагранжевой системы инвариантны относительно действия этой группы, и что они могут быть выражены в терминах основных инвариантов. Тем не менее, будет сложнее предсказать, что эти правые части будут иметь простые (алгебраические или даже рациональные) выражения, которые хорошо себя ведут, когда размерность состояния изменяется.

Представляя теорию инвариантов, Герман Вейль затронул следующий вопрос: «В таких случаях, и я хочу это подчеркнуть, обнаружится, что чисто функциональная часть — т. е., утверждение, что значения всех инвариантов определяются значениями базовых инвариантов — почти тривиальна. Основная трудность заключается в алгебраической части».

Короче говоря, проведенные выше выкладки (благодаря Лагранжу) остаются на сегодняшний день наиболее разумным подходом к обсуждению редукции в терминах взаимных расстояний. Если мы хотим изучить эту редукцию более глубоко, то должны лучше понять эти выкладки. Будем пользоваться средствами не дифференциальной геометрии, а линейной алгебры.

Первая проблема состоит в том, чтобы перейти к задаче n тел. Существуют некоторые трудности с переменной ρ, однако Бетти преодолел их и получил длинную систему, обобщающую лагранжеву систему для $n \geqslant 3$ частиц. Но эти длинные страницы формул поднимают вопросы: возможно ли вообще что-либо сделать с этой системой? Возможно ли, к примеру, решить для $n > 3$ задачи, которые решил Лагранж в случае $n = 3$? Обсудим эти проблемы в следующей главе.

Заключительные комментарии по поводу редукции Лагранжа. Цель редукции состоит в том, чтобы понизить порядок системы дифференциальных уравнений. Какой порядок имеет лагранжева система? Наше определение порядка таково, что автономная система из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

имеет порядок n. Конечно, существуют и другие соглашения, но это выглядит вполне естественным. Лагранжева система имеет, таким образом, порядок 10, но она обладает несколькими первыми интегралами. Фиксируя первые интегралы, можно исключить некоторые переменные и понизить порядок. Если размерность состояния равна трем, существует также соотношение, выражающее трехмерность, которое можно использовать, чтобы исключить одну переменную. Первые интегралы — это энергия и евклидова норма кинетического момента. *Порядок системы равен 7*. Если размерность равна четырем, существуют два независимых $O(4)$-инварианта кинетического момента вместо одного. Размерность снова равна 7. Можно показать, что для некоторых частных значений кинетического момента (равные диагональные члены в диагонализации) редуцированная размерность снижается до 5. Конечно, все эти утверждения предполагают, что не существует других первых интегралов или симметрий, кроме уже известных. Некоторые результаты об этом были установлены, начиная со знаменитого результата Брунса в 1887 году. Они все оставляют некоторые возможности для (маловероятных) новых инвариантов.

Для информации дадим выражения для энергии H и квадрата нормы кинетического момента $\|C\|^2$ в лагранжевых переменных. Положим сначала $M = m_1 + m_2 + m_3$ и

$$\begin{gathered}
I = \frac{1}{M}(m_2m_3a + m_3m_1b + m_1m_2c),\\
J = \frac{1}{M}(m_2m_3a' + m_3m_1b' + m_1m_2c'),\\
K = \frac{1}{M}(m_2m_3a'' + m_3m_1b'' + m_1m_2c''),\\
U = m_2m_3a^{-1/2} + m_3m_1b^{-1/2} + m_1m_2c^{-1/2}),\\
\psi = -aa'' - bb'' - cc'' + ab'' + bc'' + ca'' + a''b + b''c + c''a,\\
\phi = -a'^2 - b'^2 - c'^2 + 2a'b' + 2b'c' + 2c'a'.
\end{gathered}$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}K - U, \qquad \|C\|^2 = \frac{m_1m_2m_3}{2M}(\phi - \psi + \rho^2) + IK - J^2. \tag{1.6}$$

2. Специальные виды движений

Лагранж использовал свою систему, для того чтобы классифицировать самоподобные движения трех тел. Здесь даны три определения, включающие определение самоподобного (self-similar) движения (которое у Уинтнера названо «гомографическим»).

Определение. Движение трех тел называется *самоподобным*, если отношение взаимных расстояний r_{31}/r_{23} и r_{12}/r_{23} остается постоянным с течением времени. Движение называется *твердотельным*, если три взаимных расстояния r_{23}, r_{31}, r_{12} постоянны. Движение называется *относительным равновесием*, если десять лагранжевых скалярных произведений постоянны.

Относительное равновесие является положением равновесия редуцированной системы. В таком движении шестивекторный объект $q_{23}, \ldots, \dot{q}_{12}$ остается в одном и том же классе изометрии. Также будем говорить, что *относительное состояние* является постоянным. В твердотельном движении *относительная конфигурация* постоянна.

Лагранж полностью классифицировал самоподобные движения. Множество конфигураций, которое он получил, хорошо известно: это коллинеарные конфигурации, ранее найденные Эйлером, и равносторонний треугольник. В 1843 году Гашо обнаружил, что лагранжева равносторонняя конфигурация является линейно устойчивой, если одно из трех тел имеет массу существенно большую, чем другие два. Позднее было обнаружено, что такая конфигурация реализуется в солнечной системе: некоторые астероиды имеют такое движение, что треугольник, который они образуют с Солнцем и Юпитером, остается почти равносторонним.

Эти «лагранжевы решения» остались выдающимся открытием, опубликованным на 95 страницах работы «Essai sur le probl‘eme des trois corps». Но не стоит забывать, что в этой работе содержится также изящная и эффективная редукция задачи трех тел, которая является необходимым средством для доказательства следующего нетривиального результата (в отличие от редукции Якоби, которая не помогает вывести этот результат).

Предложение (Лагранж). *Любое самоподобное движение задачи трех тел является плоским.*

Предполагается, что движение не более чем трехмерное, а заключение состоит в том, что оно является двумерным. Для того чтобы избежать какой-либо неоднозначности, установим снова, что мы называем «размерностью» движения. Это есть размерность векторного пространства, порожденного шестью векторами $q_{23}, \ldots, \dot{q}_{12}$. Как уже утверждалось, эта размерность равна 1, 2, 3 или 4. Это то, что следует называть «размерностью движения», при условии что правильно выбирается галилеева система координат. Например, размерность эллиптического движения двух тел равна двум. Но в ситуации, когда скорость центра масс не равна нулю и не принадлежит плоскости эллиптической орбиты, следует считать, что размерность равна трем. Поэтому чтобы определить размерность, требуется зафиксировать правильную галилееву систему координат, в которой центр масс неподвижен. Но если мы желаем обойти рассуждения о центре масс, достаточно посмотреть на систему (1.3) вместо уравнений Ньютона.

Чтобы показать эффективность лагранжевой системы, произведем классификацию *твердотельных движений*. Предположим, что a, b и c постоянны. Тогда $a' = b' = c' = 0$. Из следующих уравнений следует, что величины a'', b'', c'' равны некоторым фиксированным значениям. Тогда $0 = \dot{a}'' = m_1(c^{-3/2} - b^{-3/2})\rho = \dot{b}'' = \ldots$. Если треугольник не равносторонний, то из этих уравнений следует, что $\rho = 0$. Если треугольник равносторонний, то можно проверить из последнего уравнения, что $\dot{\rho} = 0$. Таким образом, *движение является относительным равновесием*.

Докажем теперь, что движение относительного равновесия имеет размерность 2 или 4. Этот момент довольно технический, если использовать только лагранжеву систему, и сам Лагранж посвятил этому одну страницу тонких вычислений (с. 277). Мы вместе с А. Шенсине разработали другую стратегию, основанную на рассмотрении твердотельной динамики *состояния*, т. е. шестивекторного объекта. Нам известно, что этот объект является постоянным, с точностью до поворота. Предположим, что этот объект является трехмерным. Тогда существует вектор мгновенного вращения Ω, такой, что справедливы шесть векторных уравнений

$$\dot{q}_{23} = \Omega \times q_{23}, \quad \dot{q}_{31} = \Omega \times q_{31}, \quad \ldots, \quad \ddot{q}_{31} = \Omega \times \dot{q}_{31}, \quad \ddot{q}_{12} = \Omega \times \dot{q}_{12}.$$

Мы не знаем *a priori*, является ли Ω постоянным. Но известно, что если вращать шестивекторный объект вокруг Ω, эти уравнения по-прежнему будут совпадать с уравнениями Ньютона. Таким образом, решение с фиксированным Ω, которое является равномерным вращением шестимерного объекта вокруг Ω, есть решение уравнений Ньютона. Но в силу единственности решения оно совпадает с нашим решением, следовательно, Ω — постоянный вектор.

Однако это движение невозможно, если конфигурация не лежит полностью в векторной плоскости, ортогональной Ω. Это достаточно простое и интуитивно понятное соображение. Положим, что Ω расположен вертикально и возьмем «самую высокую» частицу. Она притягивается другими частицами, расположенными «ниже». Поэтому ее гравитационное притяжение направлено вниз. Центробежное ускорение направлено горизонтально. Это не может уравновешивать гравитационное ускорение. Таким образом частица будет двигаться вниз, а это противоречит предположению о равномерном вращении с вертикальной осью.

Следовательно, предположение о трехмерном относительном равновесии приводит к заключению, что движение на самом деле является двумерным. Соответствующий результат о самоподобных движениях представлен читателю в статье Лагранжа или к нашей совместной с Шенсине работе. Здесь можно также упомянуть интересные работы Пицетти, Банахевича, Мюнтца, Каратеодори и др. Наши последующие действия, т. е. классификация двумерных самоподобных движений, послужат мотивом для введения определения центральной конфигурации.

Но сначала опишем некоторые четырехмерные движения. Лагранж благоразумно не обращался к этим экзотическим случаям! Тем не менее, мы сразу же обнаружим кое-что интересное.

