

## Вихревая динамика волновых следов\*

**Хассан Ареф**

Department of Engineering Science & Mechanics  
Virginia Tech, Blacksburg, VA 24061, USA

Center for Fluid Dynamics  
Technical University of Denmark,  
Lyngby, DK-2800, Denmark

Рассматривается ряд задач, связанных с динамикой вихревых образований, наблюдаемых в спутных течениях. В число этих задач входят: универсальные соотношения для числа Струхали—Рейнольдса; гамильтонова динамика точечных вихрей в периодической полосе как для классической задачи с двумя вихрями на полосе, которая дает структуру и самоиндуцированную скорость традиционной вихревой дорожки, так и для задачи трех вихрей в полосе, которая предлагается в качестве описания следа за осциллирующим телом. Дается теоретический анализ бифуркационной диаграммы структуры следа, найденной экспериментально Вильямсоном и Рошко.

Ключевые слова: число Струхали—Рейнольдса, завихренность, задача трех вихрей, диаграмма бифуркации.

**Hassan Aref**

### Vortex dynamics of wakes

Several problems related to the dynamics of vortex patterns as observed in wake flows are addressed. These include: The universal Strouhal-Reynolds number relation. The Hamiltonian dynamics of point vortices in a periodic strip, both the classical two-vortices-in-a-strip problem, which gives the structure and self-induced velocity of the traditional vortex street, and the three-vortices-in-a-strip problem, which is argued to be relevant to the wake behind an oscillating body. The bifurcation diagram for wake structure found experimentally by Williamson and Roshko is addressed theoretically.

Keywords: Strouhal-Reynolds number, vorticity, three-vortices-in-a-strip problem, bifurcation diagram.

Mathematical Subject Classifications: 76B47, 76U05

---

\* Эта статья будет опубликована в Трудах IUTAM-симпозиума «Гамильтонова динамика. Вихревые структуры. Турбулентность» (Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence) в издательстве Springer-Verlag. Настоящий русский перевод выполнен для публикации в журнале «Нелинейная Динамика» с разрешения автора статьи и издательства.

## 1. Введение

Вихревые следы встречаются повсеместно. Мы можем создать их в лаборатории и наблюдаем в природе. Мы видим их в атмосферах планет. Недавно эффектные вихревые следы при очень больших числах Рейнольдса были обнаружены на спутниковых снимках за некоторыми островами (см. рис. 1). Их важность можно оценить по таким примерам как обрушение моста Такома Нерроуз 7 ноября 1940 г.

Явление вихревых дорожек на качественном уровне наблюдалось в течение многих лет, но их теория появилась лишь после основополагающей работы Т. фон Кармана в 1911–1912 гг. [13, 14, 15]. Вклад фон Кармана был признан настолько важным, что на марке, выпущенной в Венгрии в 1992 г в память о нем, его портрет помещен на фоне картины потока (в подвижной системе) в случае шахматной вихревой дорожки, для которой он установил отсутствие линейной неустойчивости (см. рис. 2). Я вернусь к вкладу фон Кармана в разделе 4. Сначала позвольте мне отметить другой очень важный результат, полученный, в основном, из экспериментов, а именно хорошо известное соотношение между *числом Струхаля* для генерации вихрей в струе и *числом Рейнольдса* для потока, порождающего след (см. рис. 3). Начнем с вопроса: что можно сказать об этом соотношении с точки зрения теории?

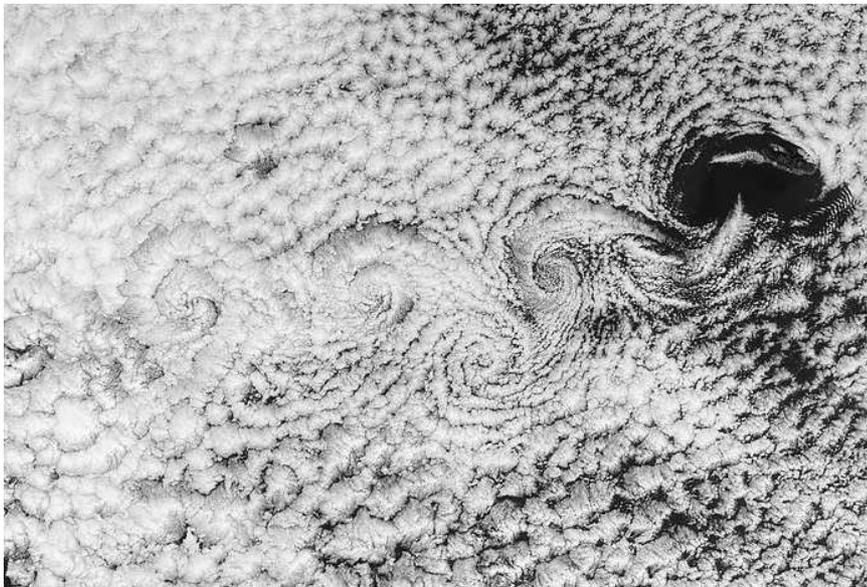


Рис. 1. Хорошо сформировавшаяся вихревая дорожка за островом Мадейра на космическом снимке, сделанном НАСА 26 апреля 2002 г.

## 2. Соотношение чисел Струхаля–Рейнольдса

Эмпирически установлено, что число Струхаля, являющееся безразмерной частотой генерации вихрей, связано с числом Рейнольдса для потока, порождающего след, соотношением

$$St = 0.2175 - \frac{5.1064}{Re}, \quad (2.1)$$



для «ламинарного» режима (режим I на рис. 3; до  $Re \approx 200$ ) и

$$St = 0.212 - \frac{2.7}{Re}, \quad (2.2)$$

для больших значений  $Re$ , скажем, 400 и выше. Последняя аппроксимация содержит известное предельное значение (0.212) числа Струхала при больших значениях числа Рейнольдса. Разумеется, в случае второго режима (режим II на рис. 3) поток не реагирует одной единственной частотой, но число Струхала соответствует частоте с максимальной энергией.