При $\dot\rho = 0$ конфигурация подчинена условию

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1(a-b-c) & m_2(b-c-a) & m_3(c-a-b) \\ a^{-3/2} & b^{-3/2} & c^{-3/2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1}$$

Можно показать, что любой треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, удовлетворяющими этому условию, может совершать четырехмерное равномерное вращение по законам Ньютона. Представить это не так просто; грубо говоря, здесь найдутся две ортогональные оси, связанные с треугольником и проходящие через центр масс, такие что треугольник вращается равномерно с угловой скоростью n_1 вокруг одной оси и с угловой скоростью n_2 вокруг другой оси. Если найдутся два целых числа k_1 и k_2 таких, что $k_1 n_1 = k_2 n_2$, то движение будет периодическим. Если нет, то оно будет лишь квазипериодическим. Если треугольник равнобедренный с двумя равными по массе частицами в основании, то одна из осей вращения — это «вертикальная» ось, т. е. ось симметрии, а другая — горизонтальная.

Остановимся еще на одном утверждении, которое относится только к уравнению (2.1). *Если $m_1 = m_2 = m_3$, то решения уравнения (2.1) — это все равнобедренные треугольники.* Это утверждение очень красиво и просто, так же как и его доказательство. Если ϕ — строго выпуклая[4] или строго вогнутая функция, тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \phi(a) & \phi(b) & \phi(c) \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = b \text{ или } b = c \text{ или } c = a.$$

Доказательство очевидно. В самом деле, определитель — это площадь треугольника $(a, \phi(a))$, $(b, \phi(b))$, $(c, \phi(c))$. Он равен нулю тогда и только тогда, когда треугольник вырожденный, т. е. три точки лежат на одной прямой. Но это невозможно для графика строго выпуклой функции, если a, b и c различны.

Применим это соображение к функции $\phi(x) = x^{-3/2}$, которая строго выпукла в области $x > 0$, и лемма будет доказана.

Менее экзотические размерности. Произведем теперь классификацию самоподобных движений n частиц на плоскости. Поставим в соответствие частице j массы m_j комплексное число z_j, характеризующее ее положение на комплексной плоскости. Центр масс находится в нуле. В самоподобном движении имеем $z_j = re^{i\theta}z_j^0$, откуда следует $\dot z_j = (\dot r + ir\dot\theta)e^{i\theta}z_j^0$ и $\ddot z_j = (\ddot r + i(2\dot r\dot\theta + \ddot\theta) - r\dot\theta^2)z_j$.

Выведем теперь два фундаментальных тождества из уравнений Ньютона. Поскольку $\ddot z_j = \sum\limits_{k\neq j} m_k S_{kj} z_{jk}$, получим сначала $\sum m_j \ddot z_j = 0$, и затем $m_j \mathrm{Im}(\overline{z}_j \ddot z_j) = 0$. Заменяя $\ddot z_j$ из равенства выше, получаем $(2\dot r\dot\theta + \ddot\theta)\sum m_j|z_j|^2 = 0$. Отсюда следует $2\dot r\dot\theta + \ddot\theta = 0$. Здесь в любой момент времени существует *вещественное число* $\lambda = \ddot r - r\dot\theta^2$ такое, что $\ddot z_j = -\lambda z_j$.

Это послужит поводом для введения основного объекта этих лекций — центральных конфигураций. Это название придумал Уинтнер, а само определение восходит к Лапласу.

Определение. Центральной конфигурацией n частиц $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в евклидовом пространстве конечной размерности с массами $m_1,\ m_2, \ldots, m_n$ с центром масс q_G называется конфигу-

[4]Вещественная функция называется выпуклой, если любой отрезок, соединяющий две точки графика, лежит «выше» графика. Она является строго выпуклой, если кроме того внутренность этого отрезка не содержит каких-либо точек графика.

рация такая, что существует вещественное число λ такое, что

$$\lambda q_{Gj} = \sum_{k \neq j} m_k S_{kj} q_{kj} \tag{2.2}$$

для любых j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Мы как обычно обозначаем $q_{jk} = q_k - q_j$ вектор от точки q_j до точки q_k, и $S_{kj} = \|q_{kj}\|^{-3/2}$. Мы также полагаем $q_{Gj} = q_j - q_G$.

Замечание. Центр масс q_G определяется по формуле $Mq_G = \sum m_j q_j$, где $M = \sum m_j$. Не так давно мы совместно с Р. Мёкелем немного расширили определение центральной конфигурации, для того чтобы приспособить его к задаче n вихрей в гидродинамике. В этой задаче в качестве массы частицы выступает завихренность вихря, и она может быть отрицательной. Сумма масс может быть равна нулю. Тогда определение q_G становится некорректным и центра масс не существует. Расширенное определение не более сложное, но отчасти менее интуитивное (см. [1], [10]).

Установим связь между различными определениями. *Относительное равновесие* — это *состояние* задачи n тел. Как описать состояние независимо от выбора галилеевой системы координат? Просто зададим q_{jk} и их производные $\dot{q}_{jk}$. Существуют очевидные соотношения между этими векторами. Состояние относительного равновесия характеризуется тем фактом, что все скалярные произведения $\langle q_{jk}, q_{hl}\rangle$, $\langle q_{jk}, \dot{q}_{hl}\rangle$, $\langle \dot{q}_{jk}, \dot{q}_{hl}\rangle$ не изменяются с течением времени. Более общие состояния самоподобных движений — это такие состояния, что отношение $\langle q_{ij}, q_{kl}\rangle / \|q_{12}\|^2$ остается неизменным со временем.

Центральная конфигурация — это *конфигурация*, т. е. она задается только векторами q_{jk}. Результат Пицетти гласит: *конфигурация в любом состоянии самоподобного движения в трехмерном пространстве — это центральная конфигурация.* Как уже было упомянуто, это утверждение неверно в размерности четыре уже для относительного равновесия трех тел. В размерности три большинство самоподобных движений плоские, но есть исключения: трехмерные центральные конфигурации существуют, если $n \geqslant 4$, и состояние, полученное из такой конфигурации с нулевыми скоростями, порождает частный случай самоподобного движения, которое называется *гомотетическим*. В гомотетическом движении конфигурация не вращается; изменяется только ее масштаб. Конфигурация является центральной в любом гомотетическом движении.

В случае трех тел для любых выбранных значений масс центральные конфигурации — это три коллинеарные эйлеровы конфигурации и равносторонняя лагранжева конфигурация. В случае когда тел более 3, число центральных конфигураций зависит от выбора масс.

Далее представленные лекции разбиваются на две части. Главы 3 и 4 можно читать независимо после этой главы. В главе 4 вводится аппарат для работы с взаимными расстояниями, который позволит нам использовать стандартные результаты из линейной алгебры для доказательства результатов о центральных конфигурациях. В главе 3 сфокусируем свое внимание на результатах о симметрии центральных конфигураций, при этом мы будем использовать элементарную алгебру, теорию Дзёбека, и некоторые элементы выпуклого анализа.

3. Теория Дзёбека и симметрия центральных конфигураций

Дзёбек опубликовал в 1900 году хорошие тождества, которым удовлетворяют центральные конфигурации. Связанные с ними методы были опубликованы в 1932 году Макмилланом и Бартки. Здесь упростим оба способа изложения: возьмем переменные, которые использовал Дзёбек, а не Макмиллан; а при доказательстве воспользуемся красивыми рассуждениями Макмиллана, вместо более сложных методов Дзёбека, использующих определитель Кэли и вариационную характеристику. Этот выбор был сделан нами под влиянием тезисов Хэмптона [14].

Метод Дзёбека относится к центральным конфигурациям n тел в размерности $n-2$. Это вторая наибольшая возможная размерность для конфигурации n частиц. Для размерности $n-1$ теория центральных конфигураций тривиальна, и мы оставляем ее читателю. Дзёбек интересовался плоскими конфигурациями 4 тел, в этом состоит и наш главный интерес.

Допустим, что имеется n точек $q_1, \ldots, q_n$ в аффинном пространстве размерности $n-2$. Аффинное пространство, конечно, может быть евклидовым, но пока нам не нужны какие-либо метрические отношения. Совокупность из $n-1$ векторов q_{12}, q_{13}, $\ldots$, q_{1n} не может быть независимой. Существует линейная комбинация с вещественными коэффициентами, связывающая их. Для удобства запишем это так:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i q_i = 0, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0, \quad (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \neq (0, \ldots, 0). \tag{3.1}$$

Можно считать, что q_i — векторы. Тогда из второго соотношения следует, что мы можем выбрать любую точку в качестве начала отсчета для векторов q_i. Но можно также считать, что q_i — это *точки*, и ссылаться на стандартные соглашения аффинной геометрии: линейная комбинация точек с вещественными коэффициентами определена в двух случаях: 1) сумма коэффициентов равна нулю; тогда комбинация — это вектор; 2) сумма коэффициентов равна единице; тогда комбинация — это точка. Здесь мы находимся в первом случае.

Очевидно следующее утверждение: *если q_i не содержатся в аффинном подпространстве размерности $n-3$, существует ненулевой набор $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию* (3.1)*, единственный с точностью до умножения на вещественный множитель.*

Произведем теперь некоторые полезные преобразования уравнений (2.2), характеризующих центральные конфигурации. Первый член, который мы видим — это λq_{jG}. Но $Mq_{jG} = \sum m_k q_{jk}$ согласно определению центра масс. Уравнения примут вид:

$$0 = \sum_{k \neq j} m_k (S_{jk} - \lambda/M) q_{jk}, \quad \text{где} \quad M = m_1 + \ldots + m_n. \tag{3.2}$$

Но из соотношения (3.1) можно вывести, что $\sum \Delta_k q_{jk} = 0$, а мы сказали, что это соотношение — единственное линейное соотношение, с точностью до множителя, между $n-1$ векторами q_{jk}, $k \neq j$. Таким образом, для любого j существует множитель μ_j такой, что $m_k(S_{jk} - \lambda/M) = \mu_j \Delta_k$. Поскольку $S_{kj} = S_{jk}$, получим, что $\mu_j \Delta_k / m_k = \mu_k \Delta_j / m_j$. Это верно для любых j, k, поэтому $(\Delta_1/m_1, \ldots, \Delta_n/m_n)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ пропорциональны. Мы получили соотношения Дзёбека:

$$S_{jk} = \|q_{jk}\|^{-3} = \frac{\lambda}{M} + \mu \frac{\Delta_j \Delta_k}{m_j m_k}, \tag{3.3}$$