Существует также переходный режим (режим III на рис. 3), где на кривой появляется подобие разрыва. Этот режим связан с трехмерным вихревым движением в следе. В рамках данной статьи мы не будем обсуждать этот режим.

В решении этой задачи мы использовали следующий подход: во-первых, напомним, что из уравнений Навье–Стокса следует лишь, что  $St$  является функцией  $Re$ , т.е. что существует некоторое функциональное соотношение  $St = f(Re)$ , где  $f$  необходимо (каким-то образом) определить из уравнений движения с учетом формы тела. Во-вторых, по аналогии с феноменологией фазовых переходов или на основе общих принципов теории бифуркаций мы принимаем, что вблизи бифуркации число Струхала можно выразить как степенную функцию от отклонения  $1/Re$  от его критического значения при бифуркации, т.е. следует ожидать, что при  $Re \approx Re_{crit}$

$$St = A \left( \frac{1}{Re_{crit}} - \frac{1}{Re} \right)^\alpha, \quad (2.3)$$

где  $Re_{crit}$  — число Рейнольдса для бифуркации (которое нельзя считать универсальным),  $A$  — не универсальный коэффициент, но  $\alpha$  — универсальный показатель степени. Далее из эксперимента следует, что  $\alpha = 1$ , что указывает на то, что теория рассматриваемого явления относится к полю осредненных величин.



Рис. 2. Венгерская почтовая марка, выпущенная в память о фон Кармане. На заднем плане изображена картина потока для шахматной дорожки точечных вихрей

Итак, к какому уравнению надо пытаться применить анализ на уровне поля осредненных величин? В качестве естественного кандидата мы в [24] рассматривали следующее двумерное

уравнение завихренности

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta = \nu \nabla^2 \zeta, \quad (2.4)$$

В цитированной выше работе мы оценивали члены последнего уравнения следующими величинами

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx f \Delta \zeta, \quad \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta \approx U \frac{\Delta \zeta}{d}, \quad \nu \nabla^2 \zeta \approx \nu \frac{\Delta \zeta}{d^2}. \quad (2.5)$$

Здесь  $f$  — частота отрыва вихрей, задающая естественный масштаб времени для потока,  $U$  — скорость свободного потока, а  $d$  — диаметр цилиндра. Величина  $\Delta \zeta$  дает масштаб флуктуаций завихренности в формирующемся вихревом следе. Существуют точки с высокой завихренностью, в первую очередь в вихрях, которые образуют вихревую дорожку, и точки с меньшей завихренностью в слоях и других «фоновых» структурах потока которые, в конце концов, будут поглощены вихрями.

В нашей статье [24] на основе подробного анализа процесса образования вихревого следа с использованием численного моделирования мы показали, что эффект вязкостного члена проявляется исключительно в рассредоточении и замедлении процесса формирования вихрей, т. е. в балансе завихренности в головной части следа этот член следует рассматривать как сток. Мы показали также, что эффект части адвективного члена в правой части проявляется в группировании вихрей (остальная часть просто адвектирует завихренность вниз по потоку). Это член представляет источник для формирования вихрей, который должен входить в баланс завихренности со знаком плюс. На основе такого типа оценок порядка величины и физических соображений для определения знаков вклада различных компонентов мы можем переписать уравнение завихренности в следующем виде (на основе порядков величин со знаками):

$$f \Delta \zeta = k_\alpha U \frac{\Delta \zeta}{d} - k_d \nu \frac{\Delta \zeta}{d^2}, \quad (2.6)$$

где  $k_\alpha$  и  $k_d$  — два безразмерных параметра, для определения которых требуется более тщательный анализ. Легко видеть, что это соотношение после сокращения на  $\Delta \zeta$  всех членов и умножения на  $d/U$  превращается в эмпирическое соотношение чисел Струхалья—Рейнольдса.

В связи с этим простым «выводом» может возникнуть ряд вопросов, например, корректно ли сокращать  $\Delta \zeta$  во всех членах<sup>1</sup>. В частности, приближенная оценка адвективного члена может вызывать сомнения. Мы не будем углубляться в обсуждение этих вопросов (более подробный анализ см. в цитируемой статье), ограничившись предположением, что корректный и строгий подход к этой проблеме требует поиска автомодельного решения для уравнения завихренности, которое каким-то образом применимо к генерации вихрей. Мы оставим эту задачу читателю!

### 3. Гамильтонова динамика для динамики точечных вихрей

Модель точечного вихря берет свое начало с основополагающей работы Гельмгольца по динамике вихрей 1858 г. [17]. Наиболее элегантную формулировку можно получить, объединив координаты  $x$  и  $y$  вихря в комплексную координату  $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Уравнения движения принимают вид