для некоторого вещественного числа μ. Поскольку в левой части равенства стоят взаимные расстояния, естественно попытаться выразить Δ_i как функцию взаимных расстояний. Однако такое выражение содержит квадратные корни, и это сильно усложняет выкладки. Намного лучше будет выглядеть следующее неявное соотношение между Δ_i и $s_{ij} = \|q_{ij}\|^2$. Заметим сначала, что величина $\sum_i \Delta_i \|q - q_i\|^2$ не зависит от точки q. Этот результат получится, если разложить $\|q - q_i\|^2$ и воспользоваться обоими соотношениями (3.1). Следовательно, величины

$$t_i = \sum_j \Delta_j s_{ij}, \quad \text{где} \quad s_{ij} = \|q_{ij}\|^2, \tag{3.4}$$

равны: $t_1 = t_2 = \ldots = t_n$. Это есть неявные соотношения. Из (3.4) получаем

$$0 = t_i - t_j = s_{ij}(\Delta_j - \Delta_i) + \sum_k \Delta_k (s_{ik} - s_{jk}),$$

и

$$0 = \Big(\frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j}\Big) s_{ij}(\Delta_j - \Delta_i) + m_k \sum_k \Big(\frac{\Delta_i \Delta_k}{m_i m_k} - \frac{\Delta_j \Delta_k}{m_j m_k}\Big)(s_{ik} - s_{jk}).$$

Применим формулу (3.3), тогда под знаком суммы по k будет стоять выражение $(S_{ik} - S_{jk})(s_{ik} - s_{jk})/\mu$. Но функция $s \mapsto S = s^{-3/2}$ убывает. Эта величина имеет знак $-\mu$. Таким образом,

$$\mu\Big(\frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j}\Big)(\Delta_i - \Delta_j) \leqslant 0.$$

Выберем индекс i, соответствующий наименьшему Δ_i, и j, соответствующий наибольшему Δ_j. Имеем $\Delta_i < 0 < \Delta_j$, поскольку $\sum \Delta_k = 0$. Мы получим

$$\mu < 0 \quad \text{и} \quad \Big(\frac{\Delta_i}{m_i} - \frac{\Delta_j}{m_j}\Big)(\Delta_i - \Delta_j) \geqslant 0 \quad \text{для любых} \quad i, j, \;\; 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{3.5}$$

Легко показать, что случай равенства во втором неравенстве соответствует симметрической конфигурации с $m_i = m_j$. Тот факт, что Δ_i/m_i упорядочены как Δ_i представляет собой удивительное наблюдение, которое распространяется на «не Дзёбеков» случай, т. е. на произвольные центральные конфигурации в [1].

Из формул (3.4) можно получить более слабые тождества. Но в чем их полезность, мы пока не можем объяснить полностью. Запишем

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ \Delta_i & \Delta_j & \Delta_k \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

Конечно, если $t_i = t_j = t_k$, то $Q_{ijk} = 0$. Но если все Q_{ijk} равны нулю, то можно только получить, что $t_i = \alpha\Delta_i + \beta$ для некоторых $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ и для всех i. Следует также заметить, что если добавить одну и ту же константу ко всем s_{lm}, $1 \leqslant l < m \leqslant n$, то значение Q_{ijk} не изменится. В дальнейшем это свойство пригодится для упрощения некоторых рассуждений.

Выпуклые и вогнутые конфигурации. Симметрия центральных конфигураций

Случай, когда одно из Δ_i равно нулю, является особым. Точка q_i является отмеченной. Уравнение (3.1) становится аффинным соотношением между другими точками. Это означает, что они принадлежат $(n-3)$-мерному аффинному подпространству. С другой стороны, из уравнения (3.3) следует, что все эти точки являются равноотстоящими от точки q_i.

В случае четырех тел это невозможно. Если три точки лежат на одной прямой и принадлежат окружности с центром в точке q_i, то две из них совпадают. А это не допускается. Таким образом, случай $\Delta_i = 0$ — хорошая «граница» для того, чтобы разделять классы центральных конфигураций.

Определение. Конфигурация из n частиц размерности $n-2$ называется *вогнутой*, если все Δ_i, кроме одного, имеют один и тот же знак. В остальных случаях она называется *выпуклой*.

Обсуждение. На самом деле это не есть общее определение; это является довольно полезной характеристикой. В более общем смысле, выпуклая конфигурация — это конфигурация из n частиц любой размерности, такая что граница выпуклой оболочки содержит все точки. Слово «вогнутая» используется в значении «не выпуклая». Покажем, что эти определения согласуются. Если конфигурация имеет размерность $n-2$, то максимум одна частица не принадлежит границе выпуклой оболочки. Остальные частицы образуют симплекс. Барицентрические координаты внутренней частицы положительны. Мы имеем соотношение $q_n = (\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_{n-1}q_{n-1})/(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})$, где $\alpha_i > 0$. Положим $\Delta_i = \alpha_i > 0$ и $\Delta_n = -\alpha_1 - \ldots - \alpha_{n-1} < 0$. Это есть вогнутый случай согласно определению выше.

Симметрия. В 1995 году мне удалось доказать, что *любая центральная конфигурация из 4 частиц с равными массами обладает некоторой симметрией.* Этот результат позже был дополнен некоторыми полиномиальными вычислениями с помощью компьютера, дающими полную классификацию таких центральных конфигураций. Два результата действительно необходимо вытекали из симметрии, один в выпуклом случае, один в вогнутом. Лонг и Сан опубликовали интересные обобщения обоих результатов, в которых предполагается, что только некоторые из масс равны. Исследование вогнутого случая ниже включает это обобщение. Выпуклый случай я рассматривать не буду. Его обобщение является менее простым и до сих пор пока полностью не завершено. Читателю следует обратиться к статье Лонга и Сана. У меня также есть неопубликованная статья на французском языке, которая перед тем, как быть опубликованной, нуждается в улучшении и корректировке. В случае 5 тел вогнутый случай является непростым. Алмейда Сантос [27] получил несколько интересных результатов.

Один из результатов о симметрии. Он соответствует вогнутому случаю для четырех тел и некоторым выпуклым случаям для бóльших размерностей, например, случаю 5 тел размерности 3.

Предложение. *Пусть центральная конфигурация из n тел размерности $n-2$ удовлетворяет условиям:*

1) *три коэффициента Δ_i в уравнении (3.1) отрицательны, скажем, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$;*

2) $m_1 = m_2 = m_3$*;*

3) *остальные Δ_i неотрицательны.*

Тогда она обладает некоторой симметрией. Она удовлетворяет условию $\Delta_1 = \Delta_2$, или $\Delta_2 = \Delta_3$, или $\Delta_3 = \Delta_1$. Если, к примеру, $\Delta_1 = \Delta_2$, то в силу уравнения (3.3) *серединная перпендикулярная гиперплоскость для точек q_1 и q_2 содержит все остальные точки.*

Доказательство. Используем равенство (3.6) $Q_{123} = 0$. Чтобы разложить его, разложим t_1, t_2 и t_3 в определителе. Выразим сначала члены через Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$Q_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_2 s_{12} + \Delta_3 s_{13} & \Delta_1 s_{12} + \Delta_3 s_{23} & \Delta_1 s_{13} + \Delta_2 s_{23} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} + \sum_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{1l} & s_{2l} & s_{3l} \\ \Delta_1\Delta_l & \Delta_2\Delta_l & \Delta_3\Delta_l \end{vmatrix}.$$

Допустим, что $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < 0$ и все остальные Δ_i неотрицательны. Тогда

$$0 < \Delta_2\Delta_3 < \Delta_1\Delta_3 < \Delta_1\Delta_2 \quad \text{и} \quad \Delta_1\Delta_l < \Delta_2\Delta_l < \Delta_3\Delta_l < 0 \tag{3.7}$$

для всех $\Delta_l > 0$. Если $\Delta_l = 0$, то соответствующие члены обращаются в ноль. В силу равенства (3.3) и условия $\mu < 0$ определитель в Δ_l имеет тот же знак, что и выражение

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{1l} & s_{2l} & s_{3l} \\ S_{1l} & S_{2l} & S_{3l} \end{vmatrix}.$$

Это напоминает определитель, который мы использовали для исследования четырехмерных относительных равновесий 3 тел с равными массами. Этот определитель равен ориентированной площади треугольника (s_{1l}, S_{1l}), (s_{2l}, S_{2l}), (s_{3l}, S_{3l}). Поскольку функция $s \mapsto S = s^{-3/2}$ выпуклая, и $S_{1l} > S_{2l} > S_{3l}$, определитель положителен, и все выражение отрицательно.

Теперь первый определитель в приведенном выше выражении Q_{123} должен быть исследован отдельно. Используем технику симплекс-метода в простейшем случае (одномерного симплекса). Общий случай объясняется и используется в работах [3] и [27].

Рассмотрим три точки в $\mathbb{R}^2$ с координатами (s_{12}, S_{12}), (s_{13}, S_{13}), (s_{23}, S_{23}). В силу (3.7) и (3.3) ординаты удовлетворяют неравенству $S_{12} < S_{13} < S_{23}$, где $\mu < 0$. Три абсциссы упорядочены следующим образом $s_{23} < s_{13} < s_{12}$, поскольку $s \mapsto S = s^{-3/2}$ — убывающая функция. Кроме того, из выпуклости этой функции вытекает неравенство $s_{13} < s_{13}^0$, где s_{13}^0 определяется из условия принадлежности трех точек одной прямой

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13}^0 & s_{23} \\ S_{12} & S_{13} & S_{23} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.8}$$

Мы утверждаем, что выражение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_2 s_{12} + \Delta_3 s & \Delta_1 s_{12} + \Delta_3 s_{23} & \Delta_1 s + \Delta_2 s_{23} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}$$

является на самом деле отрицательным для любого s такого, что $s_{23} \leqslant s \leqslant s_{13}^0$, поэтому оно будет отрицательным и для $s = s_{13}$. Поскольку это есть аффинная функция переменного s, достаточно доказать, что она отрицательна для $s = s_{23}$ и для $s = s_{13}^0$. В точке $s = s_{23}$ этот определитель имеет такой же знак, какой он имеет при $(s_{23}, s, s_{12}) = (0, 0, 1)$, поскольку можно заменить (s_{23}, s, s_{12}) на $(s_{23} + x, s + x, s_{12} + x)$, и определитель при этом не изменится. Он совпадает со знаком выражения $\Delta_2^2 - \Delta_1^2 + \Delta_3(\Delta_1 - \Delta_2) = (\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2) < 0$. Чтобы определить знак при $s = s_{13}^0$, мы можем заменить (s_{12}, s, s_{23}) на $(-S_{12}, -S_{13}, -S_{23})$, используя ту же инвариантность и соотношение (3.8), а затем заменить на $(\Delta_1\Delta_2, \Delta_1\Delta_3, \Delta_2\Delta_3)$, используя равенство (3.3). Вычитая третью строку, умноженную на $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$, получим

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_1^3 & \Delta_2^3 & \Delta_3^3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}$$

Функция $\Delta \mapsto \Delta^3$ является вогнутой при $\Delta < 0$, и эта величина отрицательна. Наконец, все члены в разложении Q_{123} неположительны, а некоторые из них не равны нулю. Таким образом, равенство $Q_{123} = 0$ невозможно. Поэтому условие $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$ невозможно. ■

4. Тензор взаимных расстояний

Пусть даны n точек $q_1, \ldots, q_n$ в конечномерном евклидовом пространстве, из них можно получить набор s_{12}, s_{13}, $\ldots$, $s_{n-1,n}$ квадратов взаимных расстояний. Возникает естественный вопрос: существует ли для заданного набора из $(n-1)n/2$ вещественных чисел конфигурация из n точек в евклидовом пространстве такая, чтобы этот набор был совокупностью квадратов взаимных расстояний. Очевидно, не всегда можно ответить «да». Например, s_{ij} должны быть неотрицательными. Существуют еще неравенства треугольника и т. д.

Должны выполняться некоторые условия. Существует хороший и плохой способы записать их. Любопытно, что плохой способ наиболее широко известен: *определитель Кэли конфигурации и всех подконфигураций должен быть неотрицательным.* Напомним, что определитель Кэли тетраэдра $q_1, \ldots, q_4$ есть

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ 1 & s_{13} & s_{23} & 0 & s_{34} \\ 1 & s_{14} & s_{24} & s_{34} & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Почему мы называем этот способ для выражения условий плохим? Потому что в большинстве естественных вопросов это приводит к трудоемким выкладкам. Хороший способ состоит в следующем.

Лемма 1 (Борхардт). *Вещественные числа $s_{12}, \ldots, s_{n-1,n}$ являются квадратами взаимных расстояний конфигурации в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда квадратичная форма*

$$-\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} s_{ij}\xi_i\xi_j,$$

ограниченная на гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$, заданную уравнением $\xi_1 + \ldots + \xi_n = 0$, неотрицательно определена. Ранг ограниченной квадратичной формы равен размерности конфигурации.

Чтобы проиллюстрировать лемму 1, вычислим квадратичную форму на векторе $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in H$. Если конфигурация существует, это число неотрицательно согласно лемме 1. Это число равно s_{12}. Для треугольника можно также выбрать $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (2, -1, -1)$, откуда получается пример странного условия $2s_{12} + 2s_{13} \geqslant s_{23}$.

Лемма 1 подобна известному «векторному» утверждению, связанному с матрицей Грама.

Лемма 2. *Для $m(m+1)/2$ вещественных чисел $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1m}, t_{22}, t_{23}, \ldots, t_{mm}$ найдутся m векторов $v_1, \ldots, v_m$ в евклидовом векторном пространстве, таких что $\langle v_i, v_j\rangle = t_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} t_{ij}\eta_i\eta_j$ неотрицательно определена на $\mathbb{R}^m \ni (\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Заметим, что $j < i$ в сумме допускается: мы полагаем $t_{ij} = t_{ji}$. Ранг этой квадратичной формы равен размерности векторного подпространства, натянутого на векторы v_i.*

Чтобы вывести лемму 1 из леммы 2, положим $m = n-1$, $v_i = q_i - q_n$ (обозначенное через q_{ni}). Получим $2t_{ij} = 2\langle q_{ni}, q_{nj}\rangle = -\|q_{ij}\|^2 + \|q_{ni}\|^2 + \|q_{nj}\|^2 = -s_{ij} + s_{in} + s_{jn}$, если $i < j$ и $t_{ii} = s_{in}$. Соотношения между ξ_i и η_j таковы: $\eta_i = \xi_i$, если $i < n$; $\xi_n = -\eta_1 - \ldots - \eta_m$. Эта замена переводит квадратичную форму $-\sum_{i<j} s_{ij}\xi_i\xi_j$ в форму $\sum_{i,j} t_{ij}\eta_i\eta_j$.

Об авторстве некоторых результатов. Лемма 1 была установлена Борхардтом в 1866 году в случае максимального ранга. Он не доказал, что условие положительной определенности является достаточным. Дарбу дал некоторую геометрическую интерпретацию леммы Борхардта. Шоенберг (Schoenberg) независимо опубликовал лемму 1 с полным доказательством в 1935 году. Но вместо квадратичной формы Борхардта он использовал менее изящную и более очевидную квадратичную форму $\sum_{i,j}(s_{in}+s_{jn}-s_{ij})\eta_i\eta_j$. Он устранил этот недостаток в 1938 году, таким образом, полностью доказав лемму 1. С другой стороны, первая математическая публикация Кэли, вышедшая в 1841 году, содержит определитель, который выражает квадрат объема симплекса как функцию взаимных расстояний. На самом деле, Кэли приравнял к нулю такой определитель, для того чтобы связать десять взаимных расстояний между пятью точками в трехмерном пространстве. Интерпретация определителя как квадрата объема и обобщение на любое количество точек достаточно очевидны, поэтому мы можем приписать Кэли авторство всего этого. Тем не менее, еще задолго до Кэли были известны различные разложения определителя Кэли, являющиеся квадратом объема тетраэдра. На них часто ссылались Эйлер и Лагранж, а Тарталья написал такое разложение в своей работе “General trattato di numeri et misure” (с. 35) в 1560 году.

Лемма 1 показывает, что квадратичную форму можно заменить набором квадратов взаимных расстояний. Это позволит работать с взаимными расстояниями так же, как мы работаем с квадратичными формами. Но мы пропустили один промежуточный шаг, который позволит доказать лемму 1 без использования леммы 2 и представить леммы 1 и 2 как частные случай последующей леммы 3.

Обозначения. Пусть E — евклидово пространство. Обозначим через Q евклидово «отождествление» $Q: E \to E^*$, действующее из E в двойственное к нему векторное пространство E^*. Линейное отображение Q симметрично: ${}^tQ = Q$. Будем обозначать скобками произведение элементов из E с элементами из E^*; $\langle Qu, v\rangle = \langle u, {}^tQv\rangle$ — это евклидово скалярное произведение $u \in E$ и $v \in E$. Обозначим также евклидово векторное пространство E через пару (E, Q).

Лемма 3. *Пусть F — это векторное пространство и $T: F \to F^*$ — симметрическое (${}^tT = T$) линейное отображение, действующее из F в двойственное к нему F^*. Для отображения T найдется евклидово пространство (E, Q) и линейное отображение $B: F \to E$ такое, что $T = {}^tBQB$ в том и только в том случае, если квадратичная форма F: $v \mapsto \langle Tv, v\rangle$, действующая на пространстве F, неотрицательно определена. Ранг T равен рангу B.*

Доказательство. Часть «только если» доказывается просто: $\langle Tv, v\rangle = \langle QBv, Bv\rangle \geqslant 0$, поскольку Q положительно определенная (т. е. евклидова). Докажем часть «если». Возьмем любой базис в F. Снабдим F стандартной евклидовой формой, такой что этот базис является ортонормированным. Матрица t отображения T является симметрической и неотрицательно определенной, следовательно, она имеет неотрицательно определенный квадратный корень, т. е. существует матрица b, такая что $b^2 = t$ и ${}^tb = b$. Матрица b имеет такой же ранг, как и матрица t. Она задает линейное наложение из F в F. Возьмем в качестве E образ этого наложения, а в качестве Q ограничение на этот образ стандартной евклидовой формы. Получим $T = {}^tBQB$, что и требовалось. Чтобы получить утверждение о ранге T, достаточно заметить, что $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} T$. Одно включение вытекает из композиции, другое — из следующего: если $Tv = 0$, то $\langle Tv, v\rangle = 0$, и $\langle QBv, Bv\rangle = 0$. Поэтому $Bv = 0$. ■

Проанализируем, что такое F, E, B и Q в лемме 2. Очевидно, T — это матрица Грама $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j}$, симметричная форма на $\mathbb{R}^m = F$. Векторы v_j — элементы пространства E. Линейное отображение $B: \mathbb{R}^m \to E$ сопоставляет набору $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ линейную комбинацию $\sum \eta_i v_i$. Наконец, Q — евклидова форма на E. Имеем $T = {}^tBQB$.

В лемме 1 $B : H \to E$ — это естественный «аффинный» аналог вышеупомянутого отображения B. Оно сопоставляет набору $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H \subset \mathbb{R}^n$ аффинную комбинацию $\sum \xi_i q_i \in E$ точек q_i. Как и в главе 3 нам встретилась эта отличительная особенность: q_i — это точки в аффинном пространстве, а линейные комбинации $\sum \xi_i q_i$, где $\sum \xi_i = 0$ — векторы. Лемма 1 теперь полностью понятна, и так же проста, как и лемма 2. Читатель легко проверит тождество $T = {}^tBQB$ в этом случае.

Замечание. По-видимому, фундаментальные понятия аффинной геометрии не преподаются во всем мире. Данное препятствие усиливается некоторым замешательством с использованием слова «аффинный». Это слово используется в негативном смысле, т. е. для того, чтобы подчеркнуть отсутствие определенной структуры. Это вероятно плохая привычка. Сначала оно использовалось в негативном смысле, чтобы обозначить отсутствие евклидовой структуры. Но позднее конечномерное векторное пространство стало для математиков более знакомым объектом, чем прежнее евклидово пространство. Тогда слово «аффинный» стало использоваться в негативном смысле для того, чтобы выразить, что пространство не обладает «базовой точкой», элементом, называемым нулем. Здесь нечего возразить. Если мы стартуем с евклидова пространства, и захотим прийти к аффинному пространству, то должны постепенно «забыть» евклидову структуру, и что специальный элемент называется нулем. По-видимому, сегодня сложно говорить об этих вещах так, чтобы это было понятно. Мы пытаемся использовать слова в позитивном смысле, т. е. говорить, какая здесь структура есть, вместо того, чтобы говорить, какой здесь структуры нет. Но мы понимаем, что у большинства читателей возникает множество вопросов. Хороший способ мог бы состоять в том, чтобы следовать компетентному в этом вопросе Схоутену, который называл «аффинными», «центрированными аффинными», «евклидовыми», «центрированными евклидовыми» пространствами те, которые мы называем соответственно «аффинными», «векторными», «евклидовыми», «евклидовыми векторными».