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta}. \quad (3.1)$$



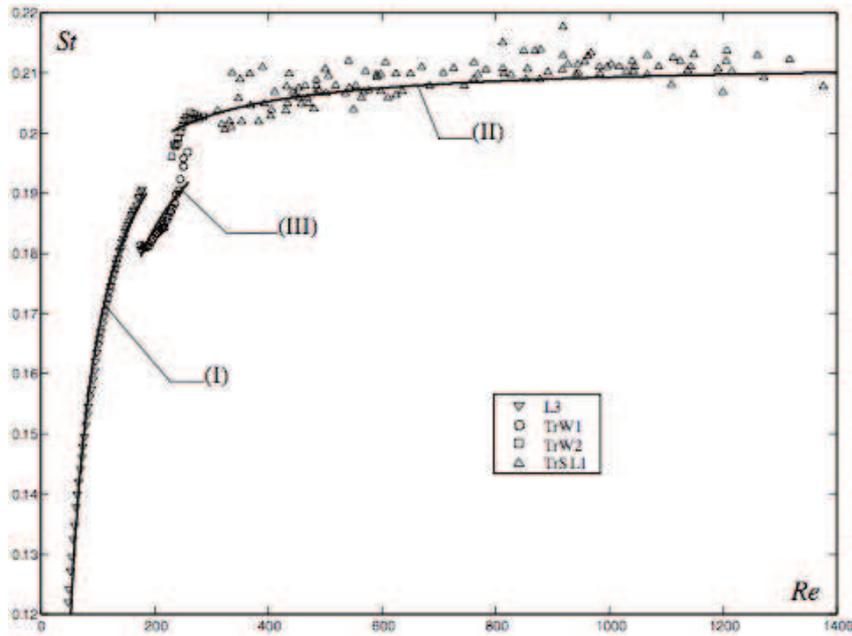


Рис. 3. Эмпирическое соотношение чисел Струхала–Рейнольдса для потока за цилиндром. Для обозначения разных режимов генерации вихрей, сокращенно обозначенных L3, TrW1 и т.д., мы использовали разные символы. Разделение на три обобщенных режима I, II и III описано в тексте

Здесь  $\Gamma_\beta$  — циркуляции вихрей, инвариантных во времени по теории Гельмгольца — возможно, лучше по циркуляционной теореме Кельвина, звездочка слева обозначает взятие комплексно сопряженного значения, точка — дифференцирование по времени, а штрих у знака суммы напоминает о необходимости пропускать сингулярный член  $\beta = \alpha$ .

Гельмгольц дал решение задачи двух вихрей, в котором он показал, что два вихря имеют орбиты в виде концентрических окружностей, которые в частном случае пары вихрей вырождаются в перенос по параллельным линиям.

Важный вклад в формальное развитие этой теории внес Кирхгофф [18], который в своих лекциях по теоретической физике, опубликованных в нескольких изданиях, начиная с 1876 г., показал, что уравнения точечного вихря можно преобразовать в каноническую гамильтонову форму

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \tag{3.2}$$

где гамильтониан  $H$  имеет вид

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log |z_\alpha - z_\beta|. \tag{3.3}$$

Мы опять исключаем сингулярные члены  $\alpha = \beta$  и напоминаем себе о необходимости делать это штрихом на знаке суммы. Полное соответствие с гамильтоновой формой уравнений движения достигается выбором обобщенных координат  $q_\alpha = x_\alpha$  и обобщенных импульсов  $p_\alpha = \Gamma_\alpha y_\alpha$ . Отсюда видно также, что *фазовым пространством для вихрей является конфигурационное*

<sup>1</sup>Я благодарен Т. Бору, который поднял этот вопрос.



*пространство* — свойство, которое имеет важные последствия как в статистической физике точечных вихрей, так и для явления хаотической адвекции [2]. Многие из этих проблем освещались другими участниками этого симпозиума.

Гамильтонов характер уравнений точечных вихрей немедленно ведет к важным шагам в вопросе о существовании интегралов движения, а отсюда и интегрируемости задачи  $N$  вихрей. Так инвариантность  $H$  относительно параллельного переноса и вращения координат, а также его независимость от времени дает интегралы  $X$ ,  $Y$  и  $I$  в виде

$$X + iY = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} z_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} |z_{\alpha}|^2, \quad (3.4)$$

и, разумеется, сам  $H$ . Величины  $X$  и  $Y$  представляют собой две компоненты *линейного импульса*. Величина  $I$  представляет *момент импульса*.

Следуя формализму классической динамики, мы вводим *скобку Пуассона*

$$[f, g] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{\Gamma_{\alpha}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial y_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial y_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad (3.5)$$

*Фундаментальные скобки* можно записать в виде

$$[z_{\alpha}, z_{\beta}] = 0, \quad [z_{\alpha}, z_{\beta}^*] = -\frac{2i}{\Gamma_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Теперь мы получаем ключевые результаты

$$[X, Y] = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}, \quad [X, I] = 2Y, \quad [Y, I] = -2X, \quad (3.7)$$

из которых следует очень важный результат

$$[X^2 + Y^2, I] = 2X[X, I] + 2Y[Y, I] = 0. \quad (3.8)$$

Из полученных результатов следует, (а) что взятие скобки Пуассона не приводит к появлению новых интегралов и (б) что задача всегда имеет три независимых интеграла в *инволюции*, а именно,  $X^2 + Y^2$ ,  $I$  и  $H$ .

В своих лекциях в 1891–1892 гг. [23] Пуанкаре уже понимал это и (исходя из того, что мы сейчас называем теоремой Лиувилля) заключил, что задача трех вихрей на неограниченной плоскости всегда интегрируема. Очевидно, эта задача не вызвала у него большого интереса, и он никогда к ней не возвращался. Общий формализм, изложенный выше, был развит итальянским ученым Е. Лаура в ряде статей в начале 20-го века, но оставался неустраиваемым несколько десятилетий.