Наложение $B : H \to E$ будет нашей конфигурацией. «Трехвекторная фигура» в главе 1 была в точности таким объектом. Соответствующие образы при отображении B трех элементов $(0, -1, 1)$, $(1, 0, -1)$ и $(-1, 1, 0)$ из H есть q_{23}, q_{31} и q_{12}.

Следовало бы записать $B \in \mathrm{Hom}(H, E)$, но назовем $\mathcal{D}$ двойственным к H и обозначать H через $\mathcal{D}^*$. Будем также использовать тензорные обозначения. Выберем такую запись $B \in \mathcal{D} \otimes E$. В следующей главе это будет объяснено.

5. Две темы из линейной и полилинейной алгебры

Первая тема. Пространство расположений. Когда мы исследуем евклидово векторное пространство, нет необходимости объяснять, что такое двойственное пространство к векторному пространству. Само пространство и двойственное к нему отождествляются, они являются одним и тем же пространством. Здесь наши векторные пространства возникают вместе с естественной евклидовой структурой, но для вычислений будет лучше различать $\mathcal{D}$ и двойственное к нему $H = \mathcal{D}^*$.

Общий принцип гласит: *двойственное к подпространству — это фактор-пространство.* Более точно, если F — конечномерное векторное пространство, и $H \subset F$ — это подпространство, то существует подпространство $H^0 \subset F^*$ двойственного пространства, называемое аннулятором. В евклидовом пространстве это соответствует ортогональному дополнению к H. Пространство H^0 —это пространство линейных форм, которые обращаются в нуль на H.

Наш принцип становится утверждением: *двойственное к подпространству H пространства F — это фактор-пространство F^*/H^0.* Когда мы говорим «H^* совпадает с F^*/H^0», то имеем в виду «существует каноническое отождествление между H^* и F^*/H^0»

и «мы будем отождествлять эти пространства». Когда существует каноническое отождествление между двумя пространствами, настаивать на их различии — это зачастую «чистый педантизм», по словам Германа Вейля, но в некоторых случаях есть веская причина для того, чтобы делать различие. Например, если A и B — это два множества, то декартово произведение $A \times B$ канонически изоморфно $B \times A$, но если вы приобретете плохую привычку отождествлять (x, y) с (y, x), то у вас появятся проблемы, когда получите, что $A = B\ldots$

Чтобы увидеть каноническое отождествление $H^* \equiv F^*/H^0$, заметим просто, что линейная форма на F является линейной формой на подпространстве $H \subset F$, и что две линейные формы на F совпадают на H тогда и только тогда, когда их различие находится в H^0.

Подпространство, которое нам встречалось — это гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$, заданная уравнением $\xi_1 + \ldots + \xi_n = 0$. Двойственное к $\mathbb{R}^n$ «равно» $\mathbb{R}^n$. Аннулятор пространства H — это прямая $[L]$, порожденная вектором $L = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, $H^* = \mathbb{R}^n/[L]$. Мы предпочтем обозначать $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n/[L]$. Имеем $H = \mathcal{D}^*$ и $\mathcal{D}^*$ — новое название для H.

Второй раз в этих лекциях нам встречается фактор-пространство. В первый раз это было связано с редукцией. Но остановимся на $\mathcal{D}$; элементами этого фактор-пространства являются классы элементов из $\mathbb{R}^n$. Два элемента $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ принадлежат одному классу, если $x_1 - y_1 = \ldots = x_n - y_n$. Если координаты частиц на прямой выражаются числами, то две конфигурации из n частиц принадлежат одному классу, если одна получается из другой при помощи переноса. *Пространство $\mathcal{D}$ — это пространство коллинеарных конфигураций, «редуцированное» переносами.* Мы с Шенсине назвали элементы пространства $\mathcal{D}$ «расположениями».

Расположения часто встречаются в теории центральных конфигураций. Они не всегда имеют прямое отношение к истинным частицам, расположенным на прямой. В главе 3 нам встретилась n-ка $(t_1, \ldots, t_n)$ и условие $t_1 = \ldots = t_n$. Это условие характеризует нулевое расположение.

Вторая тема. Тензорные обозначения. Линейная алгебра важна. Теория матриц важна. Линейная алгебра становится теорией матриц, когда мы выбираем базисы векторных пространств. В нашей задаче хороший выбор базиса в $\mathcal{D}^* = H$ индуцирован так называемыми «координатами Якоби». Но любой специфический выбор базиса приводит к неестественным вычислениям. Также можно было бы выбрать «любой базис», т. е. неуточненный базис, и производить выкладки с матрицами. Но тогда было бы сложно различать $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ — пришлось бы рассказывать эту старую историю о контравариантных и ковариантных координатах.

Назовем (M) математика, который любит теорию матриц и считает, что все остальное — бесполезная абстракция. Второй математик (L) изучал абстрактную линейную алгебру в университете. Наконец, третий математик (T) изучал тензорное исчисление (которое является общим), и он решил больше не быть (L) и решил переводить любой вопрос из линейной алгебры в термины тензорного исчисления (которое является менее общим).

Нам встретилось пространство $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ конфигураций из $n = m + 1$ точек в трехмерном векторном пространстве E (или в аффинном пространстве с направлением E) с точностью до переноса. Зададим нашим трем математикам вопрос: *какое пространство будет двойственным к этому пространству?*

(M) возможно ответит: наше пространство — это пространство $3 \times m$-матриц. Чтобы построить двойственное к нему, я поменяю строки и столбцы, так же как я делаю это с вектор-строками и вектор-столбцами. Двойственное пространство — это пространство $m \times 3$-матриц.

(L) возразит: дорогой (M), когда вы записываете ${}^tXQX$, то здесь X — это вектор-столбец и Q — это квадратичная форма, а X и ${}^tX$ — это два одинаковых вектора. Они не могут принадлежать двум различным пространствам $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$. Я не согласен, что двойственность связана с представлением вектора в виде строки или столбца.

Затем (L) подумает минутку и ответит: это пространство $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}, E^*)$. Затем он подумает еще одну минутку и скажет: это может быть и $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{D}^*)$, я не могу на самом деле решить. Это забавно: я могу поставить звездочки на каждом пространстве и использовать $(\mathcal{D}^*)^* = \mathcal{D}$ или я могу просто поменять порядок пространств.

(T) ответит немедленно: я не использую Hom, меня утомляют сложные обозначения. Вы спрашивали, какое пространство будет двойственным к $\mathcal{D} \otimes E$. Отвечаю: $\mathcal{D}^* \otimes E^*$.

Возникает следующий вопрос: *если $B \in \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$, то в каком пространстве находится ${}^tB$?*

(M) отвечает: очевидно, в пространстве $m \times 3$-матриц.

(L) продолжает: я натренировался делать это в университете: ${}^tB \in \mathrm{Hom}(E^*, \mathcal{D})$. Я запомнил правило наизусть: надо поменять порядок и поставить звездочки. Это отображение возвращает назад форму.

(T) отвечает: я знаю, что если $B \in \mathcal{D} \times E$, то ${}^tB \in E \times \mathcal{D}$. Мой ответ намного проще, чем ответ (L) и такой же простой, как ответ (M). Но только (M) никогда не ответит на эти вопросы правильно, потому что он имеет только две возможности, $3 \times m$ и $m \times 3$, а мы имеем восемь различных возможностей: $\mathcal{D} \otimes E$, $E^* \otimes \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^* \times E$ и т. д.

Другой вопрос: *доказать, что* $\mathrm{rank}\, B = \mathrm{rank}\, {}^tB$.

(M) отвечает: ранг матрицы находится через определители квадратных подматриц, так что это очевидно.

(L) отвечает: ранг B равен размерности образа B. Образ ${}^tB$ называется кообразом. Я изучал это позднее в университете. Имею $\dim \mathcal{D}^* = m$ и $\dim E = \nu$. Мне известно, что $\dim \ker B + \mathrm{rank}\, B = m$ (признаюсь, что я иногда путаю ν и $m\ldots$) и $\dim \ker {}^tB + \mathrm{rank}\, {}^tB = \nu$. Теперь $\ker {}^tB$ называется коядром. Оно является аннулятором образа B, поэтому его размерность равна $\nu - \mathrm{rank}\, B$. Таким образом $\mathrm{rank}\, {}^tB = \nu - (\nu - \mathrm{rank}\, B)$.

(T) отвечает: то, что (L) называет образом и кообразом, для меня — «образ слева» и «образ справа». На языке тензоров предпочтительнее говорить о «носителе», чем об «образе», но на самом деле говорить «образ» также удобно. Для симметрических и антисимметрических тензоров левый носитель и правый носитель совпадают, их называют просто носителем. *Основное предложение заключается в том, что размерности левого носителя и правого носителя равны.* Это — первое утверждение в моей теории, и его очень легко запомнить. Утверждение о том, что $\dim \ker B + \mathrm{rank}\, B = m$ является простым следствием.

(L) возразит: но вы не сможете легко обращаться с фундаментальными операциями, с композицией линейных отображений.

(T) отвечает: фундаментальные операции тензорного исчисления — это тензорное произведение и свертка. Композиция линейных отображений заключается в «свернутом произведении»; это — вторичная операция, полученная из тензорного произведения и свертки. Я использую тот же символ, что и вы, $\circ$, для композиции, и пользуюсь им так же, как это делаете вы. Но я называю его свернутым произведением. Если $\alpha \in E \otimes F$ и $\beta \in F^* \otimes G$, то $\alpha \circ \beta \in E \otimes G$. Я позволяю им «свернуться» в $\alpha \otimes \beta \in E \otimes F \otimes F^* \otimes G$, поскольку F и F^* «касаются» друг друга, если расположить их в порядке следования E, F, F^*, G.