В действительности, задача трех вихрей была полностью решена примерно за 15 лет до появления работы Пуанкаре молодым швейцарским математиком У. Грёбли, диссертация которого [12] в 1877 г. по некоторым причинам оставалась незамеченной<sup>2</sup> около столетия. Даже возрождение работы Грёбли в важной статье [31] Дж. Л. Синга для первого выпуска нового *Канадского математического журнала* в 1949 г. — выпуска, содержавшего основополагающую статью

<sup>2</sup>Это произошло, несмотря на ссылки на нее в лекциях Кирхгоффа (2-е изд.) [18] и в хорошо известном тексте Лэмба [19].

Эйнштейна и Инфельда по общей теории относительности, не помогло этому решению проблемы трех вихрей занять достойное место в гидрогазодинамике. Обзор этой истории можно найти в [5].

Оказалось, что в решении Грёбли, как и в более поздних работах Синга, Новикова и автора этой статьи [31, 22, 1] для частного случая  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$  имеется некоторый пробел. Несмотря на то, что этот случай в принципе охватывается общим анализом, он допускает намного более полное рассмотрение. Такое рассмотрение было представлено Роттом [28] и автором данной статьи [3]. По существу, наше решение проблемы показывает, что относительное расстояние между двумя из трех вихрей, например, вихрями 1 и 2, т. е.  $Z = z_1 - z_2$ , меняется со временем так, как если бы это было положение фиктивной пассивной частицы в поле трех *фиксированных* вихрей. Интенсивности и положения в пространстве для трех этих фиксированных вихрей соответствуют интенсивностям исходных трех вихрей и линейным импульсам исходной системы трех вихрей. Таким образом, если исходные три вихря имеют интенсивности  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , то три фиксированных вихря в задаче адвекции будут иметь интенсивности  $\Gamma_1^{-1}, \Gamma_2^{-1}, \Gamma_3^{-1}$ . (Все, что отсюда следует — это пропорция между интенсивностями вихрей, т. к. абсолютное значение может меняться в зависимости от масштабирования по времени и пространству).

Эта редукция задачи — от трех точек, соответствующих трем исходным вихрям к одной точке, соответствующей частице, адвектируемой потоком — в чем то сходна с тем, что происходит в задаче Кеплера в небесной механике, где движение двух взаимодействующих точечных масс разбивается на тривиальное движение центра масс и относительное движение. Это ведет к следующему сценарию. Существует *физическая плоскость*, где происходит движение трех рассматриваемых вихрей, т. е. положения вихрей  $z_1, z_2, z_3$  «живут» в этой плоскости. Существует также *фазовая плоскость*, где происходит адвекция фиктивных частиц, т. е. в этой плоскости происходит эволюция  $Z$ .

Для трех вихрей на бесконечной плоскости задача адвекции в фазовой плоскости сравнительно проста. Имеется четыре четко различающихся режима движения. Три из них возникают очевидным образом, когда два из вихрей оказываются ближе друг к другу, чем к третьему вихрю, и поэтому движутся как бы в «связанном состоянии». Четвертый режим соответствует истинно «коллективным состояниям», в которых все три вихря находятся в непрерывном взаимодействии.

#### 4. Моделирование следов точечными вихрями

Как впервые показали Ареф и Стремлер [6, 30], метод решения для трех вихрей на неограниченной плоскости может быть распространен на задачу трех вихрей в области с периодическими граничными условиями. В случае вихрей в периодической полосе, которая представляет собой случай, легче всего применимый к вихревым следам, необходимо, как и в неограниченном случае, оговорить, что  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$ . (В случае вихрей в периодическом параллелограмме периодичность потока гарантирует, что сумма «базовых» вихрей в базовом параллелограмме равна нулю.) Уравнения движения для вихрей в периодической полосе шириной  $L$  имеют вид

$$\dot{z}_\alpha^* = \frac{1}{2Li} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \quad (4.1)$$

По-видимому, эти уравнения впервые были получены в 1928 г. Фридманном и Полубариновой [11].

Проявляя мудрость задним числом, можно сказать, что теория фон Кармана для структуры дорожки вихрей следует из (4.1) при  $N = 2$  и  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ , а его теория устойчивости вихревых дорожек, благодаря более поздней работе Домма [10], следует почти полностью, хотя и не вполне, из (4.1) при  $N = 4$  и  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3 = -\Gamma_4 = \Gamma$ . (Возможно, наиболее доступное изложение теории фон Кармана современный читатель может найти в [19]).

Вкратце, теория фон Кармана для вихревых дорожек показывает, во-первых, что единственными конфигурациями из двух вихрей на полосу, которые распространяются вниз по потоку, являются симметричные и шахматные конфигурации. Из варианта (4.1) для двух вихрей легко вывести, что пара  $\pm\Gamma$  в периодической полосе распространяется со скоростью

$$U - iV = \frac{\Gamma}{2Li} \operatorname{ctg} \left[ \frac{\pi}{L}(z_+ - z_-) \right]. \quad (4.2)$$

Для того, чтобы скорость была действительной, т. е. чтобы в (4.2) было  $V = 0$ , котангенс должен быть чисто мнимым. Это означает, что  $\Re(z_+ - z_-) = 0$  или  $\Re(z_+ - z_-) = L/2$ . Первая возможность соответствует симметричным вихревым дорожкам, а вторая — шахматным.