(L) отвечает: для меня если $\alpha \in \mathrm{Hom}(F^*, E)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(G^*, F^*)$, то я могу образовать композицию $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Hom}(G^*, E)$.

(T) отвечает: мое отношение можно перевести точно так же. Вы сворачиваете элемент $\xi \in G^*$ *с правой стороны*. Вы сворачиваете сначала с β, получаете $\beta \circ \xi \in F^*$. Затем вы сворачиваете с α и получаете элемент из E. Ваша «композиция» для меня — простая игра!

(T) продолжает: но существует другая возможная интерпретация свернутого произведения $\alpha \circ \beta$ как композиции. Сворачивание $\eta \in E^*$ с левой стороны в равной степени является хорошим, и дает на вашем языке следующее: если $\widehat{\alpha} \in \mathrm{Hom}(E^*, F)$ и $\widehat{\beta} \in \mathrm{Hom}(F, G)$, то $\widehat{\beta} \circ \widehat{\alpha} \in \mathrm{Hom}(E^*, G)$. Я ставлю $\widehat{}$ для вас, это похоже на ваше транспонирование. Это не мое транспонирование, я здесь ничего не транспонирую. Я использую возможность, которая у меня имеется, чтобы читать тензорные отношения как и правила композиции слева направо.

(M) Следует ли здесь распознать выражение $\alpha_{ij}\beta^j{}_k$ моих коллег, использующих индексы и соглашение Эйнштейна?

(T): Да! Индексные обозначения по сей день составляют единственный «официально принятый» способ работы с тензорным исчислением. Схоутен в своей работе «Риччи исчисление» улучшал и исследовал их довольно много. Здесь я считаю, что с моими малыми тензорами (максимум с двумя индексами) было бы слишком «дорого» записывать индексы. Но вы можете записывать их, если желаете. Для совместимости я добавил правило к соглашению Эйнштейна: суммирование позволяется по повторным индексам, один сверху, один снизу, *которые расположены рядом в порядке следования индексов*. В нашей формуле $\alpha_{ij}\beta^j{}_k$ порядок следования такой $ijjk$, поэтому суммирование по j допускается. Вам следует использовать транспонирование, для того чтобы свести индексы вместе так, как требуется. Компенсацией вам послужит то, что вы быстро заметите, что больше нет необходимости записывать индексы.

Последний вопрос: *Как вы запишете вычисление значения квадратичной формы Q на векторе X?*

(M) отвечает ${}^tXQX$.

(L) отвечает: вместо того, чтобы использовать обозначение для квадратичной формы, я лучше обозначу через Q ассоциированное линейное отображение $Q \in \mathrm{Hom}(F, F^*)$. Тогда я использую запись $\langle Q(X), X\rangle$. Я могу также сделать нечто подобное тому, что сделал (M). Я могу рассматривать X как линейное отображение из $\mathbb{R}$ в векторное пространство F, которое содержит X. Это отображение $\lambda \mapsto \lambda X$. Тогда я использую запись ${}^tX \circ Q \circ X$. Это «1×1-матрица», вещественное число.

(T) отвечает: $X \circ Q \circ X$. Я имею $X \in F$, $Q \in F^* \otimes F^*$, но Q — это симметрическая форма, и такое обозначение для этого: $Q \in F^* \vee F^*$. Я взял это обозначение в работе [Deh], но многие авторы используют $F^* \odot F^*$. Не существует официально принятого обозначения на языке (L).

(T) продолжает: *я не транспонирую X*. Транспозиция векторов не определена: я не могу заменять пространства, как я делал это с E и $\mathcal{D}$, поскольку существует только одно пространство F. Если у нас есть другая возможность, я нарисую вам некоторые картинки, чтобы объяснить, почему ваша и моя транспозиции — это разные вещи, даже если мы согласны записать $Q = {}^tQ$.

6. Обобщенная лагранжева система и уравнения центральных конфигураций

Как вы уже обратили внимание, главу 4 написал математик (L) и он же написал работу [2]. Но теперь будет писать математик (T). Если ваш ход мысли такой же, как и у (L), вы можете легко перевести все на свой язык. Надо только интерпретировать $\circ$ как композицию. Если вы предпочитаете думать на матричном языке, как (M), вы распознаете знакомые вам формулы, но необходимо понимать, что мы четко различаем $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$.

Напомним, что наше главное пространство — это $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n/[L]$, где $L = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ и $[L]$ означает векторную прямую, порожденную L. Мы будем часто писать $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$. На самом деле $(x_1, \ldots, x_n)$ — это элемент из $\mathbb{R}^n$, класс которого есть $X \in \mathcal{D}$. Также $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D}^*$ означает, что $\xi_1 + \ldots + \xi_n = 0$. Скобка двойственности — это $\langle \xi, X\rangle = \sum_i \xi_i x_i$. Конечно, значение зависит только от класса X.

Введем некоторые обозначения. Конфигурация «позиции» — это $x \in E \times \mathcal{D}$. Ее производная по времени есть $\dot{x} = y \in E \times \mathcal{D}$. Тензор взаимных расстояний есть $\beta = {}^t x \circ x \in \mathcal{D} \vee \mathcal{D}$. Через $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ обозначаем подпространство симметрических тензоров в $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$. Подпространство антисимметрических тензоров — это $\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}$. *Мы полагаем $E = E^*$, отождествляя структуру с евклидовой структурой.* Формула $\beta = {}^t x \circ x$ — это та же самая формула, что и $T = {}^t B \circ Q \circ B$ в предыдущих двух главах, но соглашение об отождествлении означает $Q = \mathrm{Id}$, поэтому Q исчезает. Мы приняли это соглашение для того, чтобы упростить формулы.

Если заданы массы $(m_1, \ldots, m_n)$ n частиц, существует евклидова структура на $\mathcal{D}$. Евклидова форма — это «квадратичная форма масс» $\mu \in \mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$. Чтобы получить ее значение на $X \in (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$, можно применить одну из формул:

$$X \circ \mu \circ X = \frac{1}{M} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_i m_j (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_G)^2,$$

где

$$M = m_1 + \ldots + m_n \quad \text{и} \quad x_G = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n).$$

Форма μ положительно определена: если $X \circ \mu \circ X = 0$, то X — это нулевое расположение $x_1 = \ldots = x_n$.

В чисто геометрических задачах нет никаких масс, поэтому нет предпочтительного отождествления между $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$. Но после введения масс соглашение $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ становится возможным. Это упростит тензорные соотношения, которые мы установим, так же, как их упрощает равенство $E = E^*$. Но может случиться, что большинство формул, которые мы встречаем, линейны по массе, и что мы можем наблюдать это важное свойство, глядя на тензорные соотношения, только если мы не полагаем $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$.

Силовая функция и факторизация уравнений Ньютона.

Выведем полезную факторизацию уравнений Ньютона с помощью простых выкладок, используя силовую функцию. Хорошо известно, и первым это заметил Лагранж [18], что уравнения Ньютона

$$\ddot{q}_i = -\sum_{j \neq i} m_j S_{ij} q_{ji} \tag{6.1}$$

также можно записать, используя силовую функцию $U(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i<j} m_i m_j \|q_{ij}\|^{-1}$,

$$m_i \ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{6.2}$$

Но $x \in E \otimes \mathcal{D}$ — это конфигурация. Рассмотрим теперь U как функцию от x, и напишем $U(x)$. Уравнение примет вид

$$\ddot{x} \circ \mu = dU|_x. \tag{6.3}$$

Здесь $dU|_x$ означает дифференциал U в точке $x \in E \otimes \mathcal{D}$. Это есть элемент двойственного пространства $E^* \otimes \mathcal{D}^* = E \otimes \mathcal{D}^*$. К счастью, обе части уравнения принадлежат одному пространству.

Заметим теперь, что U зависит только от взаимных расстояний. Существует функция $\widehat{U}$: $\mathcal{D} \vee \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ такая, что $U(x) = \widehat{U}(\beta)$, где $\beta = {}^t x \circ x$ — это тензор взаимных расстояний. Дифференцируя это уравнение и вычисляя дифференциал на «малой» вариации x' точки x, получим

$$\langle dU|_x, x' \rangle = \langle d\widehat{U}|_\beta, {}^t x' \circ x + {}^t x \circ x' \rangle = 2 \langle d\widehat{U}|_\beta, {}^t x \circ x' \rangle,$$

поскольку $d\widehat{U} \in (\mathcal{D} \vee \mathcal{D})^* = \mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$ — симметрический тензор. Удобное выражение для скобки двойственности $\langle \phi, \psi \rangle$ элементов $\phi \in A \otimes B$ и $\psi \in A^* \otimes B^*$ следующее: $\langle \phi, \psi \rangle = \mathrm{trace}({}^t\phi \circ \psi) = \mathrm{trace}(\psi \circ {}^t\phi)$. Легкое упражнение: вывести отсюда знакомое правило $\langle a \circ b, c \rangle = \langle b, {}^t a \circ c \rangle$. Применяя это правило, получим $\langle dU|_x, x' \rangle = 2\langle x \circ d\widehat{U}|_\beta, x' \rangle$. Это верно для любого x', и отсюда следует объявленная нами факторизация, если

$$dU|_x = -x \circ \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = -2\, d\widehat{U}|_\beta \in \mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*, \tag{6.4}$$

подставить в уравнения Ньютона (6.3).