Далее фон Карман изучил устойчивость этих двух типов конфигураций. По существу, он выполнил два расчета устойчивости, в обоих случаях рассматривая бесконечные ряды вихрей. В первом он просто возмущил один вихрь, оставив все остальные неизменными. Этот расчет показал, что симметричная конфигурация всегда линейно неустойчива, а шахматная конфигурация линейно неустойчива всегда, кроме случая, когда  $b = \Im(z_+ - z_-)$ , и расстояние между вихрями в каждом ряду  $h$  имеет определенное значение. (Для того, чтобы избежать путаницы, мы используем новый символ  $h$  для расстояния между вихрями в каждом ряду, т. к., например, при четырех вихрях на полосу период полосы  $L$  связан с расстоянием между вихрями соотношением  $L = 2h$ , а для случая двух вихрей на полосу  $L = h$ ). Отметим, что в своей первой попытке фон Карман получил неверный результат  $\operatorname{sh}(\pi b/h) = \sqrt{2}$ . («Ошибка» объяснялась тем, что, при возмущении только одного вихря, мы добавляем к возмущаемой системе линейный импульс и кинетическую энергию. Правильный критерий возникает из возмущений, которые не добавляют линейный момент или энергию.) Правильный результат, который фон Карман также быстро получил, и который известен сейчас как его знаменитый критерий устойчивости для вихревых дорожек, имеет вид

$$\operatorname{sh} \frac{\pi b}{h} = 1. \quad (4.3)$$

Основная цель нашей работы для случая более сложных вихревых волновых следов — мы использовали для них термин «экзотические» — состоит в том, чтобы применить полученное нами решение для трех вихрей на полосу для моделирования вихрей в том же духе, как фон Карман моделировал устойчивые вихревые дорожки с помощью решений с двумя вихрями на полосу. Пример «экзотического» волнового вихревого следа с тремя вихрями, генерируемыми за один цикл, показан на рис. 4. В динамике вихревых волновых следов существует положение (которое очевидно справедливо, но которое трудно доказать), состоящее в том, что суммарная циркуляция всех вихрей, образовавшихся в течение одного цикла, равна нулю. Это относится также к таким случаям как цилиндр, осциллирующий нормально к набегающему однородному потоку.

Недавно вышедшая статья Понта, Стемлера и автора [4] дает достаточно подробное изложение наших идей, поэтому здесь мы ограничимся их кратким обзором.

При распространении решения для трех вихрей с суммарной циркуляцией, равной нулю, на периодические граничные условия [6, 30] мы опять обнаруживаем, что задачу можно редуцировать в задачу адвекции для относительного положения двух из трех вихрей, например, как и выше,  $Z = z_1 - z_2$ . Однако на этот раз система вихрей, переносимая адвекцией, состоит из трех

рядов, а не просто из трех вихрей. Вихри в каждом из трех рядов идентичны, а их циркуляции равны, соответственно,  $\Gamma_1^{-1}$ ,  $\Gamma_2^{-1}$ ,  $\Gamma_3^{-1}$  (с точностью до временного масштаба). Действительно, положение «базового вихря» в каждом ряду задается в точности так же, как и в случае неограниченной плоскости, линейным импульсом системы и циркуляцией. Оказывается, если отношение циркуляций — рациональное число (в связи с тем, что сумма нулевая, из рациональности отношения двух циркуляций следует, что отношение любых двух циркуляций также рационально), то три ряда вихрей, переносимых адвекцией, ложатся на периодическую полосу с шириной, кратной периоду  $L$  полосы на физической плоскости. Если отношения иррациональны, три ряда переносимых вихрей не имеют общего периода, и мы имеем адвекцию бесконечной системы стационарных вихрей.

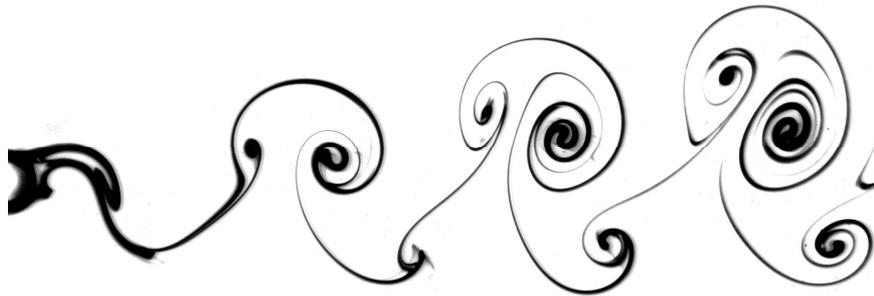


Рис. 4. «Экзотическая» вихревая дорожка за осциллирующим цилиндром (с разрешения С. Х. К. Вильямсона)

В этом случае также возникает задача адвекции на фазовой плоскости, однако на этот раз с более сложной структурой различных *режимов движения*, чем в случае неограниченной плоскости. В общем случае существует еще много режимов перемещения  $Z$ , а, следовательно, и много режимов собственно вихревого движения. (Для того чтобы найти  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  из  $Z$  необходима дополнительная квадратура.) Отсюда следует первый качественный вывод: вихревые следы с испусканием трех (а, значит, по-видимому, и более чем трех) вихрей за один цикл обеспечивают значительно большее разнообразие видов следов, чем классические вихревые следы в виде дорожек (мы относим к этому классу как дорожку фон Кармана, так и ее непрямых «родственников», обнаруженных позже Долапчиевым и Мауэ, см., например, [21]). Кроме того, насколько мы можем судить, богатство динамической структуры решения с тремя вихрями на полосу лишь частично отражается в известных экспериментальных результатах. Диаграммы на фазовой плоскости свидетельствуют, например, о существовании большого числа относительных равновесий с тремя вихрями на период, ни одно из которых не наблюдалось. Немного удивительным представляется то, что их можно определить аналитически [29]. Все они линейно неустойчивы (т. к. они соответствуют седловым точкам диаграммы на фазовой плоскости), чем можно объяснить то, что они не встречаются (или видимо не встречаются) даже как переходные формы в экспериментальных изображениях вихревых следов. Тем не менее, детальный анализ таких изображений еще предстоит выполнить, и мы лишь недавно поняли, что следует искать.