Снова факторизация уравнений Ньютона. Прямой подход. Проекция уравнений (6.1) на любую ось координат дает $\ddot{x}_i = -\sum_{j \neq i} m_i S_{ij}(x_i - x_j)$. Правая часть зависит от *расположения* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и зависит от него линейно. В левой части остается только расположение $\ddot{X} = (\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_n)$. Мы можем переписать это уравнение в виде $\ddot{X} = -X \circ \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z} \in \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}$. Отсюда следует $\ddot{X} \circ \mu = -X \circ \mathcal{Z} \circ \mu$. Сравнение этого с соотношением (6.4), спроектированным на ту же ось, наводит на мысль, что

$$\alpha = \mathcal{Z} \circ \mu \tag{6.5}$$

Чтобы проверить это отношение, выберем любое расположение $T = (t_1, \ldots, t_n)$. Имеем $(T \circ \mathcal{Z})_i = \sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(t_i - t_j)$. Поскольку $\sum_i m_i (T \circ \mathcal{Z})_i = 0$, то умножение на μ — это просто умножение каждой координаты $(T \circ \mathcal{Z})_i$ на m_i. Следовательно,

$$T \circ \mathcal{Z} \circ \mu \circ T = \sum_i \Big(\sum_{j \neq i} m_i m_j S_{ij}(t_i - t_j) \Big) t_i = \sum_{i<j} m_i m_j S_{ij}(t_i - t_j)^2.$$

Последнее тождество получается, если объединить оба члена с $m_i m_j S_{ij}$ в один. Чтобы сравнить $\mathcal{Z} \circ \mu$ с α, мы должны вычислить $d\widehat{U}$. Пусть β' со «стандартными координатами» s'_{ij}, т. е. такими что $\xi \circ \beta' \circ \xi = -\sum_{i<j} s'_{ij} \xi_i \xi_j$, будет «малой» вариацией тензора взаимных расстояний. Мы имеем

$$U = \sum_{i<j} m_i m_j s_{ij}^{-1/2}, \qquad \langle d\widehat{U}, \beta' \rangle = -\frac{1}{2} \sum m_i m_j s_{ij}^{-3/2} s'_{ij}.$$

Мы заключаем, что $\alpha = -2d\widehat{U} = \mathcal{Z} \circ \mu$, используя равенство $T \circ \mathcal{Z} \circ \mu \circ T = \langle \mathcal{Z} \circ \mu, T \otimes T \rangle$ и замечая, что если $\beta' = T \otimes T$, то $s'_{ij} = (t_i - t_j)^2$.

Замечание. Поскольку и μ, и α положительно определены на $\mathcal{D}$, «оператор» $\mathcal{Z}$ имеет $n-1$ положительных собственных значений.

Обобщенная лагранжева система. Теперь можно эффективно работать с взаимными расстояниями. Абсолютное состояние — это (x, y), где $y = \dot{x}$. Основные инварианты относительно действия изометрий — следующие:

$$\beta = {}^t x \circ x, \quad \gamma = \frac{1}{2}({}^t y \circ x + {}^t x \circ y), \quad \rho = \frac{1}{2}({}^t y \circ x - {}^t x \circ y), \quad \delta = {}^t y \circ y.$$

Мы разложили ${}^t y \circ x$ на симметрическую часть и антисимметрическую часть. В случае трех тел ρ имеет только одну координату, скаляр ρ использовался в первой главе. Лагранжева система имеет вид:

$$\begin{gathered}
\dot{\beta} = {}^t \dot{x} \circ x + {}^t x \circ \dot{x} = 2\gamma, \\
\dot{\gamma} = \delta - \frac{1}{2}({}^t \mathcal{Z} \circ {}^t x \circ x + {}^t x \circ x \circ \mathcal{Z}) = \delta - \frac{1}{2}({}^t \mathcal{Z} \circ \beta + \beta \circ \mathcal{Z}), \\
\dot{\delta} = -{}^t \mathcal{Z} \circ {}^t x \circ y - {}^t y \circ x \circ \mathcal{Z} = -{}^t \mathcal{Z} \circ \gamma - \gamma \circ \mathcal{Z} + {}^t \mathcal{Z} \circ \rho - \rho \circ \mathcal{Z}, \\
\dot{\rho} = -\frac{1}{2}({}^t \mathcal{Z} \circ \beta - \beta \circ \mathcal{Z}).
\end{gathered}$$

Вновь наблюдаем, что система является замкнутой, т. е. правая часть выражается только через β, γ, ρ, δ и $\mathcal{Z}$. Заметим, что $\mathcal{Z}$ — функция от β и от масс. В случае трех тел мы доказали в качестве упражнения, что твердотельное движение является относительным равновесием. Ниже проделаем это снова.

Допустим, что β — константа. Тогда $\dot{\beta} = 2\gamma = 0$. В силу второго уравнения $2\delta = {}^t\mathcal{Z} \circ \beta + \beta \circ \mathcal{Z}$. Поэтому δ постоянно и $0 = {}^t\mathcal{Z} \circ \rho - \rho \circ \mathcal{Z}$ из третьего уравнения. Пусть $\rho_{\mu\nu}$ и $\beta_{\mu\nu}$ — это матрицы форм ρ и β в базисе, в котором $\mathcal{Z}$ является диагональной с диагональными элементами $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Это уравнение имеет вид $(\zeta_\nu - \zeta_\mu)\rho_{\nu\mu} = 0$, а последнее уравнение системы есть $\dot{\rho}_{\mu\nu} = -(\zeta_\mu - \zeta_\nu)\beta_{\mu\nu}/2$. Для (μ, ν) таких, что $\zeta_\nu = \zeta_\mu$ мы имеем $\dot{\rho}_{\mu\nu} = 0$. Для остальных значений имеем $\rho_{\mu\nu} = 0$. Поэтому $\dot{\rho} = 0 = \dot{\beta} = \dot{\gamma} = \dot{\delta}$. Состояние является относительным равновесием.

Равновесные конфигурации. Для движения относительного равновесия имеем $\dot{\rho} = 0$, таким образом

$${}^t\mathcal{Z} \circ \beta - \beta \circ \mathcal{Z} = 0.$$

Это уравнение относительно неизвестной $\beta = {}^t x \circ x$ (относительной конфигурации) определяет то, что мы называем *равновесной* конфигурацией. Можно доказать, что существуют движения относительного равновесия с любой такой конфигурацией. Если конфигурация не является центральной, такое движение будет как минимум четырехмерным. Отсюда можно было бы заключить, что равновесные конфигурации бесполезны в обычной трехмерной динамике. Тем не менее, Мёкель показал в 1997 году, что кластеры малых масс в центральной конфигурации являются асимптотически равновесными конфигурациями.

Главный известный результат о равновесных конфигурациях был установлен в главе 2: любая равновесная конфигурация трех частиц с равными массами является равнобедренным треугольником. Некоторые результаты в случае трех частиц с разными массами можно найти в работе [2]. Закончим следующей характеристикой.

Лемма. *Для любой равновесной конфигурации $x \in E \otimes \mathcal{D}$ «полной» размерности* $\dim E$ *существует положительная форма $S \in E \vee E$, такая что $S \circ x = x \circ \mathcal{Z}$.*

Доказательство. Пусть $F \subset \mathcal{D}$ — это правый образ (или кообраз) отображения x. Необходимое условие для существования S состоит в том, чтобы правый образ G отображения $x \circ \mathcal{Z}$ содержался в F. Но F — это образ β в силу того аргумента, что «изотропия влечет вырождение» (который использовался в доказательстве леммы 3, глава 4), и, следовательно, G является правым образом $\beta \circ \mathcal{Z}$. Тогда равенство ${}^t\mathcal{Z} \circ \beta = \beta \circ \mathcal{Z}$ влечет $G \subset F$, что и требовалось. На самом деле, поскольку $\mathcal{Z}$ обратим, то $F = G$. Но не хотелось бы использовать это свойство $\mathcal{Z}$ здесь. Теперь мы ограничим все на $F \subset \mathcal{D}$. В частности, $x \in E \otimes F$ обратим, поэтому просто положим $S = x \circ \mathcal{Z} \circ x^{-1} = {}^t x^{-1} \circ (\beta \circ \mathcal{Z}) \circ x^{-1}$. ■

Центральные конфигурации. Конфигурация $x \in E \otimes \mathcal{D}$ является центральной $\Longleftrightarrow$ существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\lambda x = x \circ \mathcal{Z}$. Обозначим $\check{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} - \lambda\,\mathrm{Id}$. *Конфигурация является центральной с множителем $\lambda \Longleftrightarrow x \circ \check{\mathcal{Z}} = 0$.* Это означает, что правый образ $F \subset D$ отображения x принадлежит ядру $\check{\mathcal{Z}}$.

Взаимные расстояния. Мы можем также охарактеризовать относительную конфигурацию β. Поскольку F является также образом β, *относительная конфигурация $\beta \in \mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ является центральной с множителем $\lambda \Longleftrightarrow \beta \circ \check{\mathcal{Z}} = 0$.*

В случае Дзёбека, разобранном в главе 3, размерность F равна $n - 2$, поэтому ранг $\widehat{Z}$ равен единице. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \in \mathcal{D}^*$ и $d = (\Delta_1/m_1, \ldots, \Delta_n/m_n) \in \mathcal{D}$ — это величины, встречавшиеся в той главе. Читатель легко может проверить тождество $\check{\mathcal{Z}} = \Delta \otimes d$.

Dizzy-конфигурации. Dizzy[5]-конфигурация x с множителем λ — это конфигурация такая, что $\beta = {}^t x \circ x$ удовлетворяет равенству

$$ {}^t\check{\mathcal{Z}} \circ \beta + \beta \circ \check{\mathcal{Z}} = 0, \qquad \text{где} \qquad \check{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} - \lambda\,\mathrm{Id}. $$

Для dizzy-конфигурации $x \in E \otimes \mathcal{D}$ с рангом $\dim E$ существует $\Omega \in E \wedge E$ такое, что $\Omega \circ x = x \circ \check{\mathcal{Z}}$. В этом случае рассуждения такие же, как и в равновесном, но здесь $\beta \circ \widehat{\mathcal{Z}}$ антисимметрично.

Dizzy $\Longrightarrow$ центральная. Умножая $\Omega \circ x = x \circ \check{\mathcal{Z}}$ на $\mu \circ {}^t x$ справа, мы заметим, что $\Omega \circ x \circ \mu \circ {}^t x$ симметрично. Выберем ортонормированный базис в E, где форма $b = x \circ \mu \circ {}^t x$, которая является тензором инерции конфигурации, диагональна с элементами $b_1, \ldots, b_\nu$ на диагонали. Если в этом базисе $\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant \nu}$, то $\Omega_{ij}(b_j + b_i) = 0$. Тогда $\Omega_{ij} = 0$ для всех $i < j$, т. е. $\Omega = 0$. Наконец, $x \circ \check{\mathcal{Z}} = 0$ и конфигурация является центральной.

Dizzy-конфигурации и центральные конфигурации — это одно и то же, поэтому читатель может задаться вопросом, для чего мы ввели новое забавное название. Оказывается, что центральные конфигурации очень важны и определяются точно так же в задаче n гельмгольцевых вихрей на плоскости. Роль масс здесь играют завихренности, и они могут быть отрицательными. И существуют dizzy-конфигурации на плоскости, которые не являются центральными, если позволить массам быть отрицательными. Снова рассуждая так же, как и выше, найдем необходимое ограничение: $b_1 + b_2 = 0$. Но $b_1 + b_2$ — это след тензора инерции, а также момент инерции I относительно центра масс. Поэтому у нас получится $I = 0$ для этих конфигураций. Dizzy-конфигурации дают самоподобные движения в задаче n вихрей, в то время как центральные конфигурации дают относительные равновесия.

Развернутые уравнения. Тензор взаимных расстояний β имеет стандартные координаты s_{ij}. Под этим утверждением мы просто подразумеваем, что $\xi \circ \beta \circ \xi = -\sum_{i<j} s_{ij}\xi_i\xi_j$ для любого $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D}^*$. Чтобы получить s_{ij} явно из β, сначала положим $e^*_{ij} = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0) \in \mathcal{D}^*$, где -1 стоит на i-м месте, а 1 стоит на j-м месте; тогда $s_{ij} = e^*_{ij} \circ \beta \circ e^*_{ij}$. Это хорошая возможность ответить на вопрос упражнения, оставленного читателю в главе 4. Поскольку $\beta = {}^t x \circ x$ и $x \circ e^*_{ij} = q_{ij}$, получаем $s_{ij} = \langle q_{ij}, q_{ij} \rangle$.

Чтобы получить развернутые уравнения для ${}^t\check{\mathcal{Z}} \circ \beta + \beta \circ \check{\mathcal{Z}} = 0$, можно было бы использовать представление наших тензоров через $n \times n$-матрицы. Но быстрее будет считать так, как мы уже это делали выше. У нас есть $n(n-1)/2$ стандартных координат тензора ${}^t\check{\mathcal{Z}} \circ \beta + \beta \circ \check{\mathcal{Z}}$ — это $e^*_{ij} \circ ({}^t\check{\mathcal{Z}} \circ \beta + \beta \circ \check{\mathcal{Z}}) \circ e^*_{ij} = 2e^*_{ij} \circ \beta \circ \check{\mathcal{Z}} \circ e^*_{ij}$. Запишем

$$ e^*_{ij} \circ \beta \circ \check{\mathcal{Z}} \circ e^*_{ij} = (e^*_{ij} \circ {}^t x) \circ (x \circ \check{\mathcal{Z}} \circ e^*_{ij}) = -\langle q_{ij}, \ddot{q}_{ij} + \lambda q_{ij} \rangle $$

Оказывается, мы уже вычисляли $\langle q_{ij}, \ddot{q}_{ij} \rangle$ в главе 1. Мы ввели

$$ \Sigma_{ij} = (m_i + m_j)S_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} + S_{jk}) $$

и нашли

$$ \langle q_{ij}, \ddot{q}_{ij} \rangle = -\Sigma_{ij} s_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} - S_{jk})(s_{ik} - s_{kj}). $$

Развернутые уравнения для dizzy-конфигураций с множителем $\lambda > 0$ будут таким образом иметь вид

$$ 0 = (\Sigma_{ij} - \lambda)s_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} - S_{jk})(s_{ik} - s_{kj}). $$

[5]Один из вариантов перевода с английского языка слова «dizzy» — головокружительный. — *Прим. перев.*

Эти уравнения, связанные с некоторыми уравнениями, принадлежащими Дзёбеку, недавно использовались Хэмптоном и Мёкелем для решения знаменитой гипотезы: существует конечное число центральных конфигураций из четырех частиц с положительными массами m_1, m_2, m_3 и m_4.

Некоторые другие конфигурации, обобщающие центральные конфигурации. Равновесные конфигурации обобщают центральные конфигурации. Опишем кратко другие интересные возможности обобщения.

В лекции на семинаре Эрмана в 1986 году Йоккос ввел то, что можно назвать «минимальными конфигурациями». Для заданной конфигурации $x \in E \otimes \mathcal{D}$ мы ищем «минимальную конфигурацию» в классе тех x', которые имеют тот же самый правый образ (или кообраз) $F \subset \mathcal{D}$, что и x. Они являются конфигурациями формы $R \circ x$, где R — это некоторое обратимое линейное преобразование, действующее на E. Относительные конфигурации, соответствующие этому классу, — это формы β с образом F. Они образуют связное открытое множество в некотором линейном подпространстве пространства $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$.

Функция, которую Йоккос минимизировал на этом классе — это $U + \lambda I/M$. Как и раньше

$$U = \sum_{i<j} m_i m_i s_{ij}^{-1/2}, \quad I = \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i m_j s_{ij}, \quad M = \sum_i m_i.$$

Используя свойство выпуклости функции U, которая выражается как функция тензора взаимных расстояний, легко доказать, что функция $U + \lambda I/M$ имеет не более одной критической точки на классе, которая должна быть точкой минимума. Кроме того, *центральная конфигурация с множителем λ — это минимальная конфигурация с множителем λ.*

Позднее Страуме ввел некоторые специальные конфигурации, определив их как конфигурации, для которых ньютоново ускорение $\ddot{q}_i$ частицы i пропорционально $q_i - q_G$, где q_G — центр масс. В отличие от центральных конфигураций коэффициент пропорциональности может зависеть от индекса i. Задача нахождения масс, для которых заданная геометрическая конфигурация является конфигурацией Страуме, чрезвычайно интересна.

Благодарности: Мартину Селли, Алану Шенсине, Ричарду Кашмену, Жаку Феджюсу, Яннинь Фу, Йиминь Лонгу, Даниэлю Майеру, Эрнесто Перес-Шавела, Шанжонг Сану.

Список литературы

[1] Albouy A. *On a paper of Moeckel on Central Configurations* // Regular and Chaotic Dynamics, 2003, V. 8, p. 133–142.

[2] Albouy A., Chenciner A. *Le problème des N corps et les distances mutuelles* // Inventiones Mathematicae, 1998, V. 131, p. 151–184.

[3] Albouy A., Llibre J. *Spatial central configurations for the* $1+4$ *body problem*. Proceedings of an International Conference dedicated to D. Saari // Contemporary Mathematics, 2002, V. 292, p. 1–16.

[4] Banachiewitz T. *Sur un cas particulier du problème des trois corps* // C. R. Acad. Sci. Paris, 1906, V. 142, p. 510–512.

[5] Betti E. *Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra di loro* // Annali di Matematica, 1877, S. 2, T. 8, p. 301–311.

[6] Birkhoff G. D. *Dynamical Systems*. Providence, RI, 1927; American Math. Soc., 1966.

[7] Borchardt C. W. *Über die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalt der Seitenflächen für mehr als drei Dimensionen entspricht* // Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, p. 121–155, Werke p. 201–232.

[8] Carathéodory C. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. 1933, p. 257–267.

[9] Cayley A. *On a theorem in the geometry of position* // œuvres, 1841, V. 1, p. 1–4,

[10] Celli M. *Sur les distances mutuelles d'une chorégraphie à masses distinctes* // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2003, V. 337, p. 715–720.

[11] Darboux G. *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace* // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1872, S. 2, T. 1, p. 323–392.

[12] Dziobek O. *Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems* // Astron. Nachr., 1900, B. 152, S. 33–46.

[13] Deheuvels R. *Tenseurs et Spineurs*. Presses Universitaires de France, 1993.

[14] Hampton M. *Concave central configurations in the four-body problem*. Thesis, 2002.

[15] Hampton M., Moeckel R. *Finiteness of relative equilibria of the four-body problem*. Preprint, 2004.

[16] Jacobi C. G. J. *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, 1842, gesammelte Werke 4, Chelsea, p. 297–314.

[17] Lagrange J. L. *Essai sur le problème des trois corps* // œuvres, 1772, V. 6, p. 229–324.

[18] Lagrange J. L. *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps* // œuvres, 1777, V. 4, p. 401–418.

[19] Long Y., Sun S. *Four-Body Central Configurations with some Equal Masses* // Arch. Rational Mech. Anal., 2002, V. 162, p. 25–44.

[20] MacMillan W. D., Bartky W. *Permanent Configurations in the Problem of Four Bodies* // Trans. Amer. Math. Soc., 1932, V. 34, p. 838–875.

[21] Marsden J., Weinstein A. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry* // Rep. Math. Phys., 1974, V. 5, p. 121–130.

[22] Meyer K. *Symmetries and integrals in mechanics*. In: «Dynamical Systems", ed. M. Piexoto. Academic Press, New York, 1973, p. 259–272.

[23] Moeckel R. *Relative equilibria with clusters of small masses* // J. Dynam. Differential Equations, 1997, V. 9, p. 507–533.

[24] Müntz Ch. H. *Die Ähnlichkeitsbewegungen beim allgemeinen n-Körperproblem* // Math. Zeitschrift, 1922, B. 15, S. 169–187.

[25] Murnaghan F. D. *A symmetric reduction of the planar three-body problem* // Amer. J. Math., 1936, V. 58, p. 829–832.

[26] Pizzetti P. *Casi particolari del problema dei tre corpi* // Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 1904, S. 5, V. 13, p. 17–26.

[27] Almeida Santos A. *Dziobek's configurations in restricted problems and bifurcation*. To appear in Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.

[28] Schoenberg I. J. *Remarks to Maurice Fréchet's article: Sur la définition d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert* // Annals of Mathematics, 1935, V. 36, p. 724–732.

[29] Schoenberg I. J. *Metric spaces and positive definite functions* // Transactions of AMS, 1938, V. 44, p. 522–536.

[30] Schouten J. A. *Ricci-Calculus, An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*. 2-nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[31] Smale S. *Topology and mechanics II* // Invent. Math., 1970, V. 11, p. 45–64.

[32] Straume E. Preprint, 2003.

[33] Weyl H. *The classical groups, Their invariants and representations*. Princeton University Press, 1953, 30 p.

[34] Wintner A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* // Princeton Math. Series 5, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.