Мы полагаем также, что закон трения фон Кармана, выведенный для обычной вихревой дорожки [15], можно обобщить на некоторый класс более сложных вихревых следов. Работы в этом направлении уже ведутся. Результаты экспериментов свидетельствуют о большом богатстве структуры силы трения в зависимости от частоты колебаний цилиндра. Было бы интересно воспроизвести такие результаты с использованием простых моделей следов, рассмотренных здесь.

## 5. Диаграмма бифуркации для вихревых следов

Проблема, постоянно возникающая при попытках установить соответствие между аналитическими решениями и физическими экспериментами со следами, связана с различиями между возможностями управления начальным распределением завихренности в эксперименте и теории. В теории положения и циркуляции множества вихрей задаются в виде начальных условий. В эксперименте эти данные формируются в сложном процессе под влиянием неустойчивости граничного слоя, свертывания вихревого слоя и формирования вихрей. Мы часто называем этот процесс просто «генерацией вихрей», хотя вихри в следе обычно не «генерируются» в готовом виде для образования дорожки. Соответствующий процесс имеет намного более сложный характер и состоит из нескольких стадий.

Возможности управления для экспериментатора сводятся к амплитуде и частоте колебаний цилиндра, порождающего след, форме этого цилиндра и скорости набегающего свободного потока. Отображение этих параметров в результирующем следе в настоящее время является в определенной степени искусством. Наиболее надежным руководством в этой области служит сейчас бифуркационная диаграмма, экспериментально определенная Вильямсоном и Рошко [32] для следов, порожденных цилиндром, колеблющимся нормально по отношению к набегающему свободному однородному потоку. Ряд различных режимов формирования следа, обозначенных через «S» для одиночных вихрей, «P» для парных, и «S + P» для различных комбинаций этих двух режимов (см. например, след на рис. 4), был выявлен и отображен на графике, абсцисса которого представляет собой длину волны колебательного движения цилиндра, а ордината — амплитуду этого колебания (обе координаты преобразованы в безразмерную форму нормированием на диаметр цилиндра).

Недавно мы попытались выдвинуть некоторые теоретические идеи для «рационализации» структуры этой диаграммы. Грубая аппроксимация указывает на то, что разделительными линиями между различными режимами на диаграмме Вильямсона–Рошко служат радиусы и окружности. Кроме того, в общем случае, количество вихрей, генерируемых за цикл, увеличивается при удалении от начала координат по радиусу. В нашей статье [25] Понта и я рассмотрели волнообразное движение цилиндра как последовательность равномерных перемещений с резкой сменой направления. Во время каждого хода цилиндр генерирует вихри практически так же, как это происходило бы в равномерном набегающем потоке. Существует одно осложнение: поскольку в ходе эксперимента цилиндру сообщалась постоянная скорость вдоль потока, скорость вдоль реальной траектории изменялась. Соответственно, изменялось и число Рейнольдса, и, следовательно, из-за соотношения чисел Струхаля–Рейнольдса менялась и частота генерации вихрей. Кроме этого эффекта, который аналогичен движению осциллятора со слабо изменяющейся задающей частотой, длина равномерного перемещения за один такт определяет количество генерируемых вихрей. Таким образом, мы имеем эффект как амплитуды, так и длины волны колебания на количество вихрей, генерируемых за один такт. Поскольку количество вихрей, различимых в картинах следов в виде пар или одиночных вихрей, является целым числом, возникает «квантование» результирующего следа как функция непрерывно меняющихся управляющих параметров (т. е. длины волны и амплитуды колебания). Это квантование можно выразить следующей формулой

$$\frac{\lambda}{D} St E(-(2\pi A/\lambda)^2) = n \frac{\pi}{2}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\lambda$  и  $A$  — длина волны и амплитуда колебаний цилиндра, соответственно,  $St$  — число Струхаля, соответствующее числу Рейнольдса для свободного потока по соотношению  $St-Re$ , а  $n$  — целое число. Функция  $E$  представляет собой полный эллиптический интеграл второго рода (вывод см. в [25]). Кривые (18) соответствуют радиальным граничным линиям на бифуркаци-

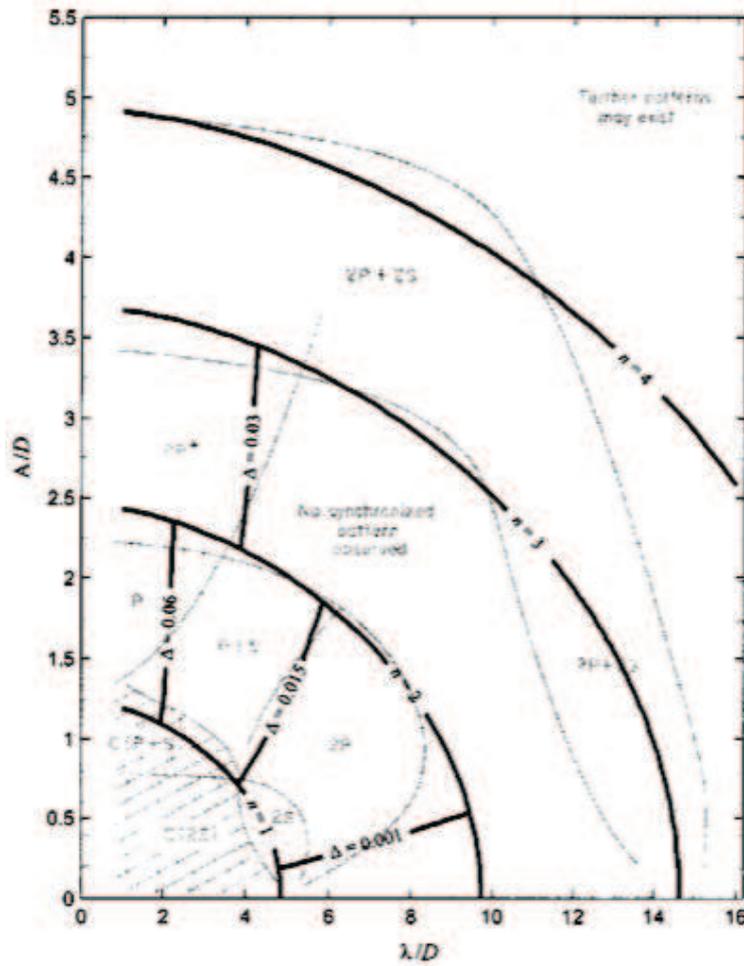


Рис. 5. Теоретические кривые, наложенные на бифуркационную диаграмму Вильямсона–Рошко (в виде размытого фона). Радиальные кривые уравнения (18) не имеют параметров для настройки

онной диаграмме Вильямсона–Рошко. При вынесении этих линий на диаграмму наблюдается удивительно хорошее совпадение (заметим, что параметров для настройки при этом нет).

Труднее создать убедительную теорию для радиальных кривых, которые разделяют режимы генерирования на диаграмме Вильямсона–Рошко. Мы считаем, что эти границы связаны с порогом устойчивости процесса генерирования вихрей по отношению к изменению числа Рейнольдса ( $\alpha$ , следовательно, и соответствующего числа Струхалия) в процессе колебательного движения цилиндра. Как мы уже отмечали, мгновенное значение числа Рейнольдса для потока вокруг цилиндра меняется в процессе его движения из-за того, что скорость вдоль потока в эксперименте поддерживается постоянной. Отсюда следует, что скорость вдоль волнообразной траектории должна меняться, причем именно эта скорость относительно жидкости определяет генерацию вихрей. Однако сказать, каким может быть этот порог, трудно без использования более точной количественной модели собственно процесса генерации, которой у нас пока нет. Радиальные линии на рис. 5 проведены при выборе значений этого порога, обеспечивающих наилучшее соответствие с кривыми, полученными из экспериментов. Таким образом, самое большое, что можно сказать, это то, что качественное объяснение может иметь определенные основания. Более глубокое понимание на количественном уровне остается задачей на будущее.

## 6. Заключительные замечания

По-видимому, не будет преувеличением сказать, что вихревая динамика позволяет получить выводы, касающиеся структуры следа, которые трудно получить каким-либо другим способом. Использование вихрей в следе в качестве основных степеней свободы в теории открывает совершенно особые перспективы по сравнению с другими подходами, основанными, например, на соображениях линейной или даже нелинейной устойчивости.

В «вихревом представлении» проблема двух вихрей на периодической полосе дает структуру и скорость поступательного движения конфигураций вихревых дорожек фон Кармана. Четыре вихря на периодической полосе дают критерий устойчивости и показывают, в частности, что даже шахматная конфигурация, выделенная в результате линеаризованного анализа устойчивости фон Кармана, не является устойчивой, если учесть возмущения второго порядка.

Задача трех вихрей на полосу открывает выход на режимы вихревых дорожек самого низкого порядка из наблюдавшихся за колеблющимся цилиндром. Теория трех вихрей на полосу в настоящее время выглядит намного более богатой, чем наблюдения следов за колеблющимся цилиндром, в том смысле, что существует много режимов движения, вытекающих из анализа, которым, по-видимому, не соответствуют экспериментальные ситуации. Это может быть всего лишь результатом неполного анализа имеющихся экспериментальных результатов или результатом ограниченности доступа к полному пространству параметров задачи, которое может существовать при генерации вихрей колеблющимся цилиндром. Заметим, что существует большое число стационарных ситуаций (относительные равновесия), но все эти ситуации линейно неустойчивы. Это может означать, что их следует искать с использованием анализа медленных переходных процессов эволюции следа, которые не обязательно являются непосредственно воспроизводимыми устойчивыми состояниями.

Исходя из того, что происходит на неограниченной плоскости, можно было бы предположить, что следы с четырьмя (и больше) вихрями, генерируемыми за один цикл, приводят к конфигурациям с хаотическим движением, и что формирования определенной картины ожидать не следует. Как предположение, так и вывод, приведенные выше, требуют дальнейшего исследования. Мы можем добавить, что сейчас мы понимаем задачу трех вихрей в периодической полосе как «максимально хаотичную» в том смысле, что адвекция, которую она вызывает, может быть *псевдо-Аносовским отображением* в определенной области потока. Мы отсылаем читателя к недавней работе по *топологическому хаосу* Бойланда, Стремлера и автора [8, 9], где дается изложение и объяснение этих утверждений. Установление топологического хаоса для адвекции с тремя вихрями служит серьезной поддержкой для упоминавшегося предположения, что следы с четырьмя и более вихрями, генерируемыми за один цикл, не приведут к формированию различных картин.

Наконец, кажется очевидным, что, несмотря на многочисленные публикации о вихревых следах, остается много нерешенных задач даже для полностью двумерного потока. Новые «экзотические» следы, появившиеся при колебании тела, генерирующего вихри, открыли ящик Пандоры с новыми возможностями, теоретические подходы к которым мы еще только находим.

Исследования в этой области я проводил в тесном сотрудничестве с Ф.Л.Понта и М.А.Стремлером, представления которых отражены в приведенном выше тексте (разумеется, ответственность за все ошибки и заблуждения лежит на мне). Упоминаю с благодарностью плодотворные дискуссии с С.Х.К.Вильямсоном. Я выражаю благодарность организаторам симпозиума, особенно Михаилу Соколовскому и Ольге Яковенко, за внимание и гостеприимство. Представленная работа получила поддержку Национального исследовательского фонда Дании в виде стипендии приглашенного профессора имени Нильса Бора в Техническом университете Дании.

## Список литературы

- [1] Aref H. *Motion of three vortices* // Physics of Fluids, 1979, V. 22, p. 393–400.
- [2] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // Journal of Fluid Mechanics, 1984, V. 143, p. 1–21.
- [3] Aref H. *Three-vortex motion with zero total circulation* // Addendum. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1989, V. 40, p. 495–500.
- [4] Aref H., Stremmer M. A. & Ponta F. L. *Exotic vortex wakes — point vortex solutions* // Journal of Fluids and Structures, 2006, V. 22, p. 929–940.
- [5] Aref H., Rott, N. and Thomann H. *Gröbli's solution of the three-vortex problem* // Annual Review of Fluid Mechanics, 1992, V. 24, p. 1–20.
- [6] Aref H., & Stremmer M. A. *On the motion of three point vortices in a periodic strip* // Journal of Fluid Mechanics, 1996, V. 314, p. 1–25.
- [7] Birkhoff G. & Fisher, J. *Do vortex sheets roll up?* // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1959, V. 8, p. 77–90.
- [8] Boyland P. L., Aref H. & Stremmer M. A. *Topological fluid mechanics of stirring* // Journal of Fluid Mechanics, 2000, V. 403, p. 277–304.
- [9] Boyland P. L., Stremmer M. A. & Aref H. *Topological fluid mechanics of point vortex motions* // Physica D, 2002, 175, 69–95.
- [10] Domm U. *Über die Wirbelstrassen von geringster Instabilität* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 1956, V. 36, p. 367–371.
- [11] Friedmann A. & Poloubarinova P. *Über fortschreitende Singularitäten der ebenen Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit* // Recueil de Géophysique, 1928, Tome V, Fascicule II, Leningrad, pp. 9–23 (Russian with German summary).
- [12] Gröbli W. *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* // Zürcher und Furrer, Zürich. Also published in Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich 1877, V. 22, p. 37–81, p. 129–165.
- [13] Th. von Kármán. *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. 1. Teil* // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.- Phys. Kl., 1911, p. 509–517. Reprinted in: Collected works of Theodore von Kármán (Butterworth, London, 1956), V. 1, p. 324–330.
- [14] Th. von Kármán. *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. 2. Teil* // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.- Phys. Kl., 1912, p. 547–556. Reprinted in: Collected works of Theodore von Kármán (Butterworth, London, 1956), V. 1, p. 331–338.
- [15] Th. von Kármán and H. Rubach. *Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes* // Phys. Z., 1912, V. 13, p. 49–59. Reprinted in: Collected works of Theodore von Kármán (Butterworth, London, 1956) V. 1, p. 339–358.
- [16] Kochin N. *On the instability of von Kármán's vortex streets* // Doklady Akademii Nauk SSSR, 1939, V. 24, p. 19–23.
- [17] Helmholtz H. von. *Über Integrale der hydro-dynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* // Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1858, V. 55, p. 25–55.
- [18] Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*, 1876, (Teubner, Leipzig). Also: 2nd edn (1877); 3rd edn (1883); 4th edn (1897).
- [19] Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th ed. // Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

- [20] Laura E. *Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli in un fluido incompressibile indefinito* // Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1905, V. 40, p. 296–312.
- [21] Maue A. W. *Zur Stabilität der Kármánschen Wirbelstrasse* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 1940, V. 20, p. 129–137.
- [22] Novikov E. A. *Dynamics and statistics of a system of vortices* // ZhETF, 1975, V.68, p. 1868–1882. English translation in: Soviet Phys.-JETP 41, 937–943.
- [23] Poincaré H. *Théorie des tourbillons* // 1893, Carré, Paris.
- [24] Ponta F. L., & Aref H. *The Strouhal-Reynolds number relationship for vortex streets* // Physical Review Letters, 2004, V. 93, 084501.
- [25] Ponta F. L., & Aref H. *Vortex synchronization regions in shedding from an oscillating cylinder* // Physics of Fluids, 2005a, V. 17, 011703.
- [26] Ponta F. L., & Aref H. *Numerical experiments on vortex shedding from an oscillating cylinder* // Journal of Fluids and Structures, 2005b, V. 22, p. 327–344.
- [27] Rosenhead L. *The formation of vortices from a surface of discontinuity* // Proceedings of the Royal Society, London, Ser. A, 1931, V. 134, p. 170–192.
- [28] Rott N. *Three-vortex motion with zero total circulation* // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1989, V. 40, p. 473–494. [With an Addendum by H. Aref (1989)].
- [29] Stremler M. A. *Relative equilibria of singly periodic point vortex arrays.* // Physics of Fluids, 2003, V. 15, p. 3767–3775.
- [30] Stremler M. A., & Aref H. *Motion of three vortices in a periodic parallelogram* // Journal of Fluid Mechanics, 1999, V. 392, p. 101–128.
- [31] Synge J. L. *On the motion of three vortices* // Canadian Journal of Mathematics, 1949, V. 1, p. 257–270.
- [32] Williamson C. H. K., & Roshko A. *Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder* // Journal of Fluids and Structures, 1988, V. 2, p. 355–381